

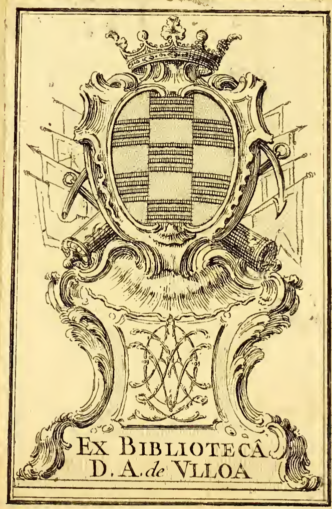
Viro doctrinâ simul et moribus
spectabili.

D°. Antonio de Ulloâ Hispalensi,

auspicatum in Patriam reditum
omniaque dein felicia
ex animo precatur.

Martinus Folkes, Regalis Societatis
Londini Præses, et Regiæ Scientiarum
Academiæ Parisiensis Socius.

3° Eid. Maij. Anno Salutis reparatæ M.DCCXLVI.



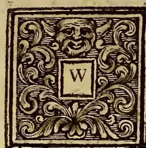
NEWTONI

PRINCIPIA

PHILOSOPHIÆ.



GEORGE R.



HEREAS Our Trufty and well beloved *William Innys* and *John Innys* of Our City of *London*, Bookfellers, have by their Petition reprefented unto Us, that they have at great Charge and Expence printed a new and correct Edition of a Book intituled, *Philofophiæ Naturalis Principia Mathematica*; *Auctore Ifaaco Newtono Eq. Aur. Editio tertia aucta & emendata:* And the fole Right and Title of the Copy of the fame, being vefted in the faid *William Innys* and *John Innys*, they have humbly befought Us to grant them Our Royal Privilege and Licence, for the fole printing and publifhing thereof for the Term of fourteen Years: We being willing to give all due Encouragement to Works of this Nature, which tend to the Advancement of Learning, are gracioufly pleafed to gratify them in their Requeft, and do, by thefe Prefents, agreeable to the Statutes in that Behalf made and provided, for Us, Our Heirs and Succeffors, give and grant unto them the faid *William Innys* and *John Innys*, their Executors, Adminiftrators and Affigns, Our Royal Licenfe for the fole printing and publifhing the faid Book intituled, *Philofophiæ Naturalis Principia Mathematica*; *Auctore Ifaaco Newtono Eq. Aur.* for the Term of fourteen Years from the Date hereof, ftrictly forbidding all Our Subjects within Our Kingdoms and Dominions to reprint the fame, either in the like or in any other Volume or Volumes whatfoever, or to Import, Buy, Vend, Utter or Diftribute any Copies thereof reprinted beyond the Seas, during the aforefaid term of fourteen Years, without the Confent or Approbation of the faid *William Innys* and *John Innys*, their Heirs, Executors, and Affigns under their Hands and Seals firft had and obtained, as they fhall anfwer the contrary at their Peril: Whereof Our Commiffioners and other Officers of Our Cuftoms, the Mafter Wardens and Company of Stationers, are to take Notice that due Obedience be rendered thereunto. Given at Our Court at St. *James*'s the twenty fifth Day of *March*, 1726. in the twelfth Year of Our Reign.

By his Majefty's Command,

TOWNSHEND.



ISAACUS NEWTON EQ. AUR. ÆT. 83.

I. Vanderbank pinxit 1725 *Geo. Vertue Sculpsit 1726.*

PHILOSOPHIÆ NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA.

AUCTORE
ISAACO NEWTONO, Eq. Aur.

Editio tertia aucta & emendata.

LONDINI:
Apud Guil. & Joh. Innys, Regiæ Societatis typographos.
MDCCXXVI.

ILLUSTRISSIMÆ

SOCIETATI REGALI

A

SERENISSIMO REGE

CAROLO II

AD PHILOSOPHIAM PROMOVENDAM

FUNDATÆ,

ET

AUSPICIIS

SERENISSIMI REGIS

GEORGII

FLORENTI

TRACTATUM HUNC D.D.D.

IS. NEWTON.

IN

VIRI PRÆSTANTISSIMI

ISAACI NEWTONI

OPUS HOCCE

MATHEMATICO-PHYSICUM

ſeculi gentiſque noſtræ decus egregium.

EN tibi norma poli, & divæ libramina molis,
Computus en Jovis; & quas, dum primordia rerum
Pangeret, omniparens leges violare creator
Noluit, atque operum quæ fundamenta locârit.
Intima panduntur victi penetralia cæli,
Nec latet extremos quæ vis circumrotat orbes.
Sol ſolio reſidens ad ſe jubet omnia prono
Tendere deſcenſu, nec recto tramite currus
Siderios patitur vaſtum per inane moveri;
Sed rapit immotis, ſe centro, ſingula gyris.
Jam patet horrificis quæ ſit via flexa cometis;
Jam non miramur barbati phænomena aſtri.
Diſcimus hinc tandem qua cauſa argentea Phœbe
Paſſibus haud æquis graditur; cur ſubdita nulli
Hactenus aſtronomo numerorum fræna recuſet:
Cur remeant nodi, curque auges progrediuntur.
Diſcimus & quantis refluum vaga Cynthia pontum
Viribus impellit, feſſis dum fluctibus ulvam
Deſerit, ac nautis ſuſpectas nudat arenas;
Alternis vicibus ſuprema ad littora pulſans.

Quæ

Quæ toties animos veterum torſere ſophorum,
Quæque ſcholas fruſtra rauco certamine vexant,
Obvia conſpicimus, nubem pellente matheſi.
Jam dubios nulla caligine prægravat error,
Queis ſuperum penetrare domos atque ardua cæli
Scandere ſublimis genii conceſſit acumen.
Surgite mortales, terrenas mittite curas;
Atque hinc cæligenæ vires dignoſcite mentis,
A pecudum vita longe lateque remotæ.
Qui ſcriptis juſſit tabulis compeſcere cædes,
Furta & adulteria, & perjuræ crimina fraudis;
Quive vagis populis circundare mœnibus urbes
Auctor erat; Cereriſve beavit munere gentes;
Vel qui curarum lenimen preſſit ab uva;
Vel qui Niliaca monſtravit arundine pictos
Conſociare ſonos, oculiſque exponere voces;
Humanam ſortem minus extulit: utpote pauca
Reſpiciens miſeræ tantum ſolamina vitæ.
Jam vero ſuperis convivæ admittimur, alti
Jura poli tractare licet, jamque abdita cæcæ
Clauſtra patent terræ, rerumque immobilis ordo,
Et quæ præteriti latuerunt ſecula mundi.
Talia monſtrantem mecum celebrate camænis,
Vos ô cælicolum gaudentes nectare veſci,
NEWTONUM clauſi reſerantem ſcrinia veri,
NEWTONUM Muſis charum, cui pectore puro
Phœbus adeſt, totoque inceſſit numine mentem:
Nec fas eſt propius mortali attingere divos.

EDM. HALLEY

PRÆ-

AUCTORIS
PRÆFATIO
AD
LECTOREM.

C*UM veteres* mechanicam (*uti auctor est* Pappus) *in rerum naturalium investigatione maximi fecerint*; & *recentiores, missis formis substantialibus* & *qualitatibus occultis, phænomena naturæ ad leges mathematicas revocare aggressi sint: Visum est in hoc tractatu* mathesin *excolere, quatenus ea ad* philosophiam *spectat.* Mechanicam *vero duplicem veteres constituerunt:* rationalem, *quæ per demonstrationes accurate procedit,* & practicam. *Ad practicam spectant artes omnes manuales, a quibus utique* mechanica *nomen mutuata est. Cum autem artifices parum accurate operari soleant, fit ut* mechanica *omnis a* geometria *ita distinguatur, ut quicquid accuratum sit ad* geometriam *referatur, quicquid minus accuratum ad* mechanicam. *Attamen errores non sunt artis, sed artificum. Qui minus accurate operatur, imperfectior est mechanicus,* & *si quis accuratissime operari posset, hic foret mechanicus omnium perfectissimus. Nam* & *linearum rectarum* & *circulorum descriptiones, in quibus* geometria *fundatur, ad* mechanicam *pertinent. Has lineas describere* geometria *non docet, sed postulat. Postulat enim ut tyro easdem accurate describere prius didiceret, quam limen attingat* geometriæ; *dein, quomodo per has operationes problemata solvantur, docet; rectas* & *circulos describere problemata sunt, sed non geometrica. Ex* mechanica *postulatur horum solutio, in* geometria *docetur solutorum usus. Ac gloriatur* geometria *quod tam paucis principiis aliunde petitis tam multa præstet. Fundatur igitur* geometria *in praxi mechanica,* & *nihil aliud est quam* mechanicæ universalis *pars illa, quæ artem mensurandi accurate proponit ac demonstrat. Cum autem artes manuales in corporibus movendis præcipue versentur, fit ut* geometria *ad magnitudinem,* mechani-

ca *ad motum vulgo referatur. Quo sensu* mechanica rationalis *erit scientia motuum, qui ex viribus quibuscunque resultant, & virium quæ ad motus quoscunque requiruntur, accurate proposita ac demonstrata. Pars hæc* mechanicæ *a veteribus in* potentiis quinque *ad artes manuales spectantibus exculta fuit, qui gravitatem (cum potentia manualis non sit) vix aliter quam in ponderibus per potentias illas movendis considerarunt. Nos autem non artibus sed philosophiæ consulentes, deque potentiis non manualibus sed naturalibus scribentes, ea maxime tractamus, quæ ad gravitatem, levitatem, vim elasticam, resistentiam fluidorum & ejusmodi vires seu attractivas seu impulsivas spectant: Et ea propter, hæc nostra tanquam philosophiæ principia mathematica proponimus. Omnis enim philosophiæ difficultas in eo versari videtur, ut a phænomenis motuum investigemus vires naturæ, deinde ab his viribus demonstremus phænomena reliqua. Et huc spectant propositiones generales, quas libro primo & secundo pertractavimus. In libro autem tertio exemplum hujus rei proposuimus per explicationem systematis mundani. Ibi enim, ex phænomenis cœlestibus, per propositiones in libris prioribus mathematice demonstratas, derivantur vires gravitatis, quibus corpora ad solem & planetas singulos tendunt. Deinde ex his viribus per propositiones etiam mathematicas, deducuntur motus planetarum, cometarum, lunæ & maris. Utinam cætera naturæ phænomena ex principiis mechanicis eodem argumentandi genere derivare liceret. Nam multa me movent, ut nonnihil suspicer ea omnia ex viribus quibusdam pendere posse, quibus corporum particulæ per causas nondum cognitas vel in se mutuo impelluntur & secundum figuras regulares cohærent, vel ab invicem fugantur & recedunt: quibus viribus ignotis, philosophi hactenus naturam frustra tentarunt. Spero autem quod vel huic philosophandi modo, vel veriori alicui, principia hic posita lucem aliquam præbebunt.*

In his edendis, vir acutissimus & in omni literarum genere eruditissimus Edmundus Halleius *operam navavit, nec solum typothetarum sphalmata correxit & schemata incidi curavit, sed etiam auctor fuit, ut horum editionem aggrederer. Quippe cum demonstratam a me figuram orbium cœlestium impetraverat, rogare non destitit, ut eandem cum* Societate Regali *communicarem, quæ deinde hortatibus & benignis suis auspiciis effecit, ut de eadem in lucem emittenda cogitare inciperem. At postquam motuum lunarium inæqualitates aggressus*

essem,

essem, deinde etiam alia tentare cœpissem, quæ ad leges & mensuras gravitatis & aliarum virium, & figuras a corporibus secundum datas quascunque leges attractis describendas, ad motus corporum plurium inter se, ad motus corporum in mediis resistentibus, ad vires, densitates & motus mediorum, ad orbes cometarum & similia spectant, editionem in aliud tempus differendam esse putavi, ut cætera rimarer & una in publicum darem. Quæ ad motus lunares spectant (imperfecta cum sint) in corollariis propositionis LXVI *simul complexus sum, ne singula methodo prolixiore quam pro rei dignitate proponere, & sigillatim demonstrare tenerer, & seriem reliquarum propositionum interrumpere. Nonnulla sero inventa locis minus idoneis inserere malui, quam numerum propositionum & citationes mutare. Ut omnia candide legantur, & defectus in materia tam difficili non tam reprehendantur, quam novis lectorum conatibus investigentur, & benigne suppleantur, enixe rogo.*

Dabam *Cantabrigiæ*, e Collegio
S. Trinitatis, Maii 8. 1686.

IS. NEWTON.

AUCTORIS PRÆFATIO

IN

EDITIONEM SECUNDAM.

IN *hac ſecunda Principiorum editione multa ſparſim emendantur, & nonnulla adjiciuntur. In libri primi ſectione* II *inventio virium, quibus corpora in orbibus datis revolvi poſſint, facilior redditur & amplior. In libri ſecundi ſectione* VII *theoria reſiſtentiæ fluidorum accuratius inveſtigatur, & novis experimentis confirmatur. In libro tertio theoria lunæ & præceſſio æquinoctiorum ex principiis ſuis plenius deducuntur, & theoria cometarum pluribus & accuratius computatis orbium exemplis confirmatur.*

Dabam *Londini*,
Mar. 28. 1713.

IS. NEWTON.

EDI-

EDITORIS PRÆFATIO

IN

EDITIONEM SECUNDAM.

NEWTONIANÆ philoſophiæ novam tibi, lector benevole, diuque deſideratam editionem, plurimum nunc emendatam atque auctiorem exhibemus. Quæ potiſſimum contineantur in hoc opere celeberrimo, intelligere potes ex indicibus adjectis: quæ vel addantur vel immutentur, ipſa te fere docebit auctoris præfatio. Reliquum eſt, ut adjiciantur nonnulla de methodo hujus philoſophiæ.

Qui phyſicam tractandam ſuſceperunt, ad tres fere claſſes revocari poſſunt. Extiterunt enim, qui ſingulis rerum ſpeciebus qualitates ſpecificas & occultas tribuerint; ex quibus deinde corporum ſingulorum operationes, ignota quadam ratione, pendere voluerunt. In hoc poſita eſt ſumma doctrinæ ſcholaſticæ, ab *Ariſtotele* & Peripateticis derivatæ: Affirmant utique ſingulos effectus ex corporum ſingularibus naturis oriri; at unde ſint illæ naturæ non docent; nihil itaque docent. Cumque toti ſint in rerum nominibus, non in ipſis rebus; ſermonem quendam philoſophicum cenſendi ſunt adinveniſſe, philoſophiam tradidiſſe non ſunt cenſendi.

Alii ergo melioris diligentiæ laudem conſequi ſperarunt rejecta vocabulorum inutili farragine. Statuerunt itaque materiam univerſam homogeneam eſſe, omnem vero formarum varietatem, quæ in corporibus cernitur, ex particularum componentium ſimpliciſſimis quibuſdam & intellectu facillimis affectionibus oriri. Et recte quidem progreſſio inſtituitur a ſimplicioribus ad magis compoſita, ſi particularum primariis illis affectionibus non alios tribuunt modos, quam

quos

quos ipsa tribuit natura. Verum ubi licentiam sibi assumunt, ponendi quascunque libet ignotas partium figuras & magnitudines, incertosque situs & motus; quin & fingendi fluida quædam occulta, quæ corporum poros liberrime permeent, omnipotente prædita subtilitate, motibusque occultis agitata; jam ad somnia delabuntur, neglecta rerum constitutione vera: quæ sane frustra petenda est ex fallacibus conjecturis, cum vix etiam per certissimas observationes investigari possit. Qui speculationum suarum fundamentum desumunt ab hypothesibus; etiamsi deinde secundum leges mechanicas accuratissime procedant; fabulam quidem elegantem forte & venustam, fabulam tamen concinnare dicendi sunt.

Relinquitur adeo tertium genus, qui philosophiam scilicet experimentalem profitentur. Hi quidem ex simplicissimis quibus possunt principiis rerum omnium causas derivandas esse volunt: nihil autem principii loco assumunt, quod nondum ex phænomenis comprobatum fuerit. Hypotheses non comminiscuntur, neque in physicam recipiunt, nisi ut quæstiones de quarum veritate disputetur. Duplici itaque methodo incedunt, analytica & synthetica. Naturæ vires legesque virium simpliciores ex selectis quibusdam phænomenis per analysin deducunt, ex quibus deinde per synthesin reliquorum constitutionem tradunt. Hæc illa est philosophandi ratio longe optima, quam præ cæteris merito amplectendum censuit celeberrimus auctor noster. Hanc solam utique dignam judicavit, in qua excolenda atque adornanda operam suam collocaret. Hujus igitur illustrissimum dedit exemplum, mundani nempe systematis explicationem e theoria gravitatis felicissime deductam. Gravitatis virtutem universis corporibus inesse, suspicati sunt vel finxerunt alii: primus ille & solus ex apparentiis demonstrare potuit, & speculationibus egregiis firmissimum ponere fundamentum.

Scio equidem nonnullos magni etiam nominis viros, præjudiciis quibusdam plus æquo occupatos, huic novo principio ægre assentiri potuisse, & certis incerta identidem prætulisse. Horum famam vellicare non est animus: tibi potius, benevole lector, illa paucis exponere lubet, ex quibus tute ipse judicium non iniquum feras.

Igitur ut argumenti sumatur exordium a simplicissimis & proximis; dispiciamus paulisper qualis sit in terrestribus natura gravitatis, ut deinde tutius progrediamur ubi ad corpora cælestia, longissime a sedibus

dibus nostris remota, perventum fuerit. Convenit jam inter omnes philosophos, corpora universa circumterrestria gravitare in terram. Nulla dari corpora vere levia, jamdudum confirmavit experientia multiplex. Quæ dicitur levitas relativa, non est vera levitas, sed apparens solummodo; & oritur a præpollente gravitate corporum contiguorum.

Porro, ut corpora universa gravitent in terram, ita terra vicissim in corpora æqualiter gravitat; gravitatis enim actionem esse mutuam & utrinque æqualem, sic ostenditur. Distinguatur terræ totius moles in binas quascunque partes, vel æquales vel utcunque inæquales: jam si pondera partium non essent in se mutuo æqualia; cederet pondus minus majori, & partes conjunctæ pergerent recta moveri ad infinitum, versus plagam in quam tendit pondus majus: omnino contra experientiam. Itaque dicendum erit, pondera partium in æquilibrio esse constituta: hoc est, gravitatis actionem esse mutuam & utrinque æqualem.

Pondera corporum, æqualiter a centro terræ distantium, sunt ut quantitates materiæ in corporibus. Hoc utique colligitur ex æquali acceleratione corporum omnium, e quiete per ponderum vires cadentium: nam vires quibus inæqualia corpora æqualiter accelerantur, debent esse proportionales quantitatibus materiæ movendæ. Jam vero corpora universa cadentia æqualiter accelerari, ex eo patet, quod in vacuo *Boyliano* temporibus æqualibus æqualia spatia cadendo describunt, sublata scilicet aëris resistentia: accuratius autem comprobatur per experimenta pendulorum.

Vires attractivæ corporum, in æqualibus distantiis, sunt ut quantitates materiæ in corporibus. Nam cum corpora in terram & terra vicissim in corpora momentis æqualibus gravitent; terræ pondus in unumquodque corpus, seu vis qua corpus terram attrahit, æquabitur ponderi corporis ejusdem in terram. Hoc autem pondus erat ut quantitas materiæ in corpore: itaque vis qua corpus unumquodque terram attrahit, sive corporis vis absoluta, erit ut eadem quantitas materiæ.

Oritur ergo & componitur vis attractiva corporum integrorum ex viribus attractivis partium: siquidem aucta vel diminuta mole materiæ, ostensum est, proportionaliter augeri vel diminui ejus virtutem. Actio itaque telluris ex conjunctis partium actionibus conflari

flari cenfenda erit; atque adeo corpora omnia terreftria fe mutuo trahere oportet viribus abfolutis, quæ fint in ratione materiæ trahentis. Hæc eft natura gravitatis apud terram: videamus jam qualis fit in cælis.

Corpus omne perfeverare in ftatu fuo vel quiefcendi vel movendi uniformiter in directum, nifi quatenus a viribus impreffis cogitur ftatum illum mutare; naturæ lex eft ab omnibus recepta philofophis. Inde vero fequitur, corpora quæ in curvis moventur, atque adeo de lineis rectis orbitas fuas tangentibus jugiter abeunt, vi aliqua perpetuo agente retineri in itinere curvilineo. Planetis igitur in orbibus curvis revolventibus neceffario aderit vis aliqua, per cujus actiones repetitas indefinenter a tangentibus deflectantur.

Jam illud concedi æquum eft, quod mathematicis rationibus colligitur & certiffime demonftratur; corpora nempe omnia, quæ moventur in linea aliqua curva in plano defcripta, quæque radio ducto ad punctum vel quiefcens vel utcunque motum defcribunt areas circa punctum illud temporibus proportionales, urgeri a viribus quæ ad idem punctum tendunt. Cum igitur in confeffo fit apud aftronomos, planetas primarios circum folem, fecundarios vero circum fuos primarios, areas defcribere temporibus proportionales; confequens eft ut vis illa, qua perpetuo detorquentur a tangentibus rectilineis & in orbitis curvilineis revolvi coguntur, verfus corpora dirigatur quæ fita funt in orbitarum centris. Hæc itaque vis non inepte vocari poteft, refpectu quidem corporis revolventis, centripeta; refpectu autem corporis centralis, attractiva; a quacunque demum caufa oriri fingatur.

Quin & hæc quoque concedenda funt, & mathematice demonftrantur: Si corpora plura motu æquabili revolvantur in circulis concentricis, & quadrata temporum periodicorum fint ut cubi diftantiarum a centro communi; vires centripetas revolventium fore reciproce ut quadrata diftantiarum. Vel, fi corpora revolvantur in orbitis quæ funt circulis finitimæ, & quiefcant orbitarum apfides; vires centripetas revolventium fore reciproce ut quadrata diftantiarum. Obtinere cafum alterutrum in planetis univerfis confentiunt aftronomi. Itaque vires centripetæ planetarum omnium funt reciproce ut quadrata diftantiarum ab orbium centris. Si quis objiciat planetarum, & lunæ præfertim, apfides non penitus quiefcere; fed motu quodam

lento

lento ferri in consequentia: responderi potest, etiamsi concedamus hunc motum tardissimum exinde profectum esse quod vis centripetæ proportio aberret aliquantum a duplicata, aberrationem illam per computum mathematicum inveniri posse & plane insensibilem esse. Ipsa enim ratio vis centripetæ lunaris, quæ omnium maxime turbari debet, paululum quidem duplicatam superabit; ad hanc vero sexaginta fere vicibus propius accedet quam ad triplicatam. Sed verior erit responsio, si dicamus hanc apsidum progressionem, non ex aberratione a duplicata proportione, sed ex alia prorsus diversa causa oriri, quemadmodum egregie commonstratur in hac philosophia. Restat ergo ut vires centripetæ, quibus planetæ primarii tendunt versus solem & secundarii versus primarios suos, sint accurate ut quadrata distantiarum reciproce.

Ex iis quæ hactenus dicta sunt, constat planetas in orbitis suis retineri per vim aliquam in ipsos perpetuo agentem: constat vim illam dirigi semper versus orbitarum centra: constat hujus efficaciam augeri in accessu ad centrum, diminui in recessu ab eodem: & augeri quidem in eadem proportione qua diminuitur quadratum distantiæ, diminui in eadem proportione qua distantiæ quadratum augetur. Videamus jam, comparatione instituta inter planetarum vires centripetas & vim gravitatis, annon ejusdem forte sint generis. Ejusdem vero generis erunt, si deprehendantur hinc & inde leges eædem, eædemque affectiones. Primo itaque lunæ, quæ nobis proxima est, vim centripetam expendamus.

Spatia rectilinea, quæ a corporibus e quiete demissis dato tempore sub ipso motus initio describuntur, ubi a viribus quibuscunque urgentur, proportionalia sunt ipsis viribus: hoc utique consequitur ex ratiociniis mathematicis. Erit igitur vis centripeta lunæ in orbita sua revolventis, ad vim gravitatis in superficie terræ, ut spatium quod tempore quam minimo describeret luna descendendo per vim centripetam versus terram, si circulari omni motu privari fingeretur, ad spatium quod eodem tempore quam minimo describit grave corpus in vicinia terræ, per vim gravitatis suæ cadendo. Horum spatiorum prius æquale est arcus a luna per idem tempus descripti sinui verso, quippe qui lunæ translationem de tangente, factam a vi centripeta, metitur; atque adeo computari potest ex datis tum lunæ

tempore periodico, tum distantia ejus a centro terræ. Spatium posterius invenitur per experimenta pendulorum, quemadmodum docuit *Hugenius*. Inito itaque calculo, spatium prius ad spatium posterius, seu vis centripeta lunæ in orbita sua revolventis ad vim gravitatis in superficie terræ, erit ut quadratum semidiametri terræ ad orbitæ semidiametri quadratum. Eandem habet rationem, per ea quæ superius ostenduntur, vis centripeta lunæ in orbita sua revolventis ad vim lunæ centripetam prope terræ superficiem. Vis itaque centripeta prope terræ superficiem æqualis est vi gravitatis. Non ergo diversæ sunt vires, sed una atque eadem: si enim diversæ essent, corpora viribus conjunctis duplo celerius in terram caderent quam ex vi sola gravitatis. Constat igitur vim illam centripetam, qua luna perpetuo de tangente vel trahitur vel impellitur & in orbita retinetur, ipsam esse vim gravitatis terrestris ad lunam usque pertingentem. Et rationi quidem consentaneum est ut ad ingentes distantias illa sese virtus extendat, cum nullam ejus sensibilem imminutionem, vel in altissimis montium cacuminibus, observare licet. Gravitat itaque luna in terram: quin & actione mutua, terra vicissim in lunam æqualiter gravitat: id quod abunde quidem confirmatur in hac philosophia, ubi agitur de maris æstu & æquinoctiorum præcessione, ab actione tum lunæ tum solis in terram oriundus. Hinc & illud tandem edocemur, qua nimirum lege vis gravitatis decrescat in majoribus a tellure distantiis. Nam cum gravitas non diversa sit a vi centripeta lunari, hæc vero sit reciproce proportionalis quadrato distantiæ; diminuetur & gravitas in eadem ratione.

Progrediamur jam ad planetas reliquos. Quoniam revolutiones primariorum circa solem & secundariorum circa jovem & saturnum sunt phænomena generis ejusdem ac revolutio lunæ circa terram, quoniam porro demonstratum est vires centripetas primariorum dirigi versus centrum solis, secundariorum versus centra jovis & saturni, quemadmodum lunæ vis centripeta versus terræ centrum dirigitur; adhæc, quoniam omnes illæ vires sunt reciproce ut quadrata distantiarum a centris, quemadmodum vis lunæ est ut quadratum distantiæ a terra: concludendum erit eandem esse naturam universis. Itaque ut luna gravitat in terram, & terra vicissim in lunam; sic etiam gravitabunt omnes secundarii in primarios suos, & primarii vicissim

in

in secundarios; sic & omnes primarii in solem, & sol vicissim in primarios.

Igitur sol in planetas universos gravitat & universi in solem. Nam secundarii dum primarios suos comitantur, revolvuntur interea circum solem una cum primariis. Eodem itaque argumento, utriusque generis planetæ gravitant in solem, & sol in ipsos. Secundarios vero planetas in solem gravitare abunde insuper constat ex inæqualitatibus lunaribus; quarum accuratissimam theoriam, admiranda sagacitate patefactam, in tertio hujus operis libro expositam habemus.

Solis virtutem attractivam quoquoversum propagari ad ingentes usque distantias, & sese diffundere ad singulas circumjecti spatii partes, apertissime colligi potest ex motu cometarum; qui ab immensis intervallis profecti feruntur in viciniam solis, & nonnunquam adeo ad ipsum proxime accedunt ut globum ejus, in periheliis suis versantes, tantum non contingere videantur. Horum theoriam ab astronomis antehac frustra quæsitam, nostro tandem sæculo feliciter inventam & per observationes certissime demonstratam, præstantissimo nostro auctori debemus. Patet igitur cometas in sectionibus conicis umbilicos in centro solis habentibus moveri, & radiis ad solem ductis areas temporibus proportionales describere. Ex hisce vero phænomenis manifestum est & mathematice comprobatur, vires illas, quibus cometæ retinentur in orbitis suis, respicere solem & esse reciproce ut quadrata distantiarum ab ipsius centro. Gravitant itaque cometæ in solem: atque adeo solis vis attractiva non tantum ad corpora planetarum in datis distantiis & in eodem fere plano collocata, sed etiam ad cometas in diversissimis cælorum regionibus & in diversissimis distantiis positos pertingit. Hæc igitur est natura corporum gravitantium, ut vires suas edant ad omnes distantias in omnia corpora gravitantia. Inde vero sequitur, planetas & cometas universos se mutuo trahere, & in se mutuo graves esse: quod etiam confirmatur ex perturbatione jovis & saturni, astronomis non incognita, & ab actionibus horum planetarum in se invicem oriunda; quin & ex motu illo lentissimo apsidum, qui supra memoratus est, quique a causa consimili proficiscitur.

Eo demum pervenimus ut dicendum sit, & terram & solem & corpora omnia cælestia, quæ solem comitantur, se mutuo attrahere. Sin-

gulorum ergo particulæ quæque minimæ vires ſuas attractivas habebunt, pro quantitate materiæ pollentes; quemadmodum ſupra de terreſtribus oſtenſum eſt. In diverſis autem diſtantiis, erunt & harum vires in duplicata ratione diſtantiarum reciproce: nam ex particulis hac lege trahentibus componi debere globos eadem lege trahentes, mathematice demonſtratur.

Concluſiones præcedentes huic innituntur Axiomati, quod a nullis non recipitur philoſophis; effectuum ſcilicet ejuſdem generis, quorum nempe quæ cognoſcuntur proprietates eædem ſunt, eaſdem eſſe cauſas & eaſdem eſſe proprietates quæ nondum cognoſcuntur. Quis enim dubitat, ſi gravitas ſit cauſa deſcenſus lapidis in *Europa*, quin eadem ſit cauſa deſcenſus in *America?* Si gravitas mutua fuerit inter lapidem & terram in *Europa*; quis negabit mutuam eſſe in *America?* Si vis attractiva lapidis & terræ componatur, in *Europa*, ex viribus attractivis partium; quis negabit ſimilem eſſe compoſitionem in *America?* Si attractio terræ ad omnia corporum genera & ad omnes diſtantias propagetur in *Europa*; quidni pariter propagari dicamus in *America?* In hac regula fundatur omnis philoſophia: quippe qua ſublata nihil affirmare poſſimus de univerſis. Conſtitutio rerum ſingularum innoteſcit per obſervationes & experimenta: inde vero non niſi per hanc regulam de rerum univerſarum natura judicamus.

Jam cum gravia ſint omnia corpora, quæ apud terram vel in cælis reperiuntur, de quibus experimenta vel obſervationes inſtituere licet; omnino dicendum erit, gravitatem corporibus univerſis competere. Et quemadmodum nulla concipi debent corpora, quæ non ſint extenſa, mobilia & impenetrabilia; ita nulla concipi debere, quæ non ſint gravia. Corporum extenſio, mobilitas, & impenetrabilitas non niſi per experimenta innoteſcunt: eodem plane modo gravitas innoteſcit. Corpora omnia de quibus obſervationes habemus, extenſa ſunt & mobilia & impenetrabilia: & inde concludimus corpora univerſa, etiam illa de quibus obſervationes non habemus, extenſa eſſe & mobilia & impenetrabilia. Ita corpora omnia ſunt gravia, de quibus obſervationes habemus: & inde concludimus corpora univerſa, etiam illa de quibus obſervationes non habemus, gravia eſſe. Si quis dicat corpora ſtellarum inerrantium non eſſe gravia, quandoquidem eorum gravitas nondum eſt obſervata; eodem argumento dicere licebit

cebit neque extensa esse, nec mobilia, nec impenetrabilia, cum hæ fixarum affectiones nondum sint observatæ. Quid opus est verbis? inter primarias qualitates corporum universorum vel gravitas habebit locum; vel extensio, mobilitas, & impenetrabilitas non habebunt. Et natura rerum vel recte explicabitur per corporum gravitatem, vel non recte explicabitur per corporum extensionem, mobilitatem, & impenetrabilitatem.

Audio nonnullos hanc improbare conclusionem, & de occultis qualitatibus nescio quid mussitare. Gravitatem scilicet occultum esse quid, perpetuo argutari solent; occultas vero causas procul esse ablegandas a philosophia. His autem facile respondetur; occultas esse causas, non illas quidem quarum existentia per observationes clarissime demonstratur, sed has solum quarum occulta est & ficta existentia nondum vero comprobata. Gravitas ergo non erit occulta causa motuum cælestium; siquidem ex phænomenis ostensum est, hanc virtutem revera existere. Hi potius ad occultas confugiunt causas; qui nescio quos vortices, materiæ cujusdam prorsus fictitiæ & sensibus omnino ignotæ, motibus iisdem regendis præficiunt.

Ideone autem gravitas occulta causa dicetur, eoque nomine rejicietur e philosophia, quod causa ipsius gravitatis occulta est & nondum inventa? Qui sic statuunt, videant nequid statuant absurdi, unde totius tandem philosophiæ fundamenta convellantur. Etenim causæ continuo nexu procedere solent a compositis ad simpliciora: ubi ad causam simplicissimam perveneris, jam non licebit ulterius progredi. Causæ igitur simplicissimæ nulla dari potest mechanica explicatio: si daretur enim, causa nondum esset simplicissima. Has tu proinde causas simplicissimas appellabis occultas, & exulare jubebis? Simul vero exulabunt & ab his proxime pendentes & quæ ab illis porro pendent, usque dum a causis omnibus vacua fuerit & probe purgata philosophia.

Sunt qui gravitatem præter naturam esse dicunt, & miraculum perpetuum vocant. Itaque rejiciendam esse volunt, cum in physica præternaturales causæ locum non habeant. Huic ineptæ prorsus objectioni diluendæ, quæ & ipsa philosophiam subruit universam, vix operæ pretium est immorari. Vel enim gravitatem corporibus omnibus inditam esse negabunt, quod tamen dici non potest: vel eo

nomine

nomine præter naturam esse affirmabunt, quod ex aliis corporum affectionibus atque adeo ex causis mechanicis originem non habeat. Dantur certe primariæ corporum affectiones; quæ, quoniam sunt primariæ, non pendent ab aliis. Viderint igitur annon & hæ omnes sint pariter præter naturam, eoque pariter rejiciendæ: viderint vero qualis sit deinde futura philosophia.

Nonnulli sunt quibus hæc tota physica cælestis vel ideo minus placet, quod cum *Cartesii* dogmatibus pugnare & vix conciliari posse videatur. His sua licebit opinione frui; ex æquo autem agant oportet: non ergo denegabunt aliis eandem libertatem quam sibi concedi postulant. Newtonianam itaque philosophiam, quæ nobis verior habetur, retinere & amplecti licebit, & causas sequi per phænomena comprobatas, potius quam fictas & nondum comprobatas. Ad veram philosophiam pertinet, rerum naturas ex causis vere existentibus derivare: eas vero leges quærere, quibus voluit summus opifex hunc mundi pulcherrimum ordinem stabilire; non eas quibus potuit, si ita visum fuisset. Rationi enim consonum est, ut a pluribus causis, ab invicem nonnihil diversis, idem possit effectus proficisci: hæc autem vera erit causa, ex qua vere atque actu proficiscitur; reliquæ locum non habent in philosophia vera. In horologiis automatis idem indicis horarii motus vel ab appenso pondere vel ab intus concluso elatere oriri potest. Quod si oblatum horologium revera sit instructum pondere; ridebitur qui finget elaterem, & ex hypothesi sic præpropere conficta motum indicis explicare suscipiet: oportuit enim internam machinæ fabricam penitius perscrutari, ut ita motus propositi principium verum exploratum habere posset. Idem vel non absimile feretur judicium de philosophis illis, qui materia quadam subtilissima cælos esse repletos, hanc autem in vortices indesinenter agi voluerunt. Nam si phænomenis vel accuratissime satisfacere possent ex hypothesibus suis; veram tamen philosophiam tradidisse, & veras causas motuum cælestium invenisse nondum dicendi sunt; nisi vel has revera existere, vel saltem alias non existere demonstraverint. Igitur si ostensum fuerit, universorum corporum attractionem habere verum locum in rerum natura; quinetiam ostensum fuerit, qua ratione motus omnes cælestes abinde solutionem recipiant; vana fuerit & merito deridenda

objectio,

objectio, si quis dixerit eosdem motus per vortices explicari debere, etiamsi id fieri posse vel maxime concesserimus. Non autem concedimus: nequeunt enim ullo pacto phænomena per vortices explicari; quod ab auctore nostro abunde quidem & clarissimis rationibus evincitur; ut somnis plus æquo indulgeant oporteat, qui ineptissimo figmento resarciendo, novisque porro commentis ornando infelicem operam addicunt.

Si corpora planetarum & cometarum circa solem deferantur a vorticibus; oportet corpora delata & vorticum partes proxime ambientes eadem velocitate eademque cursus determinatione moveri, & eandem habere densitatem vel eandem vim inertiæ pro mole materiæ. Constat vero planetas & cometas, dum versantur in iisdem regionibus cælorum, velocitatibus variis variaque cursus determinatione moveri. Necessario itaque sequitur, ut fluidi cælestis partes illæ, quæ sunt ad easdem distantias a sole, revolvantur eodem tempore in plagas diversas cum diversis velocitatibus: etenim alia opus erit directione & velocitate, ut transire possint planetæ; alia, ut transire possint cometæ. Quod cum explicari nequeat; vel fatendum erit, universa corpora cælestia non deferri a materia vorticis; vel dicendum erit, eorundem motus repetendos esse non ab uno eodemque vortice, sed a pluribus qui ab invicem diversi sint, idemque spatium soli circumjectum pervadant.

Si plures vortices in eodem spatio contineri, & sese mutuo penetrare motibusque diversis revolvi ponantur; quoniam hi motus debent esse conformes delatorum corporum motibus, qui sunt summe regulares, & peraguntur in sectionibus conicis nunc valde eccentricis, nunc ad circulorum proxime formam accedentibus; jure quærendum erit, qui fieri possit, ut iidem integri conserventur nec ab actionibus materiæ occursantis per tot sæcula quicquam perturbentur. Sane si motus hi fictitii sunt magis compositi & difficilius explicantur, quam veri illi motus planetarum & cometarum; frustra mihi videntur in philosophiam recipi: omnis enim causa debet esse effectu suo simplicior. Concessa fabularum licentia, affirmaverit aliquis planetas omnes & cometas circumcingi atmosphæris, adinstar telluris nostræ; quæ quidem hypothesis rationi magis consentanea videbitur quam hypothesis vorticum. Affirmaverit deinde has atmosphæ-

mosphæras, ex natura sua, circa solem moveri & sectiones conicas describere; qui sane motus multo facilius concipi potest, quam consimilis motus vorticum se invicem permeantium. Denique planetas ipsos & cometas circa solem deferri ab atmosphæris suis credendum esse statuat, & ob repertas motuum cælestium causas triumphum agat. Quisquis autem hanc fabulam rejiciendam esse putet, idem & alteram fabulam rejiciet: nam ovum non est ovo similius, quam hypothesis atmosphærarum hypothesi vorticum.

Docuit *Galilæus*, lapidis projecti & in parabola moti deflexionem a cursu rectilineo oriri a gravitate lapidis in terram, ab occulta scilicet qualitate. Fieri tamen potest ut alius aliquis, nasi acutioris, philosophus causam aliam comminiscatur. Finget igitur ille materiam quandam subtilem, quæ nec visu, nec tactu, neque ullo sensu percipitur, versari in regionibus quæ proxime contingunt telluris superficiem. Hanc autem materiam, in diversas plagas, variis & plerumque contrariis motibus ferri, & lineas parabolicas describere contendet. Deinde vero lapidis deflexionem pulchre sic expediet, & vulgi plausum merebitur. Lapis, inquiet, in fluido illo subtili natat & cursui ejus obsequendo, non potest non eandem una semitam describere. Fluidum vero movetur in lineis parabolicis; ergo lapidem in parabola moveri necesse est. Quis nunc non mirabitur acutissimum hujusce philosophi ingenium, ex causis mechanicis, materia scilicet & motu, phænomena naturæ ad vulgi etiam captum præclare deducentis? Quis vero non subsannabit bonum illum *Galilæum*, qui magno molimine mathematico qualitates occultas, e philosophia feliciter exclusas, denuo revocare sustinuerit? Sed pudet nugis diutius immorari.

Summa rei huc tandem redit: cometarum ingens est numerus; motus eorum sunt summe regulares, & easdem leges cum planetarum motibus observant. Moventur in orbibus conicis, hi orbes sunt valde admodum eccentrici. Feruntur undique in omnes cælorum partes, & planetarum regiones liberrime pertranseunt, & sæpe contra signorum ordinem incedunt. Hæc phænomena certissime confirmantur ex observationibus astronomicis: & per vortices nequeunt explicari. Imo, ne quidem cum vorticibus planetarum consistere possunt. Cometarum

metarum motibus omnino locus non erit; nisi materia illa fictitia penitus e cælis amoveatur.

Si enim planetæ circum solem a vorticibus devehuntur; vorticum partes, quæ proxime ambiunt unumquemque planetam, ejusdem densitatis erunt ac planeta; uti supra dictum est. Itaque materia illa omnis quæ contigua est orbis magni perimetro, parem habebit ac tellus densitatem: quæ vero jacet intra orbem magnum atque orbem saturni, vel parem vel majorem habebit. Nam ut constitutio vorticis permanere possit, debent partes minus densæ centrum occupare, magis densæ longius a centro abire. Cum enim planetarum tempora periodica sint in ratione sesquiplicata distantiarum a sole, oportet partium vorticis periodos eandem rationem servare. Inde vero sequitur, vires centrifugas harum partium fore reciproce ut quadrata distantiarum. Quæ igitur majore intervallo distant a centro, nituntur ab eodem recedere minore vi: unde si minus densæ fuerint, necesse est ut cedant vi majori, qua partes centro propiores ascendere conantur. Ascendent ergo densiores, descendent minus densæ, & locorum fiet invicem permutatio; donec ita fuerit disposita atque ordinata materia fluida totius vorticis, ut conquiescere jam possit in æquilibrio constituta. Si bina fluida, quorum diversa est densitas, in eodem vase continentur; utique futurum est ut fluidum, cujus major est densitas, majore vi gravitatis infimum petat locum: & ratione non absimili omnino dicendum est, densiores vorticis partes majore vi centrifuga petere supremum locum. Tota igitur illa & multo maxima pars vorticis, quæ jacet extra telluris orbem, densitatem habebit atque adeo vim inertiæ pro mole materiæ, quæ non minor erit quam densitas & vis inertiæ telluris: inde vero cometis trajectis orietur ingens resistentia, & valde admodum sensibilis; ne dicam, quæ motum eorundem penitus sistere atque absorbere posse merito videatur. Constat autem ex motu cometarum prorsus regulari, nullam ipsos resistentiam pati quæ vel minimum sentiri potest; atque adeo neutiquam in materiam ullam incursare, cujus aliqua sit vis resistendi, vel proinde cujus aliqua sit densitas seu vis inertiæ. Nam resistentia mediorum oritur vel ab inertia materiæ fluidæ, vel a defectu lubricitatis. Quæ oritur a defectu lubricitatis, admodum exigua est; & sane vix observari potest in fluidis vulgo notis, nisi valde

 tenacia

tenacia fuerint adinſtar olei & mellis. Reſiſtentia quæ ſentitur in aëre, aqua, hydrargyro, & hujuſmodi fluidis non tenacibus fere tota eſt prioris generis; & minui non poteſt per ulteriorem quemcunque gradum ſubtilitatis, manente fluidi denſitate vel vi inertiæ, cui ſemper proportionalis eſt hæc reſiſtentia; quemadmodum clariſſime demonſtratum eſt ab auctore noſtro in peregregia reſiſtentiarum theoria, quæ paulo nunc accuratius exponitur, hac ſecunda vice, & per experimenta corporum cadentium plenius confirmatur.

Corpora progrediendo motum ſuum fluido ambienti paulatim communicant, & communicando amittunt, amittendo autem retardantur. Eſt itaque retardatio motui communicato proportionalis; motus vero communicatus, ubi datur corporis progredientis velocitas, eſt ut fluidi denſitas; ergo retardatio ſeu reſiſtentia erit ut eadem fluidi denſitas; neque ullo pacto tolli poteſt, niſi a fluido ad partes corporis poſticas recurrente reſtituatur motus amiſſus. Hoc autem dici non poterit, niſi impreſſio fluidi in corpus ad partes poſticas æqualis fuerit impreſſioni corporis in fluidum ad partes anticas, hoc eſt, niſi velocitas relativa qua fluidum irruit in corpus a tergo, æqualis fuerit velocitati qua corpus irruit in fluidum, id eſt, niſi velocitas abſoluta fluidi recurrentis duplo major fuerit quam velocitas abſoluta fluidi propulſi; quod fieri nequit. Nullo igitur modo tolli poteſt fluidorum reſiſtentia, quæ oritur ab eorundem denſitate & vi inertiæ. Itaque concludendum erit; fluidi cæleſtis nullam eſſe vim inertiæ, cum nulla ſit vis reſiſtendi: nullam eſſe vim qua motus communicetur, cum nulla ſit vis inertiæ: nullam eſſe vim qua mutatio quælibet vel corporibus ſingulis vel pluribus inducatur, cum nulla ſit vis qua motus communicetur; nullam eſſe omnino efficaciam, cum nulla ſit facultas mutationem quamlibet inducendi. Quidni ergo hanc hypotheſin, quæ fundamento plane deſtituitur, quæque naturæ rerum explicandæ ne minimum quidem inſervit, ineptiſſimam vocare liceat & philoſopho prorſus indignam. Qui cælos materia fluida repletos eſſe volunt, hanc vero non inertem eſſe ſtatuunt; hi verbis tollunt vacuum, re ponunt. Nam cum hujuſmodi materia fluida ratione nulla ſecerni poſſit ab inani ſpatio; diſputatio tota fit de rerum nominibus, non de naturis. Quod ſi aliqui ſint adeo uſque dediti materiæ, ut ſpatium a corporibus vacuum nullo pacto admit-

admittendum credere velint; videamus quo tandem oporteat illo pervenire.

Vel enim dicent hanc, quam confingunt, mundi per omnia pleni constitutionem ex voluntate dei profectam esse, propter eum finem, ut operationibus naturæ subsidium præsens haberi posset ab æthere subtilissimo cuncta permeante & implente; quod tamen dici non potest, siquidem jam ostensum est ex cometarum phænomenis, nullam esse hujus ætheris efficaciam: vel dicent ex voluntate dei profectam esse, propter finem aliquem ignotum; quod neque dici debet, siquidem diversa mundi constitutio eodem argumento pariter stabiliri posset: vel denique non dicent ex voluntate dei profectam esse, sed ex necessitate quadam naturæ. Tandem igitur delabi oportet in fæces sordidas gregis impurissimi. Hi sunt qui somniant fato universa regi, non providentia; materiam ex necessitate sua semper & ubique extitisse, infinitam esse & æternam. Quibus positis, erit etiam undiquaque uniformis: nam varietas formarum cum necessitate omnino pugnat. Erit etiam immota: nam si necessario moveatur in plagam aliquam determinatam, cum determinata aliqua velocitate; pari necessitate movebitur in plagam diversam cum diversa velocitate; in plagas autem diversas, cum diversis velocitatibus, moveri non potest; oportet igitur immotam esse. Neutiquam profecto potuit oriri mundus, pulcherrima formarum & motuum varietate distinctus, nisi ex liberrima voluntate cuncta providentis & gubernantis dei.

Ex hoc igitur fonte promanarunt illæ omnes quæ dicuntur naturæ leges: in quibus multa sane sapientissimi consilii, nulla necessitatis apparent vestigia. Has proinde non ab incertis conjecturis petere, sed observando atque experiendo addiscere debemus. Qui vere physicæ principia legesque rerum, sola mentis vi & interno rationis lumine fretum, invenire se posse confidit; hunc oportet vel statuere mundum ex necessitate fuisse, legesque propositas ex eadem necessitate sequi; vel si per voluntatem dei constitutus sit ordo naturæ, se tamen, homuncionem misellum, quid optimum factu sit perspectum habere. Sana omnis & vera philosophia fundatur in phænomenis rerum: quæ si nos vel invitos & reluctantes ad hujusmodi principia deducunt, in quibus clarissime cernuntur consilium optimum & dominium summum sapientissimi & potentissimi entis; non erunt hæc ideo non admittenda principia, quod quibusdam forsan hominibus minus grata sint futura.

tura. His vel miracula vel qualitates occultæ dicantur, quæ displicent: verum nomina malitiose indita non sunt ipsis rebus vitio vertenda; nisi illud fateri tandem velint, utique debere philosophiam in atheismo fundari. Horum hominum gratia non erit labefactanda philosophia, siquidem rerum ordo non vult immutari.

Obtinebit igitur apud probos & æquos judices præstantissima philosophandi ratio, quæ fundatur in experimentis & observationibus. Huic vero, dici vix poterit, quanta lux accedat, quanta dignitas, ab hoc opere præclaro illustrissimi nostri auctoris; cujus eximiam ingenii felicitatem, difficillima quæque problemata enodantis, & ad ea porro pertingentis ad quæ nec spes erat humanam mentem assurgere potuisse, merito admirantur & suspiciunt quicunque paulo profundius in hisce rebus versati sunt. Claustris ergo reseratis, aditum nobis aperuit ad pulcherrima rerum mysteria. Systematis mundani compagem elegantissimam ita tandem patefecit & penitius perspectandam dedit; ut nec ipse, si nunc revivisceret, rex *Alphonsus* vel simplicitatem vel harmoniæ gratiam in ea desideraret. Itaque naturæ majestatem propius jam licet intueri, & dulcissima contemplatione frui, conditorem vero ac dominum universorum impensius colere & venerari, qui fructus est philosophiæ multo uberrimus. Cæcum esse oportet, qui ex optimis & sapientissimis rerum structuris non statim videat fabricatoris omnipotentis infinitam sapientiam & bonitatem: insanum, qui profiteri nolit.

Extabit igitur eximium Newtoni opus adversus atheorum impetus munitissimum præsidium: neque enim alicunde felicius, quam ex hac pharetra, contra impiam catervam tela deprompseris. Hoc sensit pridem, & in pereruditis concionibus anglice latineque editis, primus egregie demonstravit vir in omni literarum genere præclarus idemque bonarum artium fautor eximius Richardus Bentleius, seculi sui & academiæ nostræ magnum ornamentum, collegii nostri *S. Trinitatis* magister dignissimus & integerrimus. Huic ego me pluribus nominibus obstrictum fateri debeo: huic & tuas quæ debentur gratias, lector benevole, non denegabis. Is enim, cum a longo tempore celeberrimi auctoris amicitia intima frueretur, (qua etiam apud posteros censeri non minoris æstimat, quam propriis scriptis quæ literato orbi in deliciis sunt inclarescere) amici simul famæ & scien-

tiarum incremento consuluit. Itaque cum exemplaria prioris editionis rarissima admodum & immani pretio coëmenda superessent; suasit ille crebris efflagitationibus, & tantum non objurgando perpulit denique virum præstantissimum, nec modestia minus quam eruditione summa insignem, ut novam hanc operis editionem, per omnia elimatam denuo & egregiis insuper accessionibus ditatam, suis sumptibus & auspiciis prodire pateretur: mihi vero, pro jure suo, pensum non ingratum demandavit, ut quam posset emendate id fieri curarem.

Cantabrigiæ,
Maii 12. 1713.

ROGERUS COTES collegii *S. Trinitatis* socius,
astronomiæ & philosophiæ experimentalis
professor *Plumianus*.

AUCTORIS

AUCTORIS PRÆFATIO IN EDITIONEM TERTIAM.

IN *editione hacce tertia, quam* Henricus Pemberton M. D. *vir harum rerum peritissimus curavit, nonnulla in libro secundo de resistentia mediorum paulo fusius explicantur quam antea, & adduntur experimenta nova de resistentia gravium quæ cadunt in aëre. In libro tertio argumentum quo lunam in orbe suo per gravitatem retineri probatur, paulo fusius exponitur: & novæ adduntur observationes de proportione diametrorum Jovis ad invicem a D.* Poundio *factæ. Adduntur etiam observationes aliquot cometæ illius qui anno* 1680 *apparuit, a D.* Kirk *mense Novembri in* Germania *habitæ, quæ nuper ad manus nostras venerunt, & quarum ope constet quam prope orbes parabolici motibus cometarum respondent. Et orbita cometæ illius, computante* Halleio, *paulo accuratius determinatur quam antea, idque in ellipsi. Et ostenditur cometam in hac orbita elliptica, per novem cælorum signa, non minus accurate cursum peregisse, quam solent planetæ in orbitis ellipticis per astronomiam definitis moveri. Orbis etiam cometæ qui anno* 1723 *apparuit, a D.* Bradleio *astronomiæ apud* Oxonienses *professore computatus adjicitur.*

IS. NEWTON

Dabam *Londini*
Jan. 12. 1725-6.

INDEX CAPITUM
TOTIUS OPERIS.

DE

DE MOTU CORPORUM LIBER SECUNDUS.

DE MUNDI SYSTEMATE LIBER TERTIUS

CORRIGENDA.

IN carmine Halleii *vers.* 9. *leg.* Sidereos.

PAG. 115. *l.* 21. *leg.* xxxiv. *P.* 124. *l. antepenult. leg.* $\sqrt{P^n - A^n}$. *P.* 144. *l.* 5. *a fine leg.* descendendo currant. *P.* 145. *l.* 15, 16. *leg.* eundum. *P.* 151. *l.* 16. *leg.* singulis. *P.* 181. *l.* 9. *leg.* LM. *P.* 246. *l.* 3. *pone comma post* — 2 *A.* P. 259. l. 9. *dele inferius comma* P. 268. l. 7. *dele* in *P. P.* 283. *l.* 8. *leg Cas. P.* 291. *l* 3. *leg.* in progressione. P. 302. *l.* 11. *leg. Ca. P.* 371. *l.* 10. *leg.* ad *PO×A. P.* 391. *l.* 11. *leg.* perfectioribus. *P.* 416 l 2. *post* 9 *pone punctum.* P. 427. l 8. *leg.* luminarium. *Ibid. l.* 11. *leg.* fit. *P.* 446. *l.* 18. *leg.* 3^{iv}. P. 448. l. 13, 17. *leg.* 9. 0827646. *P.* 469. *l.* 13. *leg.* semidiametris. *P.* 487. *l.* 7. *leg.* divisas. *P.* 488. *in figura secunda jungantur* S, B *recta.* *P.* 498. *l.* 5. *leg.* $\frac{1}{5\frac{1}{4}}$ *sine commate. Ibid.* l. 7. *a fine leg.* $\frac{1}{10}$ *BF.* *P.* 500. *l.* 25. *leg.* 84021. *P.* 502. *in columna prima tabulæ leg.* d. h. , *P.* 503. *l.* 23, 28. *leg.* ♍. *P.* 510. *l.* 6. *leg.* comatas. *P.* 520. *l. penult. in columna loc. observ. leg.* ♉. *P.* 523. *in secunda columna tabulæ superioris l.* 4. *leg.* 2. 53. 12. *in quarta columna l.* 19. *leg.* 5. 16. 53. *in sexta columna l.* 19. *leg.* 5. 16. 50.

PHILO-

Philoſophiæ Naturalis PRINCIPIA MATHEMATICA.

DEFINITIONES.

DEFINITIO I.

Quantitas materiæ eſt menſura ejuſdem orta ex illius denſitate et magnitudine conjunctim.

AER denſitate duplicata, in ſpatio etiam duplicato, fit quadruplus; in triplicato ſextuplus. Idem intellige de nive & pulveribus per compreſſionem vel liquefactionem condenſatis. Et par eſt ratio corporum omnium, quæ per cauſas quaſcunque diverſimode condenſantur. Medii interea, ſi quod fuerit, interſtitia partium libere pervadentis, hic nullam rationem habeo. Hanc autem quantitatem ſub nomine corporis vel maſſæ in ſequentibus paſſim intelligo. Innoteſcit ea per corporis cujuſque pondus: Nam ponderi proportionalem eſſe reperi per experimenta pendulorum accuratiſſime inſtituta, uti poſthac docebitur.

DEFINITIO II.

Quantitas motus eſt menſura ejuſdem orta ex velocitate et quantitate materiæ conjunctim.

Motus totius eſt ſumma motuum in partibus ſingulis; ideoque in corpore duplo majore, æquali cum velocitate, duplus eſt, & dupla cum velocitate quadruplus.

DEFINITIO III.

Materiæ vis insita est potentia resistendi, qua corpus unumquodque, quantum in se est, perseverat in statu suo vel quiescendi vel movendi uniformiter in directum.

Hæc semper proportionalis est suo corpori, neque differt quicquam ab inertia massæ, nisi in modo concipiendi. Per inertiam materiæ fit, ut corpus omne de statu suo vel quiescendi vel movendi difficulter deturbetur. Unde etiam vis insita nomine significantissimo vis inertiæ dici possit. Exercet vero corpus hanc vim solummodo in mutatione status sui per vim aliam in se impressam facta; estque exercitium illud sub diverso respectu & resistentia & impetus: Resistentia, quatenus corpus ad conservandum statum suum reluctatur vi impressæ; impetus, quatenus corpus idem, vi resistentis obstaculi difficulter cedendo, conatur statum obstaculi illius mutare. Vulgus resistentiam quiescentibus & impetum moventibus tribuit: sed motus & quies, uti vulgo concipiuntur, respectu solo distinguuntur ab invicem; neque semper vere quiescunt, quæ vulgo tanquam quiescentia spectantur.

DEFINITIO IV.

Vis impressa est actio in corpus exercita, ad mutandum ejus statum vel quiescendi vel movendi uniformiter in directum.

Consistit hæc vis in actione sola, neque post actionem permanet in corpore. Perseverat enim corpus in statu omni novo per solam vim inertiæ. Est autem vis impressa diversarum originum, ut ex ictu, ex pressione, ex vi centripeta.

DEFINITIO V.

Vis centripeta est, qua corpora versus punctum aliquod, tanquam ad centrum, undique trahuntur, impelluntur, vel utcunque tendunt.

Hujus generis est gravitas, qua corpora tendunt ad centrum terræ; vis magnetica, qua ferrum petit magnetem; & vis illa, quæcunque sit, qua planetæ perpetuo retrahuntur a motibus rectilineis, & in lineis curvis revolvi coguntur. Lapis, in funda circumactus, a circumagente manu abire conatur; & conatu suo fundam distendit, eoque fortius quo celerius revolvitur; &, quamprimum dimittitur, avolat. Vim conatui illi contrariam, qua funda lapidem in manum perpetuo retrahit & in orbe retinet, quoniam in manum ceu orbis centrum dirigitur, centripetam appello. Et par est ratio corporum omnium, quæ in gyrum aguntur. Conantur ea omnia a centris orbium recedere; & nisi adsit vis aliqua conatui isti contraria, qua cohibeantur & in orbibus retineantur, quamque ideo centripetam appello, abibunt in rectis lineis uniformi cum motu. Projectile, si vi gravitatis destitueretur, non deflecteretur in terram, sed in linea recta abiret in cœlos; idque uniformi cum motu, si modo aëris resistentia tolleretur. Per gravitatem suam retrahitur a cursu rectilineo & in terram perpetuo flectitur, idque magis vel minus pro gravitate sua & velocitate motus. Quo minor fuerit ejus gravitas pro quantitate materiæ, vel major velocitas quacum projicitur, eo minus deviabit a cursu rectilineo & longius perget. Si globus plumbeus, data cum velocitate secundum lineam horizontalem a montis alicujus vertice vi pulveris tormentarii projectus, pergeret in linea curva ad distantiam duorum milliarium, priusquam in terram decideret: hic dupla cum velocitate quasi duplo longius pergeret, & decupla cum velocitate quasi decuplo longius: si modo aëris resistentia tolleretur. Et augendo velocitatem augeri posset pro lubitu distantia in quam projiceretur, & minui curvatura lineæ quam describeret, ita ut tandem caderet ad distantiam graduum decem vel triginta vel nonaginta; vel etiam ut terram totam circuiret vel de-

nique ut in cœlos abiret, & motu abeundi pergeret in infinitum. Et eadem ratione, qua projectile vi gravitatis in orbem flecti possit & terram totam circuire, potest & luna vel vi gravitatis, si modo gravis sit, vel alia quacunque vi, qua in terram urgeatur, retrahi semper a cursu rectilineo terram versus, & in orbem suum flecti: & sine tali vi luna in orbe suo retineri non potest. Hæc vis, si justo minor esset, non satis flecteret lunam de cursu rectilineo: si justo major, plus satis flecteret, ac de orbe terram versus deduceret. Requiritur quippe, ut sit justæ magnitudinis: & Mathematicorum est invenire vim, qua corpus in dato quovis orbe data cum velocitate accurate retineri possit; & vicissim invenire viam curvilineam, in quam corpus e dato quovis loco data cum velocitate egressum a data vi flectatur. Est autem vis hujus centripetæ quantitas trium generum, absoluta, acceleratrix, & motrix.

DEFINITIO VI.

Vis centripetæ quantitas absoluta est mensura ejusdem major vel minor pro efficacia causæ eam propagantis a centro per regiones in circuitu.

Ut vis magnetica pro mole magnetis vel intensione virtutis major in uno magnete, minor in alio.

DEFINITIO VII.

Vis centripetæ quantitas acceleratrix est ipsius mensura velocitati proportionalis, quam dato tempore generat.

Uti virtus magnetis ejusdem major in minori distantia, minor in majori: vel vis gravitans major in vallibus, minor in cacuminibus altorum montium, atque adhuc minor (ut posthac patebit) in majoribus distantiis a globo terræ; in æqualibus autem distantiis eadem undique, propterea quod corpora omnia cadentia (gravia an levia, magna an parva) sublata aëris resistentia, æqualiter accelerat.

DEFINI-

DEFINITIO VIII.

Vis centripetæ quantitas motrix est ipsius mensura proportionalis motui, quem dato tempore generat.

Uti pondus majus in majore corpore, minus in minore; & in corpore eodem majus prope terram, minus in cœlis. Hæc quantitas est corporis totius centripetentia seu propensio in centrum, & (ut ita dicam) pondus; & innotescit semper per vim ipsi contrariam & æqualem, qua descensus corporis impediri potest.

Hasce virium quantitates brevitatis gratia nominare licet vires motrices, acceleratrices, & absolutas; & distinctionis gratia referre ad corpora centrum petentia, ad corporum loca, & ad centrum virium: nimirum vim motricem ad corpus, tanquam conatum totius in centrum ex conatibus omnium partium compositum; & vim acceleratricem ad locum corporis, tanquam efficaciam quandam, de centro per loca singula in circuitu diffusam, ad movenda corpora quæ in ipsis sunt; vim autem absolutam ad centrum, tanquam causa aliqua præditum, sine qua vires motrices non propagantur per regiones in circuitu; sive causa illa sit corpus aliquod centrale (quale est magnes in centro vis magneticæ, vel terra in centro vis gravitantis) sive alia aliqua quæ non apparet. Mathematicus duntaxat est hic conceptus: Nam virium causas & sedes physicas jam non expendo.

Est igitur vis acceleratrix ad vim motricem ut celeritas ad motum. Oritur enim quantitas motus ex celeritate & ex quantitate materiæ, & vis motrix ex vi acceleratrice & ex quantitate ejusdem materiæ conjunctim. Nam summa actionum vis acceleratricis in singulas corporis particulas est vis motrix totius. Unde juxta superficiem terræ, ubi gravitas acceleratrix seu vis gravitans in corporibus universis eadem est, gravitas motrix seu pondus est ut corpus: at si in regiones ascendatur ubi gravitas acceleratrix fit minor, pondus pariter minuetur, eritque semper ut corpus & gravitas acceleratrix conjunctim. Sic in regionibus ubi gravitas acceleratrix duplo minor est, pondus corporis duplo vel triplo minoris erit quadruplo vel sextuplo minus.

Porro

Porro attractiones & impulsus eodem sensu acceleratrices & motrices nomino. Voces autem attractionis, impulsus, vel propensionis cujuscunque in centrum, indifferenter & pro se mutuo promiscue usurpo; has vires non physice sed mathematice tantum considerando. Unde caveat lector, ne per hujusmodi voces cogitet me speciem vel modum actionis causamve aut rationem physicam alicubi definire, vel centris (quæ sunt puncta mathematica) vires vere & physice tribuere; si forte aut centra trahere, aut vires centrorum esse dixero.

Scholium.

Hactenus voces minus notas, quo sensu in sequentibus accipiendæ sint, explicare visum est. Tempus, spatium, locus & motus, sunt omnibus notissima. Notandum tamen, quod vulgus quantitates hasce non aliter quam ex relatione ad sensibilia concipiat. Et inde oriuntur præjudicia quædam, quibus tollendis convenit easdem in absolutas & relativas, veras & apparentes, mathematicas & vulgares distingui.

I. Tempus absolutum, verum, & mathematicum, in se & natura sua sine relatione ad externum quodvis, æquabiliter fluit, alioque nomine dicitur duratio: Relativum, apparens, & vulgare est sensibilis & externa quævis durationis per motum mensura (seu accurata seu inæquabilis) qua vulgus vice veri temporis utitur; ut hora, dies, mensis, annus.

II. Spatium absolutum, natura sua sine relatione ad externum quodvis, semper manet similare & immobile: Relativum est spatii hujus mensura seu dimensio quælibet mobilis, quæ a sensibus nostris per situm suum ad corpora definitur, & a vulgo pro spatio immobili usurpatur: uti dimensio spatii subterranei, aërii vel cœlestis definita per situm suum ad terram. Idem sunt spatium absolutum & relativum, specie & magnitudine; sed non permanent idem semper numero. Nam si terra, verbi gratia, moveatur, spatium aëris nostri, quod relative & respectu terræ semper manet idem, nunc erit una pars spatii absoluti in quam aër transit, nunc alia pars ejus; & sic absolute mutabitur perpetuo.

III. Locus

III. Locus eſt pars ſpatii quam corpus occupat, eſtque pro ratione ſpatii vel abſolutus vel relativus. Pars, inquam, ſpatii; non ſitus corporis, vel ſuperficies ambiens. Nam ſolidorum æqualium æquales ſemper ſunt loci; Superficies autem ob diſſimilitudinem figurarum ut plurimum inæquales ſunt; Situs vero proprie loquendo quantitatem non habent, neque tam ſunt loca quam affectiones locorum. Motus totius idem eſt cum ſumma motuum partium; hoc eſt, tranſlatio totius de ſuo loco eadem eſt cum ſumma tranſlationum partium de locis ſuis; ideoque locus totius idem eſt cum ſumma locorum partium, & propterea internus & in corpore toto.

IV. Motus abſolutus eſt tranſlatio corporis de loco abſoluto in locum abſolutum, relativus de relativo in relativum. Sic in navi quæ velis paſſis fertur, relativus corporis locus eſt navigii regio illa in qua corpus verſatur, ſeu cavitatis totius pars illa quam corpus implet, quæque adeo movetur una cum navi: & quies relativa eſt permanſio corporis in eadem illa navis regione vel parte cavitatis. At quies vera eſt permanſio corporis in eadem parte ſpatii illius immoti, in qua navis ipſa una cum cavitate ſua & contentis univerſis movetur. Unde ſi terra vere quieſcat, corpus, quod relative quieſcit in navi, movebitur vere & abſolute ea cum velocitate, qua navis movetur in terra. Sin terra etiam moveatur; orietur verus & abſolutus corporis motus, partim ex terræ motu vero in ſpatio immoto, partim ex navis motu relativo in terra. Et ſi corpus etiam moveatur relative in navi; orietur verus ejus motus, partim ex vero motu terræ in ſpatio immoto, partim ex relativis motibus tum navis in terra tum corporis in navi: & ex his motibus relativis orietur corporis motus relativus in terra. Ut ſi terræ pars illa, ubi navis verſatur, moveatur vere in orientem cum velocitate partium 10010; & velis ventoque feratur navis in occidentem cum velocitate partium decem; nauta autem ambulet in navi orientem verſus cum velocitatis parte una: movebitur nauta vere & abſolute in ſpatio immoto cum velocitatis partibus 10001 in orientem, & relative in terra occidentem verſus cum velocitatis partibus novem.

Tempus abſolutum a relativo diſtinguitur in Aſtronomia per æquationem temporis vulgi. Inæquales enim ſunt dies naturales, qui vulgo tanquam æquales pro menſura temporis habentur. Hanc

inæqua-

DEFINITIONES. inæqualitatem corrigunt Aſtronomi, ut ex veriore tempore menſurent motus cœleſtes. Poſſibile eſt, ut nullus ſit motus æquabilis, quo tempus accurate menſuretur. Accelerari & retardari poſſunt motus omnes, ſed fluxus temporis abſoluti mutari nequit. Eadem eſt duratio ſeu perſeverantia exiſtentiæ rerum, ſive motus ſint celeres, ſive tardi, ſive nulli: proinde hæc a menſuris ſuis ſenſibilibus merito diſtinguitur, & ex iiſdem colligitur per æquationem aſtronomicam. Hujus autem æquationis in determinandis phænomenis neceſſitas, tum per experimentum horologii oſcillatorii, tum etiam per eclipſes ſatellitum Jovis evincitur.

Ut ordo partium temporis eſt immutabilis, ſic etiam ordo partium ſpatii. Moveantur hæ de locis ſuis, & movebuntur (ut ita dicam) de ſeipſis. Nam tempora & ſpatia ſunt ſui ipſorum & rerum omnium quaſi loca. In tempore quoad ordinem ſucceſſionis, in ſpatio quoad ordinem ſitus, locantur univerſa. De illorum eſſentia eſt ut ſint loca: & loca primaria moveri abſurdum eſt. Hæc ſunt igitur abſoluta loca; & ſolæ tranſlationes de his locis ſunt abſoluti motus.

Verum quoniam hæ ſpatii partes videri nequeunt, & ab invicem per ſenſus noſtros diſtingui; earum vice adhibemus menſuras ſenſibiles. Ex poſitionibus enim & diſtantiis rerum a corpore aliquo, quod ſpectamus ut immobile, definimus loca univerſa: deinde etiam & omnes motus æſtimamus cum reſpectu ad prædicta loca, quatenus corpora ab iiſdem transferri concipimus. Sic vice locorum & motuum abſolutorum relativis utimur; nec incommode in rebus humanis: in philoſophicis autem abſtrahendum eſt a ſenſibus. Fieri etenim poteſt, ut nullum revera quieſcat corpus, ad quod loca motuſque referantur.

Diſtinguuntur autem quies & motus abſoluti & relativi ab invicem per proprietates ſuas & cauſas & effectus. Quietis proprietas eſt, quod corpora vere quieſcentia quieſcunt inter ſe. Ideoque cum poſſibile ſit, ut corpus aliquod in regionibus fixarum, aut longe ultra, quieſcat abſolute; ſciri autem non poſſit ex ſitu corporum ad invicem in regionibus noſtris, horumne aliquod ad longinquum illud datam poſitionem ſervet necne; quies vera ex horum ſitu inter ſe definiri nequit.

Motus

Motus proprietas eſt, quod partes, quæ datas ſervant poſitiones ad tota, participant motus eorundem totorum. Nam gyrantium partes omnes conantur recedere ab axe motus, & progredientium impetus oritur ex conjuncto impetu partium ſingularum. Motis igitur corporibus ambientibus, moventur quæ in ambientibus relative quieſcunt. Et propterea motus verus & abſolutus definiri nequit per tranſlationem e vicinia corporum, quæ tanquam quieſcentia ſpectantur. Debent enim corpora externa non ſolum tanquam quieſcentia ſpectari, ſed etiam vere quieſcere. Alioquin incluſa omnia, præter tranſlationem e vicinia ambientium, participabunt etiam ambientium motus veros; & ſublata illa tranſlatione non vere quieſcent, ſed tanquam quieſcentia ſolummodo ſpectabuntur. Sunt enim ambientia ad incluſa, ut totius pars exterior ad partem interiorem, vel ut cortex ad nucleum. Moto autem cortice, nucleus etiam, ſine tranſlatione de vicinia corticis, ceu pars totius, movetur.

Præcedenti proprietati affinis eſt, quod moto loco movetur una locatum: ideoque corpus, quod de loco moto movetur, participat etiam loci ſui motum. Motus igitur omnes, qui de locis motis fiunt, ſunt partes ſolummodo motuum integrorum & abſolutorum: & motus omnis integer componitur ex motu corporis de loco ſuo primo, & motu loci hujus de loco ſuo, & ſic deinceps; uſque dum perveniatur ad locum immotum, ut in exemplo nautæ ſupra memorato. Unde motus integri & abſoluti non niſi per loca immota definiri poſſunt: & propterea hos ad loca immota, relativos ad mobilia ſupra retuli. Loca autem immota non ſunt, niſi quæ omnia ab infinito in infinitum datas ſervant poſitiones ad invicem; atque adeo ſemper manent immota, ſpatiumque conſtituunt quod immobile appello.

Cauſæ, quibus motus veri & relativi diſtinguuntur ab invicem, ſunt vires in corpora impreſſæ ad motum generandum. Motus verus nec generatur nec mutatur, niſi per vires in ipſum corpus motum impreſſas: at motus relativus generari & mutari poteſt ſine viribus impreſſis in hoc corpus. Sufficit enim ut imprimantur in alia ſolum corpora ad quæ fit relatio, ut iis cedentibus mutetur relatio illa, in qua hujus quies vel motus relativus conſiſtit. Rurſum motus verus a viribus in corpus motum impreſſis ſemper muta-

tur; at motus relativus ab his viribus non mutatur neceſſario. Nam ſi eædem vires in alia etiam corpora, ad quæ fit relatio, ſic imprimantur, ut ſitus relativus conſervetur, conſervabitur relatio in qua motus relativus conſiſtit. Mutari igitur poteſt motus omnis relativus, ubi verus conſervatur, & conſervari ubi verus mutatur; & propterea motus verus in ejuſmodi relationibus minime conſiſtit.

Effectus, quibus motus abſoluti & relativi diſtinguuntur ab invicem, ſunt vires recedendi ab axe motus circularis. Nam in motu circulari nude relativo hæ vires nullæ ſunt, in vero autem & abſoluto majores vel minores pro quantitate motus. Si pendeat ſitula a filo prælongo, agaturque perpetuo in orbem, donec filum a contorſione admodum rigeſcat, dein impleatur aqua, & una cum aqua quieſcat; tum vi aliqua ſubitanea agatur motu contrario in orbem, & filo ſe relaxante, diutius perſeveret in hoc motu; ſuperficies aquæ ſub initio plana erit, quemadmodum ante motum vaſis: At poſtquam vas, vi in aquam paulatim impreſſa, effecit ut hæc quoque ſenſibiliter revolvi incipiat; recedet ipſa paulatim a medio, aſcendetque ad latera vaſis, figuram concavam induens, (ut ipſe expertus ſum) & incitatiore ſemper motu aſcendet magis & magis, donec revolutiones in æqualibus cum vaſe temporibus peragendo, quieſcat in eodem relative. Indicat hic aſcenſus conatum recedendi ab axe motus, & per talem conatum innoteſcit & menſuratur motus aquæ circularis verus & abſolutus, motuique relativo hic omnino contrarius. Initio, ubi maximus erat aquæ motus relativus in vaſe, motus ille nullum excitabat conatum recedendi ab axe: aqua non petebat circumferentiam aſcendendo ad latera vaſis, ſed plana manebat, & propterea illius verus motus circularis nondum inceperat. Poſtea vero, ubi aquæ motus relativus decrevit, aſcenſus ejus ad latera vaſis indicabat conatum recedendi ab axe; atque hic conatus monſtrabat motum illius circularem verum perpetuo creſcentem, ac tandem maximum factum ubi aqua quieſcebat in vaſe relative. Quare conatus iſte non pendet a tranſlatione aquæ reſpectu corporum ambientium, & propterea motus circularis verus per tales tranſlationes definiri nequit. Unicus eſt corporis cujuſque revolventis motus vere circularis, conatui unico tanquam proprio & adæquato effectui reſpondens: motus autem relativi pro variis relationibus ad externa innumeri ſunt; & relationum inſtar,

inſtar, effectibus veris omnino deſtituuntur, niſi quatenus verum illum & unicum motum participant. Unde & in ſyſtemate eorum, qui cœlos noſtros infra cœlos fixarum in orbem revolvi volunt, & planetas ſecum deferre; ſingulæ cœlorum partes, & planetæ qui relative quidem in cœlis ſuis proximis quieſcunt, moventur vere. Mutant enim poſitiones ſuas ad invicem (ſecus quam fit in vere quieſcentibus) unaque cum cœlis delati participant eorum motus, & ut partes revolventium totorum, ab eorum axibus recedere conantur. DEFINITIONES.

Quantitates relativæ non ſunt igitur eæ ipſæ quantitates, quarum nomina præ ſe ferunt, ſed ſunt earum menſuræ illæ ſenſibiles (veræ an errantes) quibus vulgus loco quantitatum menſuratarum utitur. At ſi ex uſu definiendæ ſunt verborum ſignificationes; per nomina illa temporis, ſpatii, loci & motus proprie intelligendæ erunt hæ menſuræ ſenſibiles; & ſermo erit inſolens & pure mathematicus, ſi quantitates menſuratæ hic intelligantur. Proinde vim inferunt ſacris literis, qui voces haſce de quantitatibus menſuratis ibi interpretantur. Neque minus contaminant matheſin & philoſophiam, qui quantitates veras cum ipſarum relationibus & vulgaribus menſuris confundunt.

Motus quidem veros corporum ſingulorum cognoſcere, & ab apparentibus actu diſcriminare, difficillimum eſt; propterea quod partes ſpatii illius immobilis, in quo corpora vere moventur, non incurrunt in ſenſus. Cauſa tamen non eſt prorſus deſperata. Nam argumenta deſumi poſſunt, partim ex motibus apparentibus qui ſunt motuum verorum differentiæ, partim ex viribus quæ ſunt motuum verorum cauſæ & effectus. Ut ſi globi duo, ad datam ab invicem diſtantiam filo intercedente connexi, revolverentur circa commune gravitatis centrum; innoteſceret ex tenſione fili conatus globorum recedendi ab axe motus, & inde quantitas motus circularis computari poſſet. Deinde ſi vires quælibet æquales in alternas globorum facies ad motum circularem augendum vel minuendum ſimul imprimerentur, innoteſceret ex aucta vel diminuta fili tenſione augmentum vel decrementum motus; & inde tandem inveniri poſſent facies globorum in quas vires imprimi deberent, ut motus maxime augeretur; id eſt, facies poſticæ, ſive quæ in motu circulari ſequuntur. Cognitis autem faciebus quæ ſequuntur,

DEFINITIONES.

& faciebus oppositis quæ præcedunt, cognosceretur determinatio motus. In hunc modum inveniri posset & quantitas & determinatio motus hujus circularis in vacuo quovis immenso, ubi nihil extaret externum & sensibile quocum globi conferri possent. Si jam constituerentur in spatio illo corpora aliqua longinqua datam inter se positionem servantia, qualia sunt stellæ fixæ in regionibus cœlorum: sciri quidem non posset ex relativa globorum translatione inter corpora, utrum his an illis tribuendus esset motus. At si attenderetur ad filum, & deprehenderetur tensionem ejus illam ipsam esse quam motus globorum requireret; concludere liceret motum esse globorum, & corpora quiescere; & tum demum ex translatione globorum inter corpora, determinationem hujus motus colligere. Motus autem veros ex eorum causis, effectibus, & apparentibus differentiis colligere, & contra ex motibus seu veris seu apparentibus eorum causas & effectus, docebitur fusius in sequentibus. Hunc enim in finem tractatum sequentem composui.

AXIO-

AXIOMATA,

SIVE

LEGES MOTUS.

LEX I.

Corpus omne perſeverare in ſtatu ſuo quieſcendi vel movendi uniformiter in directum, niſi quatenus illud a viribus impreſſis cogitur ſtatum ſuum mutare.

PRojectilia perſeverant in motibus ſuis, niſi quatenus a reſiſtentia aëris retardantur, & vi gravitatis impelluntur deorſum. Trochus, cujus partes cohærendo perpetuo retrahunt ſeſe a motibus rectilineis, non ceſſat rotari, niſi quatenus ab aëre retardatur. Majora autem planetarum & cometarum corpora motus ſuos & progreſſivos & circulares in ſpatiis minus reſiſtentibus factos conſervant diutius.

LEX II.

Mutationem motus proportionalem eſſe vi motrici impreſſæ, & fieri ſecundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.

Si vis aliqua motum quemvis generet; dupla duplum, tripla triplum generabit, ſive ſimul & ſemel, ſive gradatim & ſucceſſive impreſſa fuerit. Et hic motus (quoniam in eandem ſemper plagam cum vi generatrice determinatur) ſi corpus antea movebatur, motui ejus vel conſpiranti additur, vel contrario ſubducitur, vel oblique oblique adjicitur, & cum eo ſecundum utriuſque determinationem componitur.

LEX

Leges Motus.

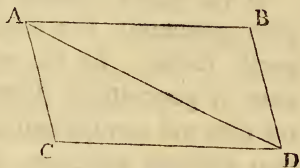
LEX III.

Actioni contrariam semper & æqualem esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse æquales & in partes contrarias dirigi.

Quicquid premit vel trahit alterum, tantundem ab eo premitur vel trahitur. Si quis lapidem digito premit, premitur & hujus digitus a lapide. Si equus lapidem funi alligatum trahit, retrahetur etiam & equus (ut ita dicam) æqualiter in lapidem: nam funis utrinque distentus eodem relaxandi se conatu urgebit equum versus lapidem, ac lapidem versus equum; tantumque impediet progressum unius quantum promovet progressum alterius. Si corpus aliquod in corpus aliud impingens, motum ejus vi sua quomodocunque mutaverit, idem quoque vicissim in motu proprio eandem mutationem in partem contrariam vi alterius (ob æqualitatem pressionis mutuæ) subibit. His actionibus æquales fiunt mutationes, non velocitatum, sed motuum; scilicet in corporibus non aliunde impeditis. Mutationes enim velocitatum, in contrarias itidem partes factæ, quia motus æqualiter mutantur, sunt corporibus reciproce proportionales. Obtinet etiam hæc lex in attractionibus, ut in scholio proximo probabitur.

COROLLARIUM I.

Corpus viribus conjunctis diagonalem parallelogrammi eodem tempore describere, quo latera separatis.



Si corpus dato tempore, vi sola *M* in loco *A* impressa, ferretur uniformi cum motu ab *A* ad *B*; & vi sola *N* in eodem loco impressa, ferretur ab *A* ad *C*: compleatur parallelogrammum *ABDC*, & vi utraque feretur corpus illud eodem tempore in diagonali ab *A* ad *D*. Nam quoniam vis *N* agit secundum lineam *AC* ipsi *BD* parallelam, hæc vis per legem II nihil mutabit

mutabit velocitatem accedendi ad lineam illam *BD* a vi altera genitam. Accedet igitur corpus eodem tempore ad lineam *BD*, sive vis *N* imprimatur, sive non; atque ideo in fine illius temporis reperietur alicubi in linea illa *BD*. Eodem argumento in fine temporis ejusdem reperietur alicubi in linea *CD*, & idcirco in utriusque lineæ concursu *D* reperiri necesse est. Perget autem motu rectilineo ab *A* ad *D* per legem I.

COROLLARIUM II.

Et hinc patet compositio vis directæ AD *ex viribus quibusvis obliquis* AB *&* BD, *& vicissim resolutio vis cujusvis directæ* AD *in obliquas quascunque* AB *&* BD. *Quæ quidem compositio & resolutio abunde confirmatur ex mechanica.*

A B C D

Ut si de rotæ alicujus centro *O* exeuntes radii inæquales *OM*, *ON* filis *MA*, *NP* sustineant pondera *A* & *P*, & quærantur vires ponderum ad movendam rotam: Per centrum *O* agatur recta *KOL* filis perpendiculariter occurrens in *K* & *L*, centroque *O* & intervallorum *OK*, *OL* majore *OL* describatur circulus occurrens filo *MA* in *D*: & actæ rectæ *OD* parallela sit *AC*, & perpendicularis *DC*. Quoniam nihil refert, utrum filorum puncta *K*, *L*, *D* affixa sint an non affixa ad planum rotæ; pondera idem valebunt, ac si suspenderentur a punctis *K* & *L* vel *D* & *L*. Ponderis autem *A* exponatur vis tota per lineam *AD*, & hæc resolvetur in vires *AC*, *CD*, quarum *AC* trahendo radium *OD* directe a centro nihil valet ad movendam rotam; vis autem altera *DC*, trahendo radium *DO* perpendiculariter, idem

H M N O K L D Q G p P C A

idem valet, ac ſi perpendiculariter traheret radium *O L* ipſi *O D* æqualem; hoc eſt, idem atque pondus *P*, ſi modo pondus illud ſit ad pondus *A* ut vis *D C* ad vim *D A*, id eſt (ob ſimilia triangula *ADC*, *DOK*,) ut *O K* ad *O D* ſeu *O L*. Pondera igitur *A* & *P*, quæ ſunt reciproce ut radii in directum poſiti *O K* & *O L*, idem pollebunt, & ſic conſiſtent in æquilibrio: quæ eſt proprietas notiſſima libræ, vectis, & axis in peritrochio. Sin pondus alterutrum ſit majus quam in hac ratione, erit vis ejus ad movendam rotam tanto major.

Quod ſi pondus *p* ponderi *P* æquale partim ſuſpendatur filo *Np*, partim incumbat plano obliquo *p G*: agantur *p H*, *N H*, prior horizonti, poſterior plano *p G* perpendicularis; & ſi vis ponderis *p* deorſum tendens, exponatur per lineam *p H*, reſolvi poteſt hæc in vires *p N*, *H N*. Si filo *p N* perpendiculare eſſet planum aliquod *p Q*, ſecans planum alterum *p G* in linea ad horizontem parallela; & pondus *p* his planis *p Q*, *p G* ſolummodo incumberet; urgeret illud hæc plana viribus *p N*, *H N*, perpendiculariter nimirum planum *p Q* vi *p N*, & planum *p G* vi *H N*. Ideoque ſi tollatur planum *p Q*, ut pondus tendat filum; quoniam filum ſuſtinendo pondus jam vicem præſtat plani ſublati, tendetur illud eadem vi *p N*, qua planum antea urgebatur. Unde tenſio fili hujus obliqui erit ad tenſionem fili alterius perpendicularis *P N*, ut *p N* ad *p H*, Ideoque ſi pondus *p* ſit ad pondus *A* in ratione, quæ componitur ex ratione reciproca minimarum diſtantiarum filorum ſuorum *p N*, *A M* a centro rotæ, & ratione directa *p H* ad *p N*; pondera idem valebunt ad rotam movendam, atque ideo ſe mutuo ſuſtinebunt, ut quilibet experiri poteſt.

Pondus autem *p*, planis illis duobus obliquis incumbens, rationem habet cunei inter corporis fiſſi facies internas: & inde vires cunei & mallei innoteſcunt: utpote cum vis qua pondus *p* urget planum *p Q* ſit ad vim, qua idem vel gravitate ſua vel ictu mallei impellitur

ſecundum

secundum lineam pH in plana, ut pN ad pH; atque ad vim, qua urget planum alterum pG, ut pN ad NH. Sed & vis cochleæ per similem virium divisionem colligitur; quippe quæ cuneus est a vecte impulsus. Usus igitur corollarii hujus latissime patet, & late patendo veritatem ejus evincit; cum pendeat ex jam dictis mechanica tota ab auctoribus diversimode demonstrata. Ex hisce enim facile derivantur vires machinarum, quæ ex rotis, tympanis, trochleis, vectibus, nervis tensis & ponderibus directe vel oblique ascendentibus, cæterisque potentiis mechanicis componi solent, ut & vires tendinum ad animalium ossa movenda.

COROLLARIUM III.

Quantitas motus quæ colligitur capiendo summam motuum factorum ad eandem partem, & differentiam factorum ad contrarias, non mutatur ab actione corporum inter se.

Etenim actio eique contraria reactio æquales sunt per legem III, ideoque per legem II æquales in motibus efficiunt mutationes versus contrarias partes. Ergo si motus fiunt ad eandem partem; quicquid additur motui corporis fugientis, subducetur motui corporis insequentis sic, ut summa maneat eadem quæ prius. Sin corpora obviam eant; æqualis erit subductio de motu utriusque, ideoque differentia motuum factorum in contrarias partes manebit eadem.

Ut si corpus sphæricum A sit triplo majus corpore sphærico B, habeatque duas velocitatis partes; & B sequatur in eadem recta cum velocitatis partibus decem, ideoque motus ipsius A sit ad motum ipsius B, ut sex ad decem: ponantur motus illis esse partium sex & partium decem, & summa erit partium sexdecim. In corporum igitur concursu, si corpus A lucretur motus partes tres vel quatuor vel quinque, corpus B amittet partes totidem, ideoque perget corpus A post reflexionem cum partibus novem vel decem vel undecim, & B cum partibus septem vel sex vel quinque, existente semper summa partium sexdecim ut prius. Si corpus A lucretur partes novem vel decem vel undecim vel duodecim, ideoque progrediatur post concursum cum partibus quindecim vel sexdecim vel septendecim vel octodecim; corpus B, amittendo tot partes quot A lucratur,

vel cum una parte progredietur amiſſis partibus novem, vel quieſcet amiſſo motu ſuo progreſſivo partium decem, vel cum una parte regredietur amiſſo motu ſuo & (ut ita dicam) una parte amplius, vel regredietur cum partibus duabus ob detractum motum progreſſivum partium duodecim. Atque ita ſummæ motuum conſpirantium 15+1 vel 16+0, & differentiæ contrariorum 17—1 & 18—2 ſemper erunt partium ſexdecim, ut ante concurſum & reflexionem. Cognitis autem motibus quibuſcum corpora poſt reflexionem pergent, invenietur cujuſque velocitas, ponendo eam eſſe ad velocitatem ante reflexionem, ut motus poſt eſt ad motum ante. Ut in caſu ultimo, ubi corporis *A* motus erat partium ſex ante reflexionem & partium octodecim poſtea, & velocitas partium duarum ante reflexionem; invenietur ejus velocitas partium ſex poſt reflexionem, dicendo, ut motus partes ſex ante reflexionem ad motus partes octodecim poſtea, ita velocitatis partes duæ ante reflexionem ad velocitatis partes ſex poſtea.

Quod ſi corpora vel non ſphærica vel diverſis in rectis moventia incidant in ſe mutuo oblique, & requirantur eorum motus poſt reflexionem; cognoſcendus eſt ſitus plani a quo corpora concurrentia tanguntur in puncto concurſus: dein corporis utriuſque motus (per Corol. II.) diſtinguendus eſt in duos, unum huic plano perpendicularem, alterum eidem parallelum: motus autem paralleli, propterea quod corpora agant in ſe invicem ſecundum lineam huic plano perpendicularem, retinendi ſunt iidem poſt reflexionem atque antea; & motibus perpendicularibus mutationes æquales in partes contrarias tribuendæ ſunt ſic, ut ſumma conſpirantium & differentia contrariorum maneat eadem quæ prius. Ex hujuſmodi reflexionibus oriri etiam ſolent motus circulares corporum circa centra propria. Sed hos caſus in ſequentibus non conſidero, & nimis longum eſſet omnia huc ſpectantia demonſtrare.

COROL-

COROLLARIUM IV.

Commune gravitatis centrum corporum duorum vel plurium, ab actionibus corporum inter se, non mutat statum suum vel motus vel quietis; & propterea corporum omnium in se mutuo agentium (exclusis actionibus & impedimentis externis) commune centrum gravitatis vel quiescit vel movetur uniformiter in directum.

Nam si puncta duo progrediantur uniformi cum motu in lineis rectis, & distantia eorum dividatur in ratione data, punctum dividens vel quiescit vel progreditur uniformiter in linea recta. Hoc postea in lemmate XXIII ejusque corollario demonstratur, si punctorum motus fiant in eodem plano; & eadem ratione demonstrari potest, si motus illi non fiant in eodem plano. Ergo si corpora quotcunque moventur uniformiter in lineis rectis, commune centrum gravitatis duorum quorumvis vel quiescit vel progreditur uniformiter in linea recta; propterea quod linea, horum corporum centra in rectis uniformiter progredientia jungens, dividitur ab hoc centro communi in ratione data. Similiter & commune centrum horum duorum & tertii cujusvis vel quiescit vel progreditur uniformiter in linea recta; propterea quod ab eo dividitur distantia centri communis corporum duorum & centri corporis tertii in data ratione. Eodem modo & commune centrum horum trium & quarti cujusvis vel quiescit vel progreditur uniformiter in linea recta; propterea quod ab eo dividitur distantia inter centrum commune trium & centrum quarti in data ratione, & sic in infinitum. Igitur in systemate corporum, quæ actionibus in se invicem aliisque omnibus in se extrinsecus impressis omnino vacant, ideoque moventur singula uniformiter in rectis singulis, commune omnium centrum gravitatis vel quiescit vel movetur uniformiter in directum.

Porro in systemate duorum corporum in se invicem agentium, cum distantiæ centrorum utriusque a communi gravitatis centro sint reciproce ut corpora; erunt motus relativi corporum eorundem, vel accedendi ad centrum illud vel ab eodem recedendi, æquales inter

 se.

ſe. Proinde centrum illud a motuum æqualibus mutationibus in partes contrarias factis, atque ideo ab actionibus horum corporum inter ſe, nec promovetur nec retardatur nec mutationem patitur in ſtatu ſuo quoad motum vel quietem. In ſyſtemate autem corporum plurium, quoniam duorum quorumvis in ſe mutuo agentium commune gravitatis centrum ob actionem illam nullatenus mutat ſtatum ſuum; & reliquorum, quibuſcum actio illa non intercedit, commune gravitatis centrum nihil inde patitur; diſtantia autem horum duorum centrorum dividitur a communi corporum omnium centro in partes ſummis totalibus corporum quorum ſunt centra reciproce proportionales; ideoque centris illis duobus ſtatum ſuum movendi vel quieſcendi ſervantibus, commune omnium centrum ſervat etiam ſtatum ſuum: manifeſtum eſt quod commune illud omnium centrum ob actiones binorum corporum inter ſe nunquam mutat ſtatum ſuum quoad motum & quietem. In tali autem ſyſtemate actiones omnes corporum inter ſe, vel inter bina ſunt corpora, vel ab actionibus inter bina compoſitæ; & propterea communi omnium centro mutationem in ſtatu motus ejus vel quietis nunquam inducunt. Quare cum centrum illud ubi corpora non agunt in ſe invicem, vel quieſcit, vel in recta aliqua progreditur uniformiter; perget idem, non obſtantibus corporum actionibus inter ſe, vel ſemper quieſcere, vel ſemper progredi uniformiter in directum; niſi a viribus in ſyſtema extrinſecus impreſſis deturbetur de hoc ſtatu. Eſt igitur ſyſtematis corporum plurium lex eadem, quæ corporis ſolitarii, quoad perſeverantiam in ſtatu motus vel quietis. Motus enim progreſſivus ſeu corporis ſolitarii ſeu ſyſtematis corporum ex motu centri gravitatis æſtimari ſemper debet.

COROLLARIUM V.

Corporum dato ſpatio incluſorum iidem ſunt motus inter ſe, ſive ſpatium illud quieſcat, ſive moveatur idem uniformiter in directum ſine motu circulari.

Nam differentiæ motuum tendentium ad eandem partem, & ſummæ tendentium ad contrarias, eædem ſunt ſub initio in utroque caſu (ex hypotheſi) & ex his ſummis vel differentiis oriuntur congreſſus

greſſus & impetus quibus corpora ſe mutuo feriunt. Ergo per legem II æquales erunt congreſſuum effectus in utroque caſu; & propterea manebunt motus inter ſe in uno caſu æquales motibus inter ſe in altero. Idem comprobatur experimento luculento. Motus omnes eodem modo ſe habent in navi, ſive ea quieſcat, ſive moveatur uniformiter in directum. LEGES MOTUS.

COROLLARIUM VI.

Si corpora moveantur quomodocunque inter ſe, & a viribus acceleratricibus æqualibus ſecundum lineas parallelas urgeantur; pergent omnia eodem modo moveri inter ſe, ac ſi viribus illis non eſſent incitata.

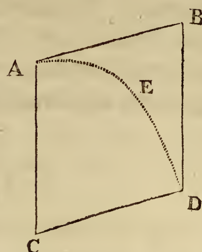
Nam vires illæ æqualiter (pro quantitatibus movendorum corporum) & ſecundum lineas parallelas agendo, corpora omnia æqualiter (quoad velocitatem) movebunt per legem II. ideoque nunquam mutabunt poſitiones & motus eorum inter ſe.

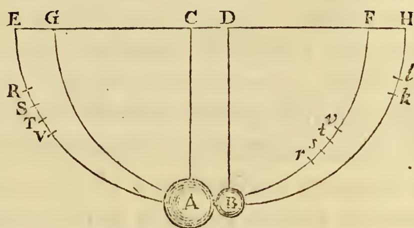
Scholium.

Hactenus principia tradidi a mathematicis recepta & experientia multiplici confirmata. Per leges duas primas & corollaria duo prima *Galilæus* invenit deſcenſum gravium eſſe in duplicata ratione temporis, & motum projectilium fieri in parabola; conſpirante experientia, niſi quatenus motus illi per aëris reſiſtentiam aliquantulum retardantur. Corpore cadente gravitas uniformis, ſingulis temporis particulis æqualibus æqualiter agendo imprimit vires æquales in corpus illud, & velocitates æquales generat: & tempore toto vim totam imprimit & velocitatem totam generat tempori proportionalem. Et ſpatia temporibus proportionalibus deſcripta, ſunt ut velocitates & tempora conjunctim; id eſt in duplicata ratione temporum. Et corpore ſurſum projecto gravitas uniformis vires imprimit & velocitates aufert temporibus proportionales; ac tempora aſcendendi ad altitudines ſummas ſunt ut velocitates auferendæ, & altitudines illæ ſunt ut velocitates ac tempora conjunctim, ſeu in duplicata ratione velocitatum.

AXIOMATA, SIVE

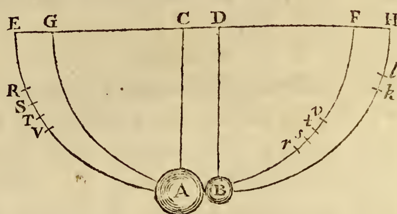
velocitatum. Et corporis ſecundum rectam quamvis projecti motus a projectione oriundus cum motu a gravitate oriundo componitur. Ut ſi corpus *A* motu ſolo projectionis dato tempore deſcribere poſſet rectam *AB* & motu ſolo cadendi eodem tempore deſcribere poſſet altitudinem *AC:* compleatur parallelogrammum *ABDC*, & corpus illud motu compoſito reperietur in fine temporis in loco *D*; & curva linea *AED*, quam corpus illud deſcribet, erit parabola quam recta *AB* tangit in *A*, & cujus ordinata *BD* eſt ut *ABq*. Ab iiſdem legibus & corollariis pendent demonſtrata de temporibus oſcillantium pendulorum, ſuffragante horologiorum experientia quotidiana. Ex his iiſdem & lege tertia *Chriſtophorus Wrennus* eques auratus, *Johannes Walliſius S.T.D.* & *Chriſtianus Hugenius*, ætatis ſuperioris geometrarum facile principes, regulas congreſſuum & reflexionum durorum corporum ſeorſim invenerunt, & eodem fere tempore cum *Societate Regia* communicarunt, inter ſe (quoad has leges) omnino conſpirantes: & primus quidem *Walliſius*, deinde *Wrennus* & *Hugenius* inventum prodiderunt. Sed & veritas comprobata eſt a *Wrenno* coram *Regia Societate* per experimentum pendulorum: quod etiam *Clariſſimus Mariottus* libro integro exponere mox dignatus eſt. Verum, ut hoc experimentum cum theoriis ad amuſſim congruat, habenda eſt ratio, cum reſiſtentiæ aëris, tum etiam vis elaſticæ concurrentium corporum. Pendeant corpora ſphærica *A*, *B* filis parallelis & æqualibus *AC*, *BD*, a centris *C*, *D*. His centris & intervallis deſcribantur ſemicirculi *EAF*, *GBH* radiis *CA*, *DB* biſecti. Trahatur corpus *A* ad arcus *EAF* punctum quodvis *R*, & (ſubducto corpore *B*) demittatur inde, redeatque poſt unam oſcillationem ad punctum *V*. Eſt *RV* retardatio ex reſiſtentia aeris. Hujus *RV* fiat *ST* pars quarta ſita in medio, ita ſcilicet ut *RS* & *TV* æquentur, ſitque *RS* ad *ST* ut 3 ad 2. Et iſta *ST* exhibebit retardationem in deſcenſu ab *S* ad *A* quam





A quam proxime. Reſtituatur corpus *B* in locum ſuum. Cadat corpus *A* de puncto *S*, & velocitas ejus in loco reflexionis *A* ſine errore ſenſibili tanta erit, ac ſi in vacuo cecidiſſet de loco *T*. Exponatur igitur hæc velocitas per chordam arcus *TA*. Nam velocitatem penduli in puncto infimo eſſe ut chordam arcus, quem cadendo deſcripſit, propoſitio eſt geometris notiſſima. Poſt reflexionem perveniat corpus *A* ad locum *s*, & corpus *B* ad locum *k*. Tollatur corpus *B* & inveniatur locus *v*; a quo ſi corpus *A* demittatur & poſt unam oſcillationem redeat ad locum *r*, ſit *s t* pars quarta ipſius *r v* ſita in medio, ita videlicet ut *r s* & *t v* æquentur; & per chordam arcus *t A* exponatur velocitas, quam corpus *A* proxime poſt reflexionem habuit in loco *A*. Nam *t* erit locus ille verus & correctus, ad quem corpus *A*, ſublata aeris reſiſtentia, aſcendere debuiſſet. Simili methodo corrigendus erit locus *k*, ad quem corpus *B* aſcendit, & inveniendus locus *l*, ad quem corpus illud aſcendere debuiſſet in vacuo. Hoc pacto experiri licet omnia, perinde ac ſi in vacuo conſtituti eſſemus. Tandem ducendum erit corpus *A* (ut ita dicam) in chordam arcus *TA*, quæ velocitatem ejus exhibet, ut habeatur motus ejus in loco *A* proxime ante reflexionem; deinde in chordam arcus *t A*, ut habeatur motus ejus in loco *A* proxime poſt reflexionem. Et ſic corpus *B* ducendum erit in chordam arcus *B l*, ut habeatur motus ejus proxime poſt reflexionem. Et ſimili methodo, ubi corpora duo ſimul demittuntur de locis diverſis, inveniendi ſunt motus utriuſque tam ante, quam poſt reflexionem; & tum demum conferendi ſunt motus inter ſe & colligendi effectus reflexionis. Hoc modo in pendulis pedum decem rem tentando, idque in corporibus tam inæqualibus quam æqualibus, & faciendo ut corpora de intervallis ampliſſimis, puta pedum octo vel duodecim vel ſexdecim, concurrerent; reperi ſemper ſine errore trium digitorum in menſuris, ubi corpora ſibi mutuo directe occurrebant, æquales eſſe mutationes motuum corporibus in partes contrarias illatæ, atque ideo actionem & reactionem ſemper eſſe æquales. Ut ſi corpus *A* incidebat in corpus *B* quieſcens cum novem partibus motus, & amiſſis ſeptem partibus pergebat poſt reflexionem cum duabus; corpus *B* reſiliebat cum partibus iſtis ſeptem. Si corpora obviam ibant, *A* cum duodecim partibus & *B* cum ſex, & redibat *A* cum duabus; redibat *B* cum octo, facta detractione partium quatuordecim utrinque. De motu ipſius *A* ſubducantur partes duodecim

AXIOMATA, SIVE decim & reſtabit nihil: ſubducantur aliæ partes duæ, & fiet motus duarum partium in plagam contrariam: & ſic de motu corporis *B* partium ſex ſubducendo partes quatuordecim, fient partes octo in plagam contrariam. Quod ſi corpora ibant ad eandem plagam, *A* velocius cum partibus quatuordecim, & *B* tardius cum partibus quinque, & poſt reflexionem pergebat *A* cum quinque partibus; pergebat *B* cum quatuordecim, facta tranſlatione partium novem de *A* in *B*. Et ſic in reliquis. A congreſſu & colliſione corporum nunquam mutabatur quantitas motus, quæ ex ſumma motuum conſpirantium & differentia contrariorum colligebatur. Nam errorem digiti unius & alterius in menſuris tribuerim difficultati peragendi ſingula ſatis accurate. Difficile erat, tum pendula ſimul demittere ſic, ut corpora in ſe mutuo impingerent in loco infimo *AB*; tum loca *s*, *k* notare, ad quæ corpora aſcendebant poſt concurſum. Sed & in ipſis corporibus pendulis inæqualis partium denſitas, & textura aliis de cauſis irregularis, errores inducebant.



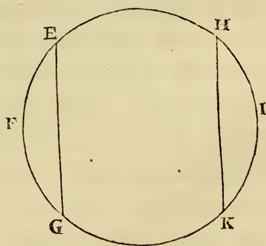
Porro nequis objiciat regulam, ad quam probandam inventum eſt hoc experimentum, præſupponere corpora vel abſolute dura eſſe, vel ſaltem perfecte elaſtica, cujuſmodi nulla reperiuntur in compoſitionibus naturalibus; addo quod experimenta jam deſcripta ſuccedunt in corporibus mollibus æque ac in duris, nimirum a conditione duritiei neutiquam pendentia. Nam ſi regula illa in corporibus non perfecte duris tentanda eſt, debebit ſolummodo reflexio minui in certa proportione pro quantitate vis elaſticæ. In theoria *Wrenni* & *Hugenii* corpora abſolute dura redeunt ab invicem cum velocitate congreſſus. Certius id affirmabitur de perfecte elaſticis. In imperfecte elaſticis velocitas reditus minuenda eſt ſimul cum vi elaſtica; propterea quod vis illa, (niſi ubi partes corporum ex congreſſu læduntur, vel extenſionem aliqualem quaſi ſub malleo patiuntur,) certa ac determinata ſit (quantum ſentio) faciatque ut corpora redeant ab invicem cum velocitate relativa, quæ ſit ad relativam velocitatem concurſus in data ratione. Id in pilis ex

lana

lana arcte conglomerata & fortiter constricta sic tentavi. Primum demittendo pendula & mensurando reflexionem, inveni quantitatem vis elasticæ; deinde per hanc vim determinavi reflexiones in aliis casibus concursuum, & respondebant experimenta. Redibant semper pilæ ab invicem cum velocitate relativa, quæ esset ad velocitatem relativam concursus ut 5 ad 9 circiter. Eadem fere cum velocitate redibant pilæ ex chalybe: aliæ ex subere cum paulo minore: in vitreis autem proportio erat 15 ad 16 circiter. Atque hoc pacto lex tertia quoad ictus & reflexiones per theoriam comprobata est, quæ cum experientia plane congruit.

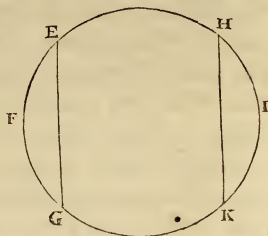
In attractionibus rem sic breviter ostendo. Corporibus duobus quibusvis *A*, *B* se mutuo trahentibus, concipe obstaculum quodvis interponi, quo congressus eorum impediatur. Si corpus alterutrum *A* magis trahitur versus corpus alterum *B*, quam illud alterum *B* in prius *A*, obstaculum magis urgebitur pressione corporis *A* quam pressione corporis *B*; proindeque non manebit in æquilibrio. Prævalebit pressio fortior, facietque ut systema corporum duorum & obstaculi moveatur in directum in partes versus *B*, motuque in spatiis liberis semper accelerato abeat in infinitum. Quod est absurdum & legi primæ contrarium. Nam per legem primam debebit systema perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, proindeque corpora æqualiter urgebunt obstaculum, & idcirco æqualiter trahentur in invicem. Tentavi hoc in magnete & ferro. Si hæc in vasculis propriis sese contingentibus seorsim posita, in aqua stagnante juxta fluitent; neutrum propellet alterum, sed æqualitate attractionis utrinque sustinebunt conatus in se mutuos, ac tandem in æquilibrio constituta quiescent.

Sic etiam gravitas inter terram & ejus partes mutua est. Secetur terra *F I* plano quovis *E G* in partes duas *EGF* & *EGI*: & æqualia erunt harum pondera in se mutuo. Nam si plano alio *H K* quod priori *E G* parallelum sit, pars major *EGI* secetur in partes duas *EGKH* & *HKI*, quarum *HKI* æqualis sit parti prius abscissæ *E F G*: manifestum est quod pars media *EGKH* pondere proprio in neutram partium extremarum propendebit, sed inter utramque in æqui-



AXIOMATA, SIVE

æquilibrio, ut ita dicam, suspendetur, & quiescet. Pars autem extrema *HKI* toto suo pondere incumbet in partem mediam, & urgebit illam in partem alteram extremam *EGF*; ideoque vis qua partium *HKI* & *EGKH* summa *EGI* tendit versus partem tertiam *EGF*, æqualis est ponderi partis *HKI*, id est ponderi partis tertiæ *EGF*. Et propterea pondera partium duarum *EGI*, *EGF* in se mutuo sunt æqualia, uti volui ostendere. Et nisi pondera illa æqualia essent, terra tota in libero æthere fluitans ponderi majori cederet, & ab eo fugiendo abiret in infinitum.



Ut corpora in concursu & reflexione idem pollent, quorum velocitates sunt reciproce ut vires insitæ: sic in movendis instrumentis mechanicis agentia idem pollent & conatibus contrariis se mutuo sustinent, quorum velocitates secundum determinationem virium æstimatæ, sunt reciproce ut vires. Sic pondera æquipollent ad movenda brachia libræ, quæ oscillante libra sunt reciproce ut eorum velocitates sursum & deorsum: hoc est, pondera, si recta ascendunt & descendunt, æquipollent, quæ sunt reciproce ut punctorum a quibus suspenduntur distantiæ ab axe libræ; sin planis obliquis aliisve admotis obstaculis impedita ascendunt vel descendunt oblique, æquipollent, quæ sunt reciproce ut ascensus & descensus, quatenus facti secundum perpendiculum: idque ob determinationem gravitatis deorsum. Similiter in trochlea seu polyspasto vis manus funem directe trahentis, quæ sit ad pondus vel directe vel oblique ascendens ut velocitas ascensus perpendicularis ad velocitatem manus funem trahentis, sustinebit pondus. In horologiis & similibus instrumentis, quæ ex rotulis commissis constructa sunt, vires contrariæ ad motum rotularum promovendum & impediendum, si sunt reciproce ut velocitates partium rotularum in quas imprimuntur, sustinebunt se mutuo. Vis cochleæ ad premendum corpus est ad vim manus manubrium circumagentis, ut circularis velocitas manubrii ea in parte ubi a manu urgetur, ad velocitatem progressivam cochleæ versus corpus pressum. Vires quibus Cuneus urget partes duas ligni fissi sunt ad vim mallei in cuneum, ut progressus cunei secundum determinationem vis a malleo in ipsum impressæ,

impressæ, ad velocitatem qua partes ligni cedunt cuneo, secundum lineas faciebus cunei perpendiculares. Et par est ratio machinarum omnium. LEGES MOTUS.

Harum efficacia & usus in eo solo consistit, ut diminuendo velocitatem augeamus vim, & contra: Unde solvitur in omni aptorum instrumentorum genere problema, *Datum pondus data vi movendi*, aliamve datam resistentiam vi data superandi. Nam si machinæ ita formentur, ut velocitates agentis & resistentis sint reciproce ut vires; agens resistentiam sustinebit: & majori cum velocitatum disparitate eandem vincet. Certe si tanta sit velocitatum disparitas, ut vincatur etiam resistentia omnis, quæ tam ex contiguorum & inter se labentium corporum attritione, quam ex continuorum & ab invicem separandorum cohæsione & elevandorum ponderibus oriri solet; superata omni ea resistentia, vis redundans accelerationem motus sibi proportionalem, partim in partibus machinæ, partim in corpore resistente producet. Cæterum mechanicam tractare non est hujus instituti. Hisce volui tantum ostendere, quam late pateat quamque certa sit lex tertia motus. Nam si æstimetur agentis actio ex ejus vi & velocitate conjunctim; & similiter resistentis reactio æstimetur conjunctim ex ejus partium singularum velocitatibus & viribus resistendi ab earum attritione, cohæsione, pondere, & acceleratione oriundis; erunt actio & reactio, in omni instrumentorum usu, sibi invicem semper æquales. Et quatenus actio propagatur per instrumentum & ultimo imprimitur in corpus omne resistens, ejus ultima determinatio determinationi reactionis semper erit contraria.

DE MOTU CORPORUM LIBER PRIMUS.

SECTIO I.

De methodo rationum primarum & ultimarum, cujus ope sequentia demonstrantur.

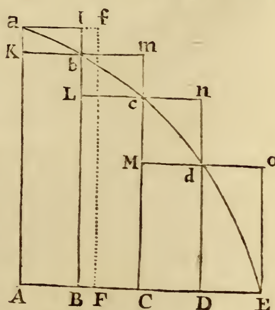
LEMMA I.

Quantitates, ut & quantitatum rationes, quæ ad æqualitatem tempore quovis finito constanter tendunt, & ante finem temporis illius propius ad invicem accedunt quam pro data quavis differentia, fiunt ultimo æquales.

Si negas; fiant ultimo inæquales, & sit earum ultima differentia *D*. Ergo nequeunt propius ad æqualitatem accedere quam pro data differentia *D*: contra hypothesin.

LEMMA II.

Si in figura quavis AacE, *rectis* Aa, AE *&* *curva* acE *comprehensa, inscribantur parallelogramma quotcunque* Ab, Bc, Cd, &c. *sub basibus* AB, BC, CD, &c. *æqualibus, & lateribus* Bb, Cc, Dd, &c. *figuræ lateri* Aa *parallelis contenta; & compleantur parallelogramma* aKbl, bLcm, cMdn, &c. *Dein horum parallelogrammorum latitudo minuatur, & numerus augeatur in infinitum: dico quod ultimæ rationes quas habent ad se invicem figura inscripta* AKbLcMdD, *circumscripta*



ſcripta AalbmcndoE, *& curvilinea* AabcdE, *ſunt rationes æqualitatis.* Liber Primus.

Nam figuræ inſcriptæ & circumſcriptæ differentia eſt ſumma parallelogrammorum *Kl*, *Lm*, *Mn*, *Do*, hoc eſt (ob æquales omnium baſes) rectangulum ſub unius baſi *Kb* & altitudinum ſumma *Aa*, id eſt, rectangulum *ABla*. Sed hoc rectangulum, eo quod latitudo ejus *AB* in infinitum minuitur, fit minus quovis dato. Ergo (per lemma 1) figura inſcripta & circumſcripta & multo magis figura curvilinea intermedia fiunt ultimo æquales. *Q. E. D.*

LEMMA III.

Eædem rationes ultimæ ſunt etiam rationes æqualitatis, ubi parallelogrammorum latitudines AB, BC, CD, &c. *ſunt inæquales, & omnes minuuntur in infinitum.*

Sit enim *AF* æqualis latitudini maximæ, & compleatur parallelogrammum *FAaf*. Hoc erit majus quam differentia figuræ inſcriptæ & figuræ circumſcriptæ; at latitudine ſua *AF* in infinitum diminuta, minus fiet dato quovis rectangulo. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc ſumma ultima parallelogrammorum evaneſcentium coincidit omni ex parte cum figura curvilinea.

Corol. 2. Et multo magis figura rectilinea, quæ chordis evaneſcentium arcuum *ab*, *bc*, *cd*, &c. comprehenditur, coincidit ultimo cum figura curvilinea.

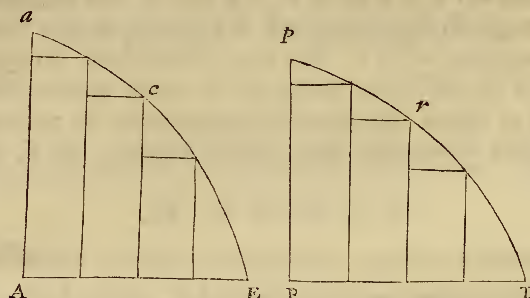
Corol. 3. Ut & figura rectilinea circumſcripta quæ tangentibus eorundem arcuum comprehenditur.

Corol. 4. Et propterea hæ figuræ ultimæ (quoad perimetros *acE*,) non ſunt rectilineæ, ſed rectilinearum limites curvilinei.

LEMMA IV.

Si in duabus figuris AacE, PprT, *inſcribantur (ut ſupra) duæ parallelogrammorum ſeries, ſitque idem amborum numerus, & ubi latitudines in infinitum diminuuntur, rationes ultimæ parallelogrammorum in una figura ad parallelogramma*

gramma in altera, ſingulorum ad ſingula, ſint eædem; dico quod figuræ duæ AacE, PprT, *ſunt ad invicem in eadem illa ratione.*



Etenim ut ſunt parallelogramma ſingula ad ſingula, ita (componendo) fit ſumma omnium ad ſummam omnium, & ita figura ad figuram; exiſtente nimirum figura priore (per lemma III) ad ſummam priorem, & figura poſteriore ad ſummam poſteriorem in ratione æqualitatis. *Q. E. D.*

Corol. Hinc ſi duæ cujuſcunque generis quantitates in eundem partium numerum utcunque dividantur; & partes illæ, ubi numerus earum augetur & magnitudo diminuitur in infinitum, datam obtineant rationem ad invicem, prima ad primam, ſecunda ad ſecundam, cæteræque ſuo ordine ad cæteras: erunt tota ad invicem in eadem illa data ratione. Nam ſi in lemmatis hujus figuris ſumantur parallelogramma inter ſe ut partes, ſummæ partium ſemper erunt ut ſummæ parallelogrammorum; atque ideo, ubi partium & parallelogrammorum numerus augetur & magnitudo diminuitur in infinitum, in ultima ratione parallelogrammi ad parallelogrammum, id eſt (per hypotheſin) in ultima ratione partis ad partem.

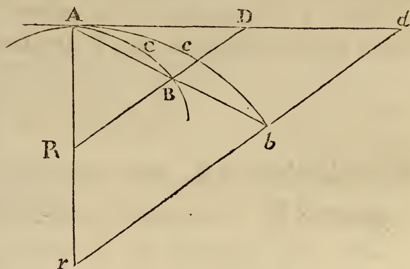
LEMMA V.

Similium figurarum latera omnia, quæ ſibi mutuo reſpondent, ſunt proportionalia, tam curvilinea quam rectilinea; & areæ ſunt in duplicata ratione laterum.

LEMMA

LEMMA VI.

Si arcus quilibet positione datus ACB *subtendatur chorda* AB, *& in puncto aliquo* A, *in medio curvaturæ continuæ, tangatur a recta utrinque producta* AD; *dein puncta* A, B *ad invicem accedant & coëant; dico quod angulus* BAD, *sub chorda & tangente contentus, minuetur in infinitum & ultimo evanescet.*



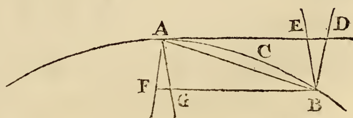
Nam si angulus ille non evanescit, continebit arcus *ACB* cum tangente *AD* angulum rectilineo æqualem, & propterea curvatura ad punctum *A* non erit continua, contra hypothesin.

LEMMA VII.

Iisdem positis; dico quod ultima ratio arcus, chordæ, & tangentis ad invicem est ratio æqualitatis.

Nam dum punctum *B* ad punctum *A* accedit, intelligantur semper *AB* & *AD* ad puncta longinqua *b* ac *d* produci, & secanti *BD* parallela agatur *bd*. Sitque arcus *Acb* semper similis arcui *ACB*. Et punctis *A*, *B* coeuntibus, angulus *dAb*, per lemma superius, evanescet; ideoque rectæ semper finitæ *Ab*, *Ad*, & arcus intermedius *Acb* coincident, & propterea æquales erunt. Unde & hisce semper proportionales rectæ *AB*, *AD*, & arcus intermedius *ACB* evanescent, & rationem ultimam habebunt æqualitatis. *Q. E. D.*

Corol. 1. Unde si per *B* ducatur tangenti parallela *BF*, rectam quamvis *AF* per *A* transeuntem perpetuo secans in *F*, hæc *BF* ultimo ad arcum evanescentem *ACB* rationem habebit æqualitatis, eo quod completo parallelogrammo *AFBD* rationem semper habet æqualitatis ad *AD*.



Corol.

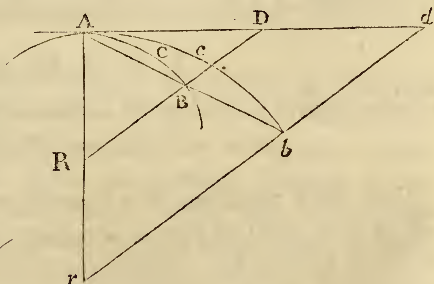
Corol. 2. Et si per *B* & *A* ducantur plures rectæ *BE*, *BD*, *AF*, *AG*, secantes tangentem *AD* & ipsius parallelam *BF*; ratio ultima abscissarum omnium *AD*, *AE*, *BF*, *BG*, chordæque & arcus *AB* ad invicem erit ratio æqualitatis.

Corol. 3. Et propterea hæ omnes lineæ, in omni de rationibus ultimis argumentatione, pro se invicem usurpari possunt.

LEMMA VIII.

Si rectæ datæ AR, BR *cum arcu* ACB, *chorda* AB *& tangente* AD, *triangula tria* RAB, RACB, RAD *constituunt, dein puncta* A, B *accedunt ad invicem: dico quod ultima forma triangulorum evanescentium est similitudinis, & ultima ratio æqualitatis.*

Nam dum punctum *B* ad punctum *A* accedit, intelligantur semper *AB*, *AD*, *AR* ad puncta longinqua *b*, *d* & *r* produci, ipsique *RD* parallela agi *rbd*, & arcui *ACB* similis semper sit arcus *Acb*. Et coeuntibus punctis *A*, *B*, angulus *bAd* evanescet, & propterea triangula tria semper finita *rAb*, *rAcb*, *rAd* coincident, suntque eo nomine similia & æqualia. Unde & hisce semper similia & proportionalia *RAB*, *RACB*, *RAD* fient ultimo sibi invicem similia & æqualia. *Q. E. D.*



Corol. Et hinc triangula illa, in omni de rationibus ultimis argumentatione, pro se invicem usurpari possunt.

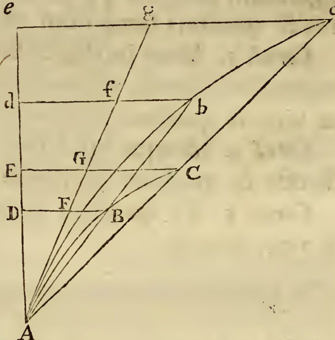
LEMMA IX.

Si recta AE *& curva* ABC *positione datæ se mutuo secent in angulo dato* A, *& ad rectam illam in alio dato angulo ordinatim*

natim

natim applicentur BD, CE, *curvæ occurrentes in* B, C, *dein puncta* B, C *simul accedant ad punctum* A: *dico quod areæ triangulorum* ABD, ACE *erunt ultimo ad invicem in duplicata ratione laterum.*

Etenim dum puncta *B*, *C* accedunt ad punctum *A*, intelligatur semper *AD* produci ad puncta longinqua *d* & *e*, ut sint *Ad*, *Ae* ipsis *AD*, *AE* proportionales, & erigantur ordinatæ *db*, *ec* ordinatis *DB*, *EC* parallelæ quæ occurrant ipsis *AB*, *AC* productis in *b* & *c*. Duci intelligatur, tum curva *Abc* ipsi *ABC* similis, tum recta *Ag*, quæ tangat curvam utramque in *A*, & secet ordinatim applicatas *DB*, *EC*, *db*, *ec* in *F*, *G*, *f*, *g*. Tum manente longitudine *Ae* coeant puncta *B*, *C* cum puncto *A*; & angulo *cAg* evanescente, coincident areæ curvilineæ *Abd*, *Ace* cum rectilineis *Afd*, *Age*; ideoque (per lemma v.) erunt in duplicata ratione laterum *Ad*, *Ae*: Sed his areis proportionales semper sunt areæ *ABD*, *ACE*, & his lateribus latera *AD*, *AE*. Ergo & areæ *ABD*, *ACE* sunt ultimo in duplicata ratione laterum *AD*, *AE*. *Q. E. D.*



LEMMA X.

Spatia quæ corpus urgente quacunque vi finita describit, sive vis illa determinata & immutabilis sit, sive eadem continuo augeatur vel continuo diminuatur, sunt ipso motus initio in duplicata ratione temporum.

Exponantur tempora per lineas *AD*, *AE*, & velocitates genitæ per ordinatas *DB*, *EC*; & spatia his velocitatibus descripta, erunt ut areæ *ABD*, *ACE* his ordinatis descriptæ, hoc est, ipso motus initio (per lemma IX) in duplicata ratione temporum *AD*, *AE*. *Q. E. D.*

Corol. 1. Et hinc facile colligitur, quod corporum ſimiles ſimilium figurarum partes temporibus proportionalibus deſcribentium errores, qui viribus quibuſvis æqualibus ad corpora ſimiliter applicatis generantur, & menſurantur per diſtantias corporum a figurarum ſimilium locis illis, ad quæ corpora eadem temporibus iiſdem proportionalibus ſine viribus iſtis pervenirent, ſunt ut quadrata temporum in quibus generantur quam proxime.

Corol. 2. Errores autem qui viribus proportionalibus ad ſimiles figurarum ſimilium partes ſimiliter applicatis generantur, ſunt ut vires & quadrata temporum conjunctim.

Corol. 3. Idem intelligendum eſt de ſpatiis quibuſvis quæ corpora urgentibus diverſis viribus deſcribunt. Hæc ſunt, ipſo motus initio, ut vires & quadrata temporum conjunctim.

Corol. 4. Ideoque vires ſunt ut ſpatia, ipſo motus initio, deſcripta directe & quadrata temporum inverſe.

Corol. 5. Et quadrata temporum ſunt ut deſcripta ſpatia directe & vires inverſe.

Scholium.

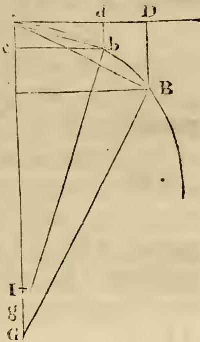
Si quantitates indeterminatæ diverſorum generum conferantur inter ſe, & earum aliqua dicatur eſſe ut eſt alia quævis directe vel inverſe: ſenſus eſt, quod prior augetur vel diminuitur in eadem ratione cum poſteriore, vel cum ejus reciproca. Et ſi earum aliqua dicatur eſſe ut ſunt aliæ duæ vel plures directe vel inverſe: ſenſus eſt, quod prima augetur vel diminuitur in ratione quæ componitur ex rationibus in quibus aliæ vel aliarum reciprocæ augentur vel diminuuntur. Ut ſi A dicatur eſſe ut B directe & C directe & D inverſe: ſenſus eſt, quod A augetur vel diminuitur in eadem ratione cum $B \times C \times \frac{1}{D}$ hoc eſt, quod A & $\frac{BC}{D}$ ſunt ad invicem in ratione data.

LEMMA XI.

Subtenſa evaneſcens anguli contactus, in curvis omnibus curvaturam finitam ad punctum contactus habentibus, eſt ultimo in ratione duplicata ſubtenſæ arcus contermini.

Caſ.

Cas. 1. Sit arcus ille *AB*, tangens ejus *AD*, subtensa anguli contactus ad tangentem perpendicularis *BD*, subtensa arcus *AB*. Huic subtensæ *AB* & tangenti *AD* perpendiculares erigantur *AG*, *BG*, concurrentes in *G*; dein accedant puncta *D*, *B*, *G*, ad puncta *d*, *b*, *g*, sitque *J* intersectio linearum *BG*, *AG* ultimo facta ubi puncta *D*, *B* accedunt usque ad *A*. Manifestum est quod distantia *GJ* minor esse potest quam assignata quævis. Est autem (ex natura circulorum per puncta *ABG*, *Abg* transeuntium) *AB quad.* æquale *AG* × *BD*, & *Ab quad.* æquale *Ag* × *bd*; ideoque ratio *AB quad.* ad *Ab quad.* componitur ex rationibus *AG* ad *Ag* & *BD* ad *bd*. Sed quoniam *GJ* assumi potest minor longitudine quavis assignata, fieri potest ut ratio *AG* ad *Ag* minus differat a ratione æqualitatis quam pro differentia quavis assignata, ideoque ut ratio *AB quad.* ad *Ab quad.* minus differat a ratione *BD* ad *bd* quam pro differentia quavis assignata. Est ergo, per lemma 1, ratio ultima *AB quad.* ad *Ab quad.* eadem cum ratione ultima *BD* ad *bd*. *Q. E. D.*



Cas. 2. Inclinetur jam *BD* ad *AD* in angulo quovis dato, & eadem semper erit ratio ultima *BD* ad *bd* quæ prius, ideoque eadem ac *AB quad.* ad *Ab quad.* *Q. E. D.*

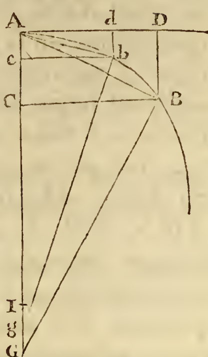
Cas. 3. Et quamvis angulus *D* non detur, sed recta *BD* ad datum punctum convergat, vel alia quacunque lege constituatur; tamen anguli *D*, *d* communi lege constituti ad æqualitatem semper vergent & propius accedent ad invicem quam pro differentia quavis assignata, ideoque ultimo æquales erunt, per lem. 1, & propterea lineæ *BD*, *bd* sunt in eadem ratione ad invicem ac prius. *Q. E. D.*

Corol. 1. Unde cum tangentes *AD*, *Ad*, arcus *AB*, *Ab*, & eorum sinus *BC*, *bc* fiant ultimo chordis *AB*, *Ab* æquales; erunt etiam illorum quadrata ultimo ut subtensæ *BD*, *bd*.

Corol. 2. Eorundem quadrata sunt etiam ultimo ut sunt arcuum sagittæ, quæ chordas bisecant & ad datum punctum convergunt. Nam sagittæ illæ sunt ut subtensæ *BD*, *bd*.

Corol. 3. Ideoque sagitta est in duplicata ratione temporis quo corpus data velocitate describit arcum.

Corol. 4. Triangula rectilinea *ADB*, *Adb* sunt ultimo in triplicata ratione laterum *AD*, *Ad*, inque sesquiplicata laterum *DB*, *db*; utpote in composita ratione laterum *AD* & *DB*, *Ad* & *db* existentia. Sic & triangula *ABC*, *Abc* sunt ultimo in triplicata ratione laterum *BC*, *bc*. Rationem vero sesquiplicatam voco triplicatæ subduplicatam, quæ nempe ex simplici & subduplicata componitur.



Corol. 5. Et quoniam *DB*, *db* sunt ultimo parallelæ & in duplicata ratione ipsarum *AD*, *Ad*: erunt areæ ultimæ curvilineæ *ADB*, *Adb* (ex natura parabolæ) duæ tertiæ partes triangulorum rectilineorum *ADB*, *Adb*; & segmenta *AB*, *Ab* partes tertiæ eorundem triangulorum. Et inde hæ areæ & hæc segmenta erunt in triplicata ratione tum tangentium *AD*, *Ad*; tum chordarum & arcuum *AB*, *Ab*.

Scholium.

Cæterum in his omnibus supponimus angulum contactus nec infinite majorem esse angulis contactuum, quos circuli continent cum tangentibus suis, nec iisdem infinite minorem; hoc est, curvaturam ad punctum *A*, nec infinite parvam esse nec infinite magnam, seu intervallum *AJ* finitæ esse magnitudinis. Capi enim potest *DB* ut AD^3: quo in casu circulus nullus per punctum *A* inter tangentem *AD* & curvam *AB* duci potest, proindeque angulus contactus erit infinite minor circularibus. Et simili argumento si fiat *DB* successive ut AD^4, AD^5, AD^6, AD^7, &c. habebitur series angulorum contactus pergens in infinitum, quorum quilibet posterior est infinite minor priore. Et si fiat *DB* successive ut AD^2, $AD^{\frac{3}{2}}$, $AD^{\frac{4}{3}}$, $AD^{\frac{5}{4}}$, $AD^{\frac{6}{5}}$, $AD^{\frac{7}{6}}$, &c. habebitur alia series infinita angulorum contactus, quorum primus est ejusdem generis cum circularibus, secundus infinite major, & quilibet posterior infinite major priore. Sed & inter duos quosvis ex his angulis potest series utrinque in infinitum pergens angulorum intermediorum inseri, quorum quilibet posterior erit infinite major minorve priore. Ut si inter terminos AD^2 & AD^3 inseratur series $AD^{\frac{13}{6}}$, $AD^{\frac{11}{5}}$, $AD^{\frac{9}{4}}$,

$AD^{\frac{7}{3}}$, $AD^{\frac{5}{2}}$, $AD^{\frac{8}{3}}$, $AD^{\frac{11}{4}}$, $AD^{\frac{14}{5}}$, $AD^{\frac{17}{6}}$, &c. Et rursus inter binos quosvis angulos hujus seriei inseri potest series nova angulorum intermediorum ab invicem infinitis intervallis differentium. Neque novit natura limitem.

Quæ de curvis lineis deque superficiebus comprehensis demonstrata sunt, facile applicantur ad solidorum superficies curvas & contenta. Præmisi vero hæc lemmata, ut effugerem tædium deducendi longas demonstrationes, more veterum geometrarum, ad absurdum. Contractiores enim redduntur demonstrationes per methodum indivisibilium. Sed quoniam durior est indivisibilium hypothesis, & propterea methodus illa minus geometrica censetur; malui demonstrationes rerum sequentium ad ultimas quantitatum evanescentium summas & rationes, primasque nascentium, id est, ad limites summarum & rationum deducere; & propterea limitum illorum demonstrationes qua potui brevitate præmittere. His enim idem præstatur quod per methodum indivisibilium; & principiis demonstratis jam tutius utemur. Proinde in sequentibus, siquando quantitates tanquam ex particulis constantes consideravero, vel si pro rectis usurpavero lineolas curvas; nolim indivisibilia, sed evanescentia divisibilia, non summas & rationes partium determinatarum, sed summarum & rationum limites semper intelligi; vimque talium demonstrationum ad methodum præcedentium lemmatum semper revocari.

Objectio est, quod quantitatum evanescentium nulla sit ultima proportio; quippe quæ, antequam evanuerunt, non est ultima, ubi evanuerunt, nulla est. Sed & eodem argumento æque contendi posset nullam esse corporis ad certum locum, ubi motus finiatur, pervenientis velocitatem ultimam: hanc enim, antequam corpus attingit locum, non esse ultimam, ubi attingit, nullam esse. Et responsio facilis est: Per velocitatem ultimam intelligi eam, qua corpus movetur, neque antequam attingit locum ultimum & motus cessat, neque postea, sed tunc cum attingit; id est, illam ipsam velocitatem quacum corpus attingit locum ultimum & quacum motus cessat. Et similiter per ultimam rationem quantitatum evanescentium, intelligendam esse rationem quantitatum, non antequam evanescunt, non postea, sed quacum evanescunt. Pariter & ratio prima nascentium est ratio quacum nascuntur. Et summa prima & ultima

est

est quacum esse (vel augeri aut minui) incipiunt & cessant. Extat limes quem velocitas in fine motus attingere potest, non autem transgredi. Hæc est velocitas ultima. Et par est ratio limitis quantitatum & proportionum omnium incipientium & cessantium. Cumque hic limes sit certus & definitus, problema est vere geometricum eundem determinare. Geometrica vero omnia in aliis geometricis determinandis ac demonstrandis legitime usurpantur.

Contendi etiam potest, quod si dentur ultimæ quantitatum evanescentium rationes, dabuntur & ultimæ magnitudines: & sic quantitas omnis constabit ex indivisibilibus, contra quam *Euclides* de incommensurabilibus, in libro decimo elementorum, demonstravit. Verum hæc objectio falsæ innititur hypothesi. Ultimæ rationes illæ quibuscum quantitates evanescunt, revera non sunt rationes quantitatum ultimarum, sed limites ad quos quantitatum sine limite decrescentium rationes semper appropinquant; & quas propius assequi possunt quam pro data quavis differentia, nunquam vero transgredi, neque prius attingere quam quantitates diminuuntur in infinitum. Res clarius intelligetur in infinite magnis. Si quantitates duæ quarum data est differentia augeantur in infinitum, dabitur harum ultima ratio, nimirum ratio æqualitatis, nec tamen ideo dabuntur quantitates ultimæ seu maximæ quarum ista est ratio. In sequentibus, igitur siquando facili rerum conceptui consulens dixero quantitates quam minimas, vel evanescentes, vel ultimas; cave intelligas quantitates magnitudine determinatas, sed cogita semper diminuendas sine limite.

SECTIO II.

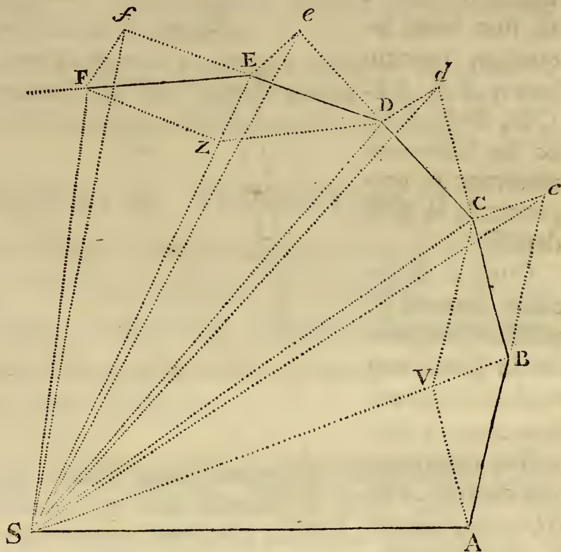
De inventione virium centripetarum.

PROPOSITIO I. THEOREMA I.

Areas, quas corpora in gyros acta radiis ad immobile centrum virium ductis describunt, & in planis immobilibus consistere, & esse temporibus proportionales.

Dividatur tempus in partes æquales, & prima temporis parte describat corpus vi insita rectam *AB*. Idem secunda temporis parte, si nil

nil impediret, recta pergeret ad *c*, (per leg. I.) describens lineam *Bc* æqualem ipsi *AB*; adeo ut radiis *AS*, *BS*, *cS* ad centrum actis, confectæ forent æquales areæ *ASB*, *BSc*. Verum ubi corpus venit ad *B*, agat vis centripeta impulsu unico sed magno, efficiatque ut corpus de recta *Bc* declinet & pergat in recta *BC*. Ipsi *BS* parallela agatur *cC*, occurrens *BC* in *C*; & completa secunda temporis parte, corpus (per legum corol. I.) reperietur in *C*, in eodem plano cum triangulo *ASB*. Junge *SC*; & triangulum *SBC*, ob

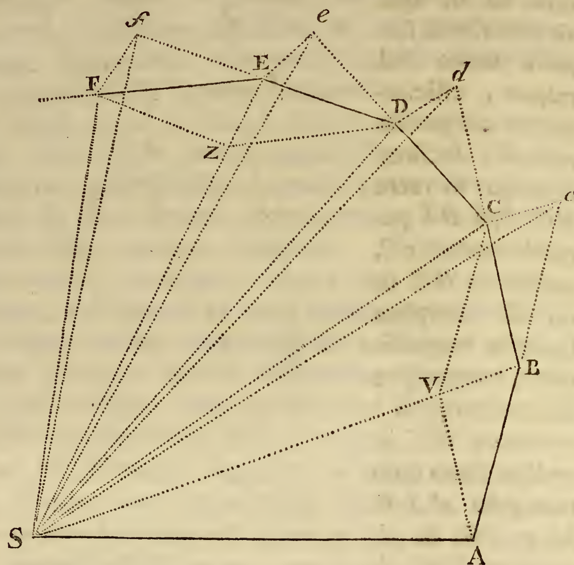


parallelas *SB*, *Cc*, æquale erit triangulo *SBc*, atque ideo etiam triangulo *SAB*. Simili argumento si vis centripeta successive agat in *C*, *D*, *E*, &c. faciens ut corpus singulis temporis particulis singulas describat rectas *CD*, *DE*, *EF*, &c. jacebunt hæ omnes in eodem plano; & triangulum *SCD* triangulo *SBC*, & *SDE* ipsi *SCD*, & *SEF* ipsi *SDE* æquale erit. Æqualibus igitur temporibus æquales areæ in plano immoto describuntur: & componendo, sunt arearum summæ quævis *SADS*, *SAFS* inter se, ut sunt tempora descriptionum. Augeatur jam numerus & minuatur latitudo triangulorum in infinitum; & eorum ultima perimeter *ADF*, (per corollarium quartum lemmatis tertii) erit linea curva: ideoque vis centripeta, qua corpus a tangente hujus curvæ perpetuo retrahitur, aget indesinenter; areæ vero quævis descriptæ *SADS*, *SAFS* temporibus descriptionum semper proportionales, erunt iisdem temporibus in hoc casu proportionales. *Q. E. D.*

Corol.

De Motu Corporum

Corol. 1. Velocitas corporis in centrum immobile attracti est in spatiis non resistentibus reciproce ut perpendiculum a centro illo in orbis tangentem rectilineam demissum. Est enim velocitas in locis illis *A, B, C, D, E*, ut sunt bases æqualium triangulorum *AB, BC, CD, DE, EF*; & hæ bases sunt reciproce ut perpendicula in ipsas demissa.



Corol. 2. Si arcuum duorum æqualibus temporibus in spatiis non resistentibus ab eodem corpore successive descriptorum chordæ *AB, BC* compleantur in parallelogrammum *ABCV*, & hujus diagonalis *BV* in ea positione quam ultimo habet ubi arcus illi in infinitum diminuuntur, producatur utrinque; transibit eadem per centrum virium.

Corol. 3. Si arcuum æqualibus temporibus in spatiis non resistentibus descriptorum chordæ *AB, BC* ac *DE, EF* compleantur in parallelogramma *ABCV, DEFZ*; vires in *B* & *E* sunt ad invicem in ultima ratione diagonalium *BV, EZ*, ubi arcus isti in infinitum diminuuntur. Nam corporis motus *BC* & *EF* componuntur (per legum corol. 1.) ex motibus *Bc, BV* & *Ef, EZ*: atqui *BV* & *EZ*, ipsis *Cc* & *Ff* æquales, in demonstratione propositionis hujus generabantur ab impulsibus vis centripetæ in *B* & *E*, ideoque sunt his impulsibus proportionales.

Corol. 4. Vires quibus corpora quælibet in spatiis non resistentibus a motibus rectilineis retrahuntur ac detorquentur in orbes curvos sunt inter se ut arcuum æqualibus temporibus descriptorum sagittæ illæ quæ convergunt ad centrum virium, & chordas bisecant ubi

ubi arcus illi in infinitum diminuuntur. Nam hæ ſagittæ ſunt ſemiſſes diagonalium, de quibus egimus in corollario tertio.

Corol. 5. Ideoque vires eædem ſunt ad vim gravitatis, ut hæ ſagittæ ad ſagittas horizonti perpendiculares arcuum parabolicorum, quos projectilia eodem tempore deſcribunt.

Corol. 6. Eadem omnia obtinent per legum corol. v. ubi plana, in quibus corpora moventur, una cum centris virium, quæ in ipſis ſita ſunt, non quieſcunt, ſed moventur uniformiter in directum.

PROPOSITIO II. THEOREMA II.

Corpus omne, quod movetur in linea aliqua curva in plano deſcripta, & radio ducto ad punctum vel immobile, vel motu rectilineo uniformiter progrediens, deſcribit areas circa punctum illud temporibus proportionales, urgetur a vi centripeta tendente ad idem punctum.

Caſ. 1. Nam corpus omne, quod movetur in linea curva, detorquetur de curſu rectilineo per vim aliquam in ipſum agentem (per leg. I.) Et vis illa, qua corpus de curſu rectilineo detorquetur, & cogitur triangula quam minima SAB, SBC, SCD, &c. circa punctum immobile S temporibus æqualibus æqualia deſcribere, agit in loco B ſecundum lineam parallelam ipſi cC (per prop. XL. lib. I. elem. & leg. II.) hoc eſt, ſecundum lineam BS; & in loco C ſecundum lineam ipſi dD parallelam, hoc eſt, ſecundum lineam SC, &c. Agit ergo ſemper ſecundum lineas tendentes ad punctum illud immobile S. *Q. E. D.*

Caſ. 2. Et, per legum corollarium quintum, perinde eſt, ſive quieſcat ſuperficies, in qua corpus deſcribit figuram curvilineam, ſive moveatur eadem una cum corpore, figura deſcripta, & puncto ſuo S uniformiter in directum.

Corol. 1. In ſpatiis vel mediis non reſiſtentibus, ſi areæ non ſunt temporibus proportionales, vires non tendunt ad concurſum radiorum; ſed inde declinant in conſequentia, ſeu verſus plagam in quam fit motus, ſi modo arearum deſcriptio acceleratur: ſin retardatur, declinant in antecedentia.

Corol. 2. In mediis etiam resistentibus, si arearum descriptio acceleratur, virium directiones declinant a concursu radiorum versus plagam, in quam fit motus.

Scholium.

Urgeri potest corpus a vi centripeta composita ex pluribus viribus. In hoc casu sensus propositionis est, quod vis illa quæ ex omnibus componitur, tendit ad punctum *S*. Porro si vis aliqua agat perpetuo secundum lineam superficiei descriptæ perpendicularem; hæc faciet ut corpus deflectatur a plano sui motus: sed quantitatem superficiei descriptæ nec augebit nec minuet, & propterea in compositione virium negligenda est.

PROPOSITIO III. THEOREMA III.

Corpus omne, quod radio ad centrum corporis alterius utcunque moti ducto describit areas circa centrum illud temporibus proportionales, urgetur vi composita ex vi centripeta tendente ad corpus illud alterum, & ex vi omni acceleratrice qua corpus illud alterum urgetur.

Sit corpus primum *L*, & corpus alterum *T*: & (per legum corol. vi.) si vi nova, quæ æqualis & contraria sit illi, qua corpus alterum *T* urgetur, urgeatur corpus utrumque secundum lineas parallelas; perget corpus primum *L* describere circa corpus alterum *T* areas easdem ac prius: vis autem, qua corpus alterum *T* urgebatur, jam destruetur per vim sibi æqualem & contrariam; & propterea (per leg. 1.) corpus illud alterum *T* sibimet ipsi jam relictum vel quiescet, vel movebitur uniformiter in directum: & corpus primum *L* urgente differentia virium, id est, urgente vi reliqua perget areas temporibus proportionales circa corpus alterum *T* describere. Tendit igitur (per theor. 11.) differentia virium ad corpus illud alterum *T* ut centrum. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc si corpus unum *L* radio ad alterum *T* ducto describit areas temporibus proportionales; atque de vi tota (sive simplici, sive ex viribus pluribus juxta legum corollarium secundum composita,)

composita) qua corpus prius *L* urgetur, subducatur (per idem legum corollarium) vis tota acceleratrix, qua corpus alterum urgetur: vis omnis reliqua, qua corpus prius urgetur, tendet ad corpus alterum *T* ut centrum.

Corol. 2. Et, si areæ illæ sunt temporibus quamproxime proportionales, vis reliqua tendet ad corpus alterum *T* quamproxime.

Corol. 3. Et vice versa, si vis reliqua tendit quamproxime ad corpus alterum *T*, erunt areæ illæ temporibus quamproxime proportionales.

Corol. 4. Si corpus *L* radio ad alterum corpus *T* ducto describit areas, quæ cum temporibus collatæ sunt valde inæquales; & corpus illud alterum *T* vel quiescit, vel movetur uniformiter in directum: actio vis centripetæ ad corpus illud alterum *T* tendentis vel nulla est, vel miscetur & componitur cum actionibus admodum potentibus aliarum virium: visque tota ex omnibus, si plures sunt vires, composita ad aliud (sive immobile sive mobile) centrum dirigitur. Idem obtinet, ubi corpus alterum motu quocunque movetur; si modo vis centripeta sumatur, quæ restat post subductionem vis totius in corpus illud alterum *T* agentis.

Scholium.

Quoniam æquabilis arearum descriptio index est centri, quod vis illa respicit, qua corpus maxime afficitur, quaque retrahitur a motu rectilineo, & in orbita sua retinetur; quidni usurpemus in sequentibus æquabilem arearum descriptionem ut indicem centri, circum quod motus omnis circularis in spatiis liberis peragitur?

PROPOSITIO IV. THEOREMA IV.

Corporum, quæ diversos circulos æquabili motu describunt, vires centripetas ad centra eorundem circulorum tendere; & esse inter se, ut sunt arcuum simul descriptorum quadrata applicata ad circulorum radios.

Tendunt hæ vires ad centra circulorum per prop. II. & corol. 2. prop. I. & sunt inter se ut arcuum æqualibus temporibus quam minimis

 nimis

nimis deſcriptorum ſinus verſi per corol. 4. prop. 1. hoc eſt, ut quadrata arcuum eorundem ad diametros circulorum applicata per lem. vii. & propterea, cum hi arcus ſint ut arcus temporibus quibuſvis æqualibus deſcripti, & diametri ſint ut eorum radii; vires erunt ut arcuum quorumvis ſimul deſcriptorum quadrata applicata ad radios circulorum. *Q. E. D.*

Corol. 1. Cum arcus illi ſint ut velocitates corporum, vires centripetæ erunt in ratione compoſita ex duplicata ratione velocitatum directe, & ratione ſimplici radiorum inverſe.

Corol. 2. Et, cum tempora periodica ſint in ratione compoſita ex ratione radiorum directe, & ratione velocitatum inverſe; vires centripetæ ſunt in ratione compoſita ex ratione radiorum directe, & ratione duplicata temporum periodicorum inverſe.

Corol. 3. Unde ſi tempora periodica æquentur, & propterea velocitates ſint ut radii; erunt etiam vires centripetæ ut radii: & contra.

Corol. 4. Si & tempora periodica, & velocitates ſint in ratione ſubduplicata radiorum; æquales erunt vires centripetæ inter ſe: & contra.

Corol. 5. Si tempora periodica ſint ut radii, & propterea velocitates æquales; vires centripetæ erunt reciproce ut radii: & contra.

Corol. 6. Si tempora periodica ſint in ratione ſeſquiplicata radiorum, & propterea velocitates reciproce in radiorum ratione ſubduplicata; vires centripetæ erunt reciproce ut quadrata radiorum: & contra.

Corol. 7. Et univerſaliter, ſi tempus periodicum ſit ut radii R poteſtas quælibet R^n, & propterea velocitas reciproce ut radii poteſtas R^{n-1}; erit vis centripeta reciproce ut radii poteſtas R^{2n-1}: & contra.

Corol. 8. Eadem omnia de temporibus, velocitatibus, & viribus, quibus corpora ſimiles figurarum quarumcunque ſimilium, centraque in figuris illis ſimiliter poſita habentium, partes deſcribunt, conſequuntur ex demonſtratione præcedentium ad hoſce caſus applicata. Applicatur autem ſubſtituendo æquabilem arearum deſcriptionem pro æquabili motu, & diſtantias corporum a centris pro radiis uſurpando.

Corol. 9. Ex eadem demonſtratione conſequitur etiam; quod arcus, quem corpus in circulo data vi centripeta uniformiter revol-

vendo

vendo tempore quovis defcribit, medius eft proportionalis inter diametrum circuli, & defcenfum corporis eadem data vi eodemque tempore cadendo confectum.

Scholium.

Cafus corollarii fexti obtinet in corporibus cœleftibus, (ut feorfum collegerunt etiam noftrates *Wrennus*, *Hookius* & *Hallæus*) & propterea quæ fpectant ad vim centripetam decrefcentem in duplicata ratione diftantiarum a centris, decrevi fufius in fequentibus exponere.

Porro præcedentis propofitionis & corollariorum ejus beneficio, colligitur etiam proportio vis centripetæ ad vim quamlibet notam, qualis eft ea gravitatis. Nam fi corpus in circulo terræ concentrico vi gravitatis fuæ revolvatur, hæc gravitas eft ipfius vis centripeta. Datur autem ex defcenfu gravium & tempus revolutionis unius, & arcus dato quovis tempore defcriptus, per hujus corol. ix. Et hujufmodi propofitionibus *Hugenius* in eximio fuo tractatu *de Horologio Ofcillatorio* vim gravitatis cum revolventium viribus centrifugis contulit.

Demonftrari etiam poffunt præcedentia in hunc modum. In circulo quovis defcribi intelligatur polygonum laterum quotcunque. Et fi corpus in polygoni lateribus data cum velocitate movendo ad ejus angulos fingulos a circulo reflectatur; vis, qua fingulis reflexionibus impingit in circulum, erit ut ejus velocitas: ideoque fumma virium in dato tempore erit ut velocitas illa, & numerus reflexionum conjunctim: hoc eft (fi polygonum detur fpecie) ut longitudo dato illo tempore defcripta, & aucta vel diminuta in ratione longitudinis ejufdem ad circuli prædicti radium; id eft, ut quadratum longitudinis illius applicatum ad radium: ideoque, fi polygonum lateribus infinite diminutis coincidat cum circulo, ut quadratum arcus dato tempore defcripti applicatum ad radium. Hæc eft vis centrifuga, qua corpus urget circulum; & huic æqualis eft vis contraria, qua circulus continuo repellit corpus centrum verfus.

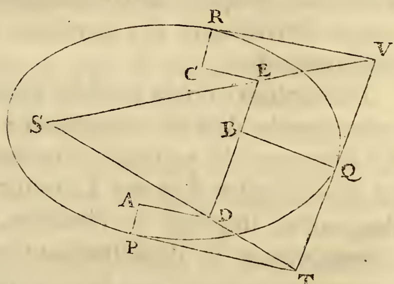
PROPOSITIO

PROPOSITIO V. PROBLEMA I.

Data quibuscunque in locis velocitate, qua corpus figuram datam viribus ad commune aliquod centrum tendentibus describit, centrum illud invenire.

Figuram descriptam tangant rectæ tres *PT*, *TQV*, *VR* in punctis totidem *P*, *Q*, *R*, concurrentes in *T* & *V*. Ad tangentes erigantur perpendicula *PA*, *QB*, *RC* velocitatibus corporis in punctis illis *P*, *Q*, *R*, a quibus eriguntur, reciproce proportionalia; id est, ita ut sit *PA* ad *QB* ut velocitas in *Q* ad velocitatem in *P*, & *QB* ad *RC* ut velocitas in *R* ad velocitatem in *Q*. Per perpendiculorum terminos *A*, *B*, *C* ad angulos rectos ducantur *AD*, *DBE*, *EC* concurrentes in *D* & *E*: Et actæ *TD*, *VE* concurrent in centro quæsito *S*.

Nam perpendicula a centro *S* in tangentes *PT*, *QT* demissa (per corol. 1. prop. 1.) sunt reciproce ut velocitates corporis in punctis *P* & *Q*; ideoque per constructionem ut perpendicula *AP*, *BQ* directe, id est ut perpendicula a puncto *D* in tangentes demissa. Unde facile colligitur quod puncta *S*, *D*, *T* sunt in una recta. Et simili argumento puncta *S*, *E*, *V* sunt etiam in una recta; & propterea centrum *S* in concursu rectarum *TD*, *VE* versatur. *Q. E. D.*



PROPOSITIO VI. THEOREMA V.

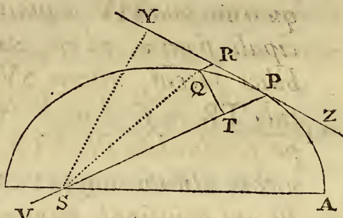
Si corpus in spatio non resistente circa centrum immobile in orbe quocunque revolvatur, & arcum quemvis jamjam nascentem tempore quam minimo describat, & sagitta arcus duci intelligatur, quæ chordam bisecet, & producta transeat

per

per centrum virium: erit vis centripeta in medio arcus, ut sagitta directe & tempus bis inverse.

Nam sagitta dato tempore est ut vis (per corol. 4. prop. 1.) & augendo tempus in ratione quavis, ob auctum arcum in eadem ratione sagitta augetur in ratione illa duplicata (per corol. 2 & 3, lem. xi.) ideoque est ut vis semel & tempus bis. Subducatur duplicata ratio temporis utrinque, & fiet vis ut sagitta directe & tempus bis inverse. *Q. E. D.*

Idem facile demonstratur etiam per corol. 4. lem. x.



Corol. 1. Si corpus P revolvendo circa centrum S describat lineam curvam APQ; tangat vero recta ZPR curvam illam in puncto quovis P, & ad tangentem ab alio quovis curvæ puncto Q agatur QR distantiæ SP parallela, ac demittatur QT perpendicularis ad distantiam illam SP: vis centripeta erit reciproce ut solidum $\frac{SP\ quad. \times QT\ quad.}{QR}$; si modo solidi illius ea semper sumatur quantitas, quæ ultimo fit, ubi coeunt puncta P & Q. Nam QR æqualis est sagittæ dupli arcus QP, in cujus medio est P, & duplum trianguli SQP sive $SP \times QT$, tempori, quo arcus iste duplus describitur, proportionale est; ideoque pro temporis exponente scribi potest.

Corol. 2. Eodem argumento vis centripeta est reciproce ut solidum $\frac{SYq \times QPq}{QR}$, si modo SY perpendiculum sit a centro virium in orbis tangentem PR demissum. Nam rectangula $SY \times QP$ & $SP \times QT$ æquantur.

Corol. 3. Si orbis vel circulus est, vel circulum concentrice tangit, aut concentrice secat, id est, angulum contactus aut sectionis cum circulo quam minimum continet, eandem habens curvaturam eundemque radium curvaturæ ad punctum P; & si PV chorda sit circuli hujus a corpore per centrum virium acta: erit vis centripeta reciproce ut solidum $SYq \times PV$. Nam PV est $\frac{QPq}{QR}$.

Corol.

De Motu Corporum.

Corol. 4. Iisdem positis, est vis centripeta ut velocitas bis directe, & chorda illa inverse. Nam velocitas est reciproce ut perpendiculum *SY* per corol. 1. prop. 1.

Corol. 5. Hinc si detur figura quævis curvilinea *APQ*, & in ea detur etiam punctum *S*, ad quod vis centripeta perpetuo dirigitur, inveniri potest lex vis centripetæ, qua corpus quodvis *P* a cursu rectilineo perpetuo retractum in figuræ illius perimetro detinebitur, eamque revolvendo describet. Nimirum computandum est vel solidum $\frac{SPq \times QTq}{QR}$ vel solidum $SYq \times PV$ huic vi reciproce proportionale. Ejus rei dabimus exempla in problematis sequentibus.

PROPOSITIO VII. PROBLEMA II.

Gyretur corpus in circumferentia circuli, requiritur lex vis centripetæ tendentis ad punctum quodcunque datum.

Esto circuli circumferentia *VQPA*; punctum datum, ad quod vis ceu ad centrum suum tendit, *S*; corpus in circumferentia latum *P*; locus proximus, in quem movebitur *Q*; & circuli tangens ad locum priorem *PRZ*. Per punctum *S* ducatur chorda *PV*; & acta circuli diametro *VA*, jungatur *AP*; & ad *SP* demittatur perpendiculum *QT*, quod productum occurrat tangenti *PR* in *Z*; ac denique per punctum *Q* agatur *LR*, quæ ipsi *SP* parallella sit, & occurrat tum circulo in *L*, tum tangenti *PZ* in *R*. Et ob similia triangula *ZQR*, *ZTP*, *VPA*; erit *RP quad.* hoc est *QRL* ad

QT quad.

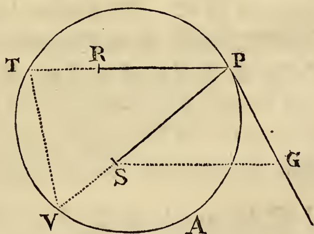
QT *quad.* ut AV *quad.* ad PV *quad.* Ideoque $\frac{QRL \times PV\ quad.}{AV\ quad.}$ æquatur QT *quad.* Ducantur hæc æqualia in $\frac{SP\ quad.}{QR}$, & punctis P & Q coeuntibus scribatur PV pro RL. Sic fiet $\frac{SP\ quad. \times PV\ cub.}{AV\ quad.}$ æquale $\frac{SP\ quad. \times QT\ quad.}{QR}$. Ergo (per corol. 1. & 5. prop. VI.) vis centripeta est reciproce ut $\frac{SPq \times PV\ cub.}{AV\ quad.}$; id est (ob datum AV *quad.*) reciproce ut quadratum distantiæ seu altitudinis SP & cubus chordæ PV conjunctim. *Q. E. I.*

Idem aliter.

Ad tangentem PR productam demittatur perpendiculum SY: & ob similia triangula SYP, VPA; erit AV ad PV ut SP ad SY: ideoque $\frac{SP \times PV}{AV}$ æquale SY, & $\frac{SP\ quad. \times PV\ cub.}{AV\ quad.}$ æquale $SY\ quad. \times PV$. Et propterea (per. corol. 3. & 5. prop. VI.) vis centripeta est reciproce ut $\frac{SPq \times PV\ cub.}{AVq}$, hoc est, ob datam AV reciproce ut $SPq \times PV\ cub.$ *Q. E. I.*

Corol. 1. Hinc si punctum datum S, ad quod vis centripeta semper tendit, locetur in circumferentia hujus circuli, puta ad V; erit vis centripeta reciproce ut quadrato-cubus altitudinis SP.

Corol. 2. Vis, qua corpus P in circulo $APTV$ circum virium centrum S revolvitur, est ad vim, qua corpus idem P in eodem circulo & eodem tempore periodico circum aliud quodvis virium centrum R revolvi potest, ut RP *quad.* $\times SP$ ad cubum rectæ SG, quæ a primo virium centro S ad orbis tangentem PG ducitur, & distantiæ corporis à secundo virium centro parallela est. Nam per constructionem hujus propositionis vis prior est ad vim posteriorem ut $RPq \times PT\ cub.$ ad $SPq \times PV\ cub.$



id

id eſt, ut $SP \times RPq$ ad $\frac{SP\ cub. \times PV\ cub.}{PT\ cub.}$, ſive (ob ſimilia triangula PSG, TPV) ad $SG\ cub.$

Corol. 3. Vis, qua corpus P in orbe quocunque circum virium centrum S revolvitur, eſt ad vim, qua corpus idem P in eodem orbe eodemque tempore periodico circum aliud quodvis virium centrum R revolvi poteſt, ut $SP \times RPq$, contentum utique ſub diſtantia corporis a primo virium centro S & quadrato diſtantiæ ejus a ſecundo virium centro R, ad cubum rectæ SG, quæ a primo virium centro S ad orbis tangentem PG ducitur, & corporis a ſecundo virium centro diſtantiæ RP parallela eſt. Nam vires in hoc orbe ad ejus punctum quodvis P eædem ſunt ac in circulo ejuſdem curvaturæ.

PROPOSITIO VIII. PROBLEMA III.

Moveatur corpus in ſemicirculo PQA: *ad hunc effectum requiritur lex vis centripetæ tendentis ad punctum adeo longinquum* S, *ut lineæ omnes* PS, RS *ad id ductæ, pro parallelis haberi poſſint.*

A ſemicirculi centro C agatur ſemidiameter CA parallelas iſtas perpendiculariter ſecans in M & N, & jungatur CP. Ob ſimilia triangula CPM, PZT & RZQ eſt CPq ad PMq ut PRq ad QTq, & ex natura circuli PRq æquale eſt rectangulo $QR \times \overline{RN+QN}$, ſive coeuntibus punctis P & Q rectangulo $QR \times 2PM$. Ergo eſt CPq ad $PM\ quad.$ ut $QR \times 2PM$ ad $QT\ quad.$ ideoque $\frac{QT\ quad.}{QR}$ æquale $\frac{2PM\ cub.}{CP\ quad.}$, & $\frac{QT\ quad. \times SP\ quad.}{QR}$ æquale $\frac{2PM\ cub. \times SP\ quad.}{CP\ quad.}$

Eſt

Est ergo (per corol. 1. & 5. prop. VI.) vis centripeta reciproce ut $\frac{2PM\,cub. \times SP\,quad.}{CP\,quad.}$, hoc est (neglecta ratione determinata $\frac{2SP\,quad.}{CP\,quad.}$) reciproce ut *PM cub.* *Q. E. I.*

Idem facile colligitur etiam ex propositione præcedente.

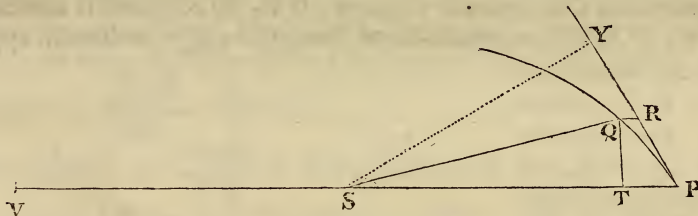
Scholium.

Et argumento haud multum dissimili corpus invenietur moveri in ellipsi, vel etiam in hyperbola vel parabola, vi centripeta, quæ sit reciproce ut cubus ordinatim applicatæ ad centrum virium maxime longinquum tendentis.

PROPOSITIO IX. PROBLEMA IV.

Gyretur corpus in spirali PQS *secante radios omnes* SP, SQ, *&c. in angulo dato: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad centrum spiralis.*

Detur angulus indefinite parvus *PSQ*, & ob datos omnes an-



gulos dabitur specie figura *SPRQT*. Ergo datur ratio $\frac{QT}{QR}$, estque $\frac{QT\,quad.}{QR}$ ut *QT*, hoc est (ob datam specie figuram illam) ut *SP*. Mutetur jam utcunque angulus *PSQ*, & recta *QR* angulum contactus *QPR* subtendens mutabitur (per lemma XI.) in duplicata ratione ipsius *PR* vel *QT*. Ergo manebit $\frac{QT\,quad.}{QR}$ eadem quæ prius, hoc est ut *SP*. Quare $\frac{QTq \times SPq}{QR}$ est ut *SP cub.* ideoque (per corol. 1. & 5. prop. VI.) vis centripeta est reciproce ut cubus distantiæ *SP*. *Q. E. I.*

Idem

Idem aliter.

Perpendiculum ST in tangentem demissum, & circuli spiralem concentrice secantis chorda PV sunt ad altitudinem SP in datis rationibus; ideoque SP *cub.* est ut $STq \times PV$, hoc est (per corol. 3. & 5. prop. VI.) reciproce ut vis centripeta.

LEMMA XII.

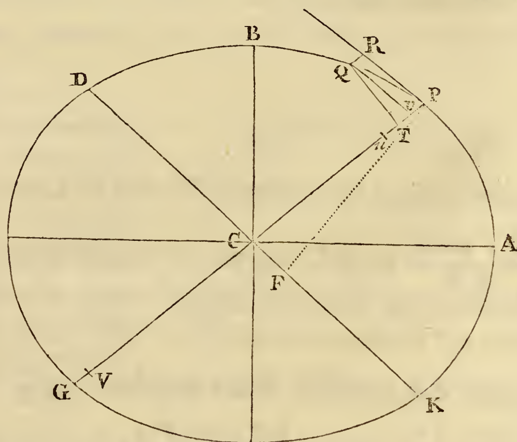
Parallelogramma omnia circa datæ ellipseos vel hyperbolæ diametros quasvis conjugatas descripta esse inter se æqualia.

Constat ex conicis.

PROPOSITIO X. PROBLEMA V.

Gyretur corpus in ellipsi: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad centrum ellipseos.

Sunto CA, CB semiaxes ellipseos; GP, DK diametri aliæ conjugatæ; PF, QT perpendicula ad diametros; Qv ordinatim applicata ad diametrum GP; & si compleatur parallelogrammum $QvPR$, erit (ex conicis) rectangulum PvG ad Qv *quad.* ut PC *quad.* ad CD *quad.* & (ob similia triangula QvT, PCF) Qv *quad.* est ad QT *quad.* ut PC *quad.* ad PF *quad.* & conjunctis rationibus, rectangulum PvG ad QT *quad.* ut PC *quad.* ad CD *quad.* & PC *quad.* ad PF *quad.* id est, vG ad $\frac{QT\ quad.}{Pv}$ ut PC *quad.* ad $\frac{CDq \times PFq}{PCq}$. Scribe QR pro



Pv,

Pv, & (per lemma XII.) $BC \times CA$ pro $CD \times PF$, nec non (punctis P & Q coeuntibus) $2PC$ pro vG, & ductis extremis & mediis in se mutuo fiet $\frac{QT\ quad. \times PCq}{QR}$ æquale $\frac{2BCq \times CAq}{PC}$. Est ergo (per corol. 5. prop. VI.) vis centripeta reciproce ut $\frac{2BCq \times CAq}{PC}$; id est (ob datum $2BCq \times CAq$) reciproce ut $\frac{1}{PC}$; hoc est, directe ut distantia PC. *Q. E. I.*

Idem aliter.

In recta PG ab altera parte puncti T sumatur punctum u ut Tu sit æqualis ipsi Tv; deinde cape uV, quæ sit ad vG ut est DC *quad.* ad PC *quad.* Et quoniam ex conicis est Qv *quad.* ad PvG ut DC *quad:* ad PC *quad.* erit Qv *quad.* æquale $Pv \times uV$. Adde rectangulum uPv utrinque, & prodibit quadratum chordæ arcus PQ æquale rectangulo VPv; ideoque circulus, qui tangit sectionem conicam in P & transit per punctum Q, transibit etiam per punctum V. Coeant puncta P & Q, & ratio uV ad vG, quæ eadem est cum ratione DCq ad PCq, fiet ratio PV ad PG seu PV ad $2PC$; ideoque PV æqualis erit $\frac{2DCq}{PC}$. Proinde vis, qua corpus P in ellipsi revolvitur, erit reciproce ut $\frac{2DCq}{PC}$ in PFq (per corol. 3. prop. VI.) hoc est (ob datum $2DCq$ in PFq) directe ut PC. *Q. E. I.*

Corol. 1. Est igitur vis ut distantia corporis a centro ellipseos: & vicissim, si vis sit ut distantia, movebitur corpus in ellipsi centrum habente in centro virium, aut forte in circulo, in quem utique ellipsis migrare potest.

Corol. 2. Et æqualia erunt revolutionum in ellipsibus universis circum centrum idem factarum periodica tempora. Nam tempora illa in ellipsibus similibus æqualia sunt (per corol. 3. & 8. prop. IV.) in ellipsibus autem communem habentibus axem majorem sunt ad invicem ut ellipseon areæ totæ directe, & arearum particulæ simul descriptæ inverse; id est, ut axes minores directe, & corporum velocitates in verticibus principalibus inverse; hoc est, ut axes illi

minores

minores directe, & ordinatim applicatæ ad idem punctum axis communis inverse; & propterea (ob æqualitatem rationum directarum & inversarum) in ratione æqualitatis.

Scholium.

Si ellipsis centro in infinitum abeunte vertatur in parabolam, corpus movebitur in hac parabola; & vis ad centrum infinite distans jam tendens evadet æquabilis. Hoc est theorema *Galilæi.* Et si coni sectio parabolica (inclinatione plani ad conum sectum mutata) vertatur in hyperbolam, movebitur corpus in hujus perimetro vi centripeta in centrifugam versa. Et quemadmodum in circulo vel ellipsi si vires tendunt ad centrum figuræ in abscissa positum; hæ vires augendo vel diminuendo ordinatas in ratione quacunque data, vel etiam mutando angulum inclinationis ordinatarum ad abscissam, semper augentur vel diminuuntur in ratione distantiarum a centro, si modo tempora periodica maneant æqualia; sic etiam in figuris universis si ordinatæ augeantur vel diminuantur in ratione quacunque data, vel angulus ordinationis utcunque mutetur, manente tempore periodico; vires ad centrum quodcunque in abscissa positum tendentes in singulis ordinatis augentur vel diminuuntur in ratione distantiarum a centro.

SECTIO III.

De motu corporum in conicis sectionibus excentricis.

PROPOSITIO XI. PROBLEMA VI.

Revolvatur corpus in ellipsi: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum ellipseos.

Esto ellipseos umbilicus *S*. Agatur *SP* secans ellipseos tum diametrum *DK* in *E*, tum ordinatim applicatam *Qv* in *x*, & compleatur parallelogrammum *QxPR*. Patet *EP* æqualem esse semiaxi majori *AC*, eo quod, acta ab altero ellipseos umbilico *H* linea *HI* ipsi *EC* parallela, ob æquales *CS*, *CH* æquentur *ES*, *EI*,

adeo

adeo ut EP semisumma sit ipsarum PS, PI, id est (ob parallelas HI, PR, & angulos æquales IPR, HPZ) ipsarum PS, PH, quæ conjunctim axem totum $2\,AC$ adæquant. Ad SP demittatur perpendicularis QT, & ellipseos latere recto principali (seu $\frac{2\,BC\ quad.}{AC}$) dicto L, erit $L \times QR$ ad $L \times Pv$ ut QR ad Pv, id est, ut PE seu AC ad PC; & $L \times Pv$ ad GvP ut L ad Gv; & GvP ad Qv *quad.* ut PC *quad.* ad CD *quad.* & (per corol. 2. lem. VII.) Qv *quad.* ad Qx *quad.* punctis Q & P coeuntibus est ratio æqualitatis; & Qx *quad.* seu Qv *quad.* est ad QT *quad.* ut EP *quad.* ad PF *quad.* id est, ut CA *quad.* ad PF *quad.* sive (per lem. XII.) ut CD *quad.* ad CB *quad.* Et conjunctis his omnibus rationibus, $L \times QR$ fit ad QT *quad.* ut $AC \times L \times PCq \times CDq$, seu $2\,CBq \times PCq \times CDq$ ad $PC \times Gv \times CDq \times CBq$, sive ut $2\,PC$ ad Gv. Sed punctis Q & P coeuntibus æquantur $2\,PC$ & Gv. Ergo & his proportionalia $L \times QR$ & QT *quad.* æquantur. Ducantur hæc æqualia in $\frac{SPq}{QR}$, & fiet $L \times SPq$ æquale $\frac{SPq \times QTq}{QR}$. Ergo (per corol. 1. & 5. prop. VI.) vis centripeta reciproce est ut $L \times SPq$, id est, reciproce in ratione duplicata distantiæ SP. *Q. E. I.*

Idem aliter.

Cum vis ad centrum ellipseos tendens, qua corpus P in ellipsi illa revolvi potest, sit (per corol. 1. prop. X.) ut CP distantia corporis ab ellipseos centro C; ducatur CE parallela ellipseos tangenti

PR

PR; & vis, qua corpus idem P circum aliud quodvis ellipseos punctum S revolvi potest, si CE & PS concurrant in E, erit ut $\frac{PE\ cub.}{SPq}$ (per corol. 3. prop. VII.) hoc est, si punctum S sit umbilicus ellipseos, ideoque PE detur, ut SPq reciproce. *Q. E. I.*

Eadem brevitate, qua traduximus problema quintum ad parabolam, & hyperbolam, liceret idem hic facere: verum ob dignitatem problematis, & usum ejus in sequentibus non pigebit casus cæteros demonstratione confirmare.

PROPOSITIO XII. PROBLEMA VII.

Moveatur corpus in hyperbola: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum figuræ.

Sunto CA, CB semiaxes hyperbolæ; PG, KD diametri aliæ conjugatæ; PF perpendiculum ad diametrum KD; & Qv ordinatim applicata ad diametrum GP. Agatur SP secans cum diametrum DK in E, tum ordinatim applicatam Qv in x, & compleatur parallelogrammum $QRPx$. Patet EP æqualem esse semiaxi transverso AC, eo quod, acta ab altero hyperbolæ umbilico H linea HI ipsi EC parallela, ob æquales CS, CH æquentur ES, EI; adeo ut EP semidifferentia sit ipsarum PS, PI, id est (ob parallelas IH, PR & angulos æquales IPR, HPZ) ipsarum PS, PH, quarum differentia axem totum $2AC$ adæquat. Ad SP demittatur perpendicularis QT. Et hyperbolæ latere recto principali (seu $\frac{2BCq}{AC}$) dicto L, erit $L \times QR$ ad $L \times Pv$ ut QR ad Pv, seu Px ad Pv, id est (ob similia triangula Pxv, PEC) ut PE ad PC, seu AC ad PC. Erit etiam $L \times Pv$ ad $Gv \times Pv$ ut L ad Gv; & (ex natura conicorum) rectangulum GvP ad Qv *quad.* ut PCq ad CDq; & (per corol. 2. lem. VII.) Qv *quad.* ad Qx *quad.* punctis Q & P coeuntibus fit ratio æqualitatis; & Qx *quad.* seu Qv *quad.* est ad QTq ut EPq ad PFq, id est, ut CAq ad PFq, sive (per lem. XII.) ut CDq ad CBq: & conjunctis his omnibus rationibus $L \times QR$ fit ad QTq ut $AC \times L \times PCq \times CDq$, seu $2CBq \times PCq \times CDq$ ad $PC \times Gv \times CDq \times CBq$, sive ut $2PC$ ad Gv. Sed punctis P & Q coeuntibus

coeuntibus æquantur $2PC$ & Gv. Ergo & his proportionalia $L \times QR$ & QTq æquantur. Ducantur hæc æqualia in $\frac{SPq}{QR}$, & fiet $L \times SPq$ æquale $\frac{SPq \times QTq}{QR}$. Ergo (per corol. 1. & 5. prop. VI.) vis centripeta reciproce eſt ut $L \times SPq$, id eſt, reciproce in ratione duplicata diſtantiæ SP. *Q. E. I.*

Idem aliter.

Inveniatur vis, quæ tendit ab hyperbolæ centro C. Prodibit hæc diſtantiæ CP proportionalis. Inde vero (per corol. 3. prop. VII.) vis ad umbilicum S tendens erit ut $\frac{PE\ cub.}{SPq}$, hoc eſt, ob datam PE reciproce ut SPq. *Q. E. I.*

Eodem modo demonstratur, quod corpus hac vi centripeta in centrifugam versa movebitur in hyperbola opposita.

LEMMA XIII.

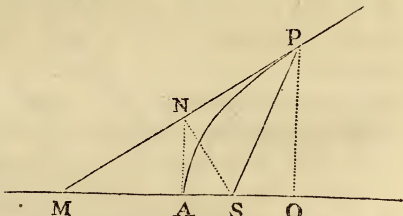
Latus rectum parabolæ ad verticem quemvis pertinens est quadruplum distantiæ verticis illius ab umbilico figuræ.

Patet ex conicis.

LEMMA XIV.

Perpendiculum, quod ab umbilico parabolæ ad tangentem ejus demittitur, medium est proportionale inter distantias umbilici a puncto contactus & a vertice principali figuræ.

Sit enim *AP* parabola, *S* umbilicus ejus, *A* vertex principalis, *P* punctum contactus, *PO* ordinatim applicata ad diametrum principalem, *PM* tangens diametro principali occurrens in *M*, & *SN* linea perpendicularis ab umbilico in tangentem. Jungatur *AN* & ob æquales *MS* & *SP*, *MN*, & *NP*, *MA* & *AO* parallelæ erunt rectæ *AN* & *OP*; & inde triangulum *SAN* rectangulum erit ad *A*, & simile triangulis æqualibus *SNM*, *SNP*: ergo *PS* est ad *SN* ut *SN* ad *SA*. *Q.E.D.*



Corol. 1. *PSq* est ad *SNq* ut *PS* ad *SA*.

Corol. 2. Et ob datam *SA* est *SNq* ut *PS*.

Corol. 3. Et concursus tangentis cujusvis *PM* cum recta *SN*, quæ ab umbilico in ipsam perpendicularis est, incidit in rectam *AN*, quæ parabolam tangit in vertice principali.

PROPOSITIO XIII. PROBLEMA VIII.

Moveatur corpus in perimetro parabolæ: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum hujus figuræ.

Maneat constructio lemmatis, sitque *P* corpus in perimetro parabolæ, & a loco *Q*, in quem corpus proxime movetur, age ipsi *SP* parallelam

parallelam QR & perpendicularem QT, necnon Qv tangenti parallelam, & occurrentem tum diametro PG in v, tum diſtantiæ SP in x. Jam ob ſimilia triangula Pxv, SPM, & æqualia unius latera SM, SP, æqualia ſunt alterius latera Px ſeu QR & Pv. Sed ex conicis quadratum ordinatæ Qv æquale eſt rectangulo ſub latere recto & ſegmento diametri Pv, id eſt (per lem. XIII.) rectangulo $4PS \times Pv$, ſeu $4PS \times QR$; & punctis P & Q coeuntibus, ratio Qv ad Qx (per corol. 2. lem. VII.) fit ratio æqualitatis. Ergo Qx *quad.* eo in caſu æquale eſt rectangulo $4PS \times QR$. Eſt autem (ob ſimilia triangula QxT, SPN) Qxq ad QTq ut PSq ad SNq, hoc eſt (per corol. 1. lem. XIV.) ut PS ad SA, id eſt, ut $4PS \times QR$ ad $4SA \times QR$, & inde (per prop. IX. lib. V. elem.) QTq & $4SA \times QR$ æquantur. Ducantur hæc æqualia in $\frac{SPq}{QR}$, & fiet $\frac{SPq \times QTq}{QR}$ æquale $SPq \times 4SA$: & propterea (per corol. 1. & 5. prop. VI.) vis centripeta eſt reciproce ut $SPq \times 4SA$, id eſt, ob datam $4SA$ reciproce in duplicata ratione diſtantiæ SP. *Q.E.I.*

Corol. 1. Ex tribus noviſſimis propoſitionibus conſequens eſt, quod ſi corpus quodvis P ſecundum lineam quamvis rectam PR quacunque cum velocitate exeat de loco P, & vi centripeta, quæ ſit reciproce proportionalis quadrato diſtantiæ locorum a centro, ſimul agitetur; movebitur hoc corpus in aliqua ſectionum conicarum umbilicum habente in centro virium; & contra. Nam datis umbilico, & puncto contactus, & poſitione tangentis, deſcribi poteſt ſectio conica, quæ curvaturam datam ad punctum illud habebit. Datur autem curvatura ex data vi centripeta, & velocitate corporis: & orbes duo ſe mutuo tangentes eadem vi centripeta eademque velocitate deſcribi non poſſunt.

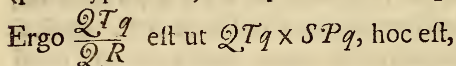
Corol 2. Si velocitas, quacum corpus exit de loco ſuo P, ea ſit, qua lineola PR in minima aliqua temporis particula deſcribi poſ-

fit; & vis centripeta potis fit eodem tempore corpus idem movere per fpatium QR: movebitur hoc corpus in conica aliqua fectione, cujus latus rectum principale eft quantitas illa $\frac{QTq}{QR}$, quæ ultimo fit, ubi lineolæ PR, QR in infinitum diminuuntur. Circulum in his corollariis refero ad ellipfin; & cafum excipio, ubi corpus recta defcendit ad centrum.

PROPOSITIO XIV. THEOREMA VI.

Si corpora plura revolvantur circa centrum commune, & vis centripeta fit reciproce in duplicata ratione diftantiæ locorum a centro; dico quod orbium latera recta principalia funt in duplicata ratione arearum, quas corpora radiis ad centrum ductis eodem tempore defcribunt.

Nam (per corol 2. prop. XIII.) latus rectum L æquale eft quantitati $\frac{QTq}{QR}$, quæ ultimo fit, ubi coeunt puncta P & Q. Sed linea minima QR dato tempore eft ut vis centripeta generans, hoc eft (per hypothefin) reciproce ut SPq.



Ergo $\frac{QTq}{QR}$ eft ut $QTq \times SPq$, hoc eft, latus rectum L in duplicata ratione areæ $QT \times SP$. *Q. E. D.*

Corol. Hinc ellipfeos area tota, eique proportionale rectangulum fub axibus eft in ratione compofita ex fubduplicata ratione lateris recti, & ratione temporis periodici. Namque area tota eft ut area $QT \times SP$, quæ dato tempore defcribitur, ducta in tempus periodicum.

PROPOSITIO XV. THEOREMA VII.

Iifdem pofitis, dico quod tempora periodica in ellipfibus funt in ratione fefquiplicata majorum axium.

Namque axis minor eft medius proportionalis inter axem majorem & latus rectum, atque ideo rectangulum fub axibus eft in ratione

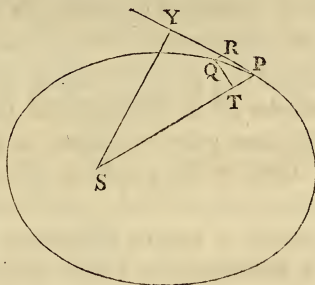
tione composita ex subduplicata ratione lateris recti & sesquiplicata ratione axis majoris. Sed hoc rectangulum (per corol. prop. XIV.) est in ratione composita ex subduplicata ratione lateris recti & ratione periodici temporis. Dematur utrobique subduplicata ratio lateris recti, & manebit sesquiplicata ratio majoris axis eadem cum ratione periodici temporis. *Q. E. D.*

Corol. Sunt igitur tempora periodica in ellipsibus eadem ac in circulis, quorum diametri æquantur majoribus axibus ellipseon.

PROPOSITIO XVI. THEOREMA VIII.

Iisdem positis, & actis ad corpora lineis rectis, quæ ibidem tangant orbitas, demissisque ab umbilico communi ad has tangentes perpendicularibus: dico quod velocitates corporum sunt in ratione composita ex ratione perpendiculorum inverse, & subduplicata ratione laterum rectorum principalium directe.

Ab umbilico S ad tangentem PR demitte perpendiculum SY, & velocitas corporis P erit reciproce in subduplicata ratione quantitatis $\frac{SYq}{L}$. Nam velocitas illa est ut arcus quam minimus PQ in data temporis particula descriptus, hoc est (per lem. VII.) ut tangens PR, id est, ob proportionales PR ad QT & SP ad SY, ut $\frac{SP \times QT}{SY}$, sive ut SY reciproce & $SP \times QT$ directe; estque $SP \times QT$ ut area dato tempore descripta, id est (per prop. XIV.) in subduplicata ratione lateris recti. *Q. E. D.*



Corol. 1. Latera recta principalia sunt in ratione composita ex duplicata ratione perpendiculorum, & duplicata ratione velocitatum.

Corol.

Corol. 2. Velocitates corporum, in maximis & minimis ab umbilico communi diſtantiis, ſunt in ratione compoſita ex ratione diſtantiarum inverſe, & ſubduplicata ratione laterum rectorum principalium directe. Nam perpendicula jam ſunt ipſæ diſtantiæ.

Corol. 3. Ideoque velocitas in conica ſectione, in maxima vel minima ab umbilico diſtantia, eſt ad velocitatem in circulo in eadem a centro diſtantia in ſubduplicata ratione lateris recti principalis ad duplam illam diſtantiam.

Corol. 4. Corporum in ellipſibus gyrantium velocitates in mediocribus diſtantiis ab umbilico communi ſunt eædem, quæ corporum gyrantium in circulis ad eaſdem diſtantias; hoc eſt (per corol. 6. prop. IV.) reciproce in ſubduplicata ratione diſtantiarum. Nam perpendicula jam ſunt ſemi-axes minores, & hi ſunt ut mediæ proportionales inter diſtantias & latera recta. Componatur hæc ratio inverſe cum ſubduplicata ratione laterum rectorum directe, & fiet ratio ſubduplicata diſtantiarum inverſe.

Corol. 5. In eadem figura, vel etiam in figuris diverſis, quarum latera recta principalia ſunt æqualia, velocitas corporis eſt reciproce ut perpendiculum demiſſum ab umbilico ad tangentem.

Corol. 6. In parabola velocitas eſt reciproce in ſubduplicata ratione diſtantiæ corporis ab umbilico figuræ; in ellipſi magis variatur, in hyperbola minus quam in hac ratione. Nam (per corol. 2. lem. XIV.) perpendiculum demiſſum ab umbilico ad tangentem parabolæ eſt in ſubduplicata ratione diſtantiæ. In hyperbola perpendiculum minus variatur, in ellipſi magis.

Corol. 7. In parabola velocitas corporis ad quamvis ab umbilico diſtantiam eſt ad velocitatem corporis revolventis in circulo ad eandem a centro diſtantiam in ſubduplicata ratione numeri binarii ad unitatem; in ellipſi minor eſt, in hyperbola major quam in hac ratione. Nam per hujus corollarium ſecundum velocitas in vertice parabolæ eſt in hac ratione, & per corollaria ſexta hujus & propoſitionis quartæ ſervatur eadem proportio in omnibus diſtantiis. Hinc etiam in parabola velocitas ubique æqualis eſt velocitati corporis revolventis in circulo ad dimidiam diſtantiam, in ellipſi minor eſt, in hyperbola major.

Corol. 8. Velocitas gyrantis in ſectione quavis conica eſt ad velocitatem gyrantis in circulo in diſtantia dimidii lateris recti principalis

cipalis sectionis, ut distantia illa ad perpendiculum ab umbilico in tangentem sectionis demissum. Patet per corollarium quintum.

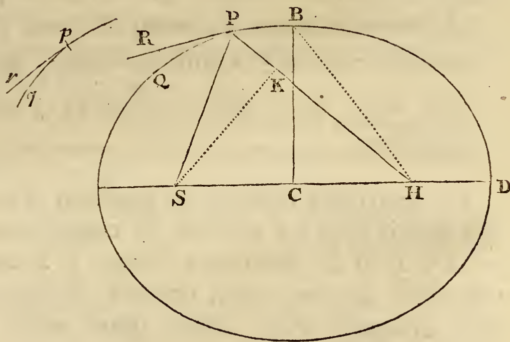
Corol. 9. Unde cum (per corol 6. prop. IV.) velocitas gyrantis in hoc circulo sit ad velocitatem gyrantis in circulo quovis alio reciproce in subduplicata ratione distantiarum ; fiet ex æquo velocitas gyrantis in conica sectione ad velocitatem gyrantis in circulo in eadem distantia, ut media proportionalis inter distantiam illam communem & semissem principalis lateris recti sectionis, ad perpendiculum ab umbilico communi in tangentem sectionis demissum.

PROPOSITIO XVII. PROBLEMA IX.

Posito quod vis centripeta sit reciproce proportionalis quadrato distantiæ locorum a centro, & quod vis illius quantitas absoluta sit cognita ; requiritur linea, quam corpus describit de loco dato cum data velocitate secundum datam rectam egrediens.

Vis centripeta tendens ad punctum *S* ea sit, qua corpus *p* in orbita quavis data *p q* gyretur, & cognoscatur hujus velocitas in loco *p*. De loco *P* secundum lineam *P R* exeat corpus *P* cum data velocitate, & mox inde, cogente vi centripeta, deflectat illud in coni sectionem *P Q*. Hanc igitur recta *P R* tanget in *P*. Tangat itidem recta aliqua *p r* orbitam *p q* in *p*, & si ab *S* ad eas tangentes demitti intelligantur perpendicula, erit (per corol. I. prop. XVI.) latus rectum principale coni sectionis ad latus rectum principale orbitæ in ratione composita ex duplicata ratione perpendiculorum & duplicata ratione velocitatum, atque ideo datur. Sit *L* coni sectionis latus rectum. Datur præterea ejusdem coni sectionis umbilicus *S*. Anguli *R P S* complementum

mentum ad duos rectos fiat angulus RPH; & dabitur positione linea PH, in qua umbilicus alter H locatur. Demisso ad PH perpendiculo SK, erigi intelligatur semiaxis conjugatus BC, & erit $SPq - 2KPH + PHq = SHq = 4CHq = 4BHq - 4BCq = \overline{SP+PH}: quad. - L \times \overline{SP+PH} = SPq + 2SPH + PHq - L \times \overline{SP+PH}$. Addantur utrobique $2KPH - SPq - PHq + L \times \overline{SP+PH}$, & fiet $L \times \overline{SP+PH} = 2SPH + 2KPH$, seu $SP+PH$ ad PH ut $2SP+2KP$ ad L. Unde datur PH tam longitudine quam positione. Nimirum si ea sit corporis in P velocitas, ut latus rectum L minus fuerit quam $2SP+2KP$, jacebit PH ad eandem partem tangentis PR cum linea PS; ideoque figura erit ellipsis, & ex datis umbilicis S, H, & axe principali $SP+AH$, dabitur. Sin tanta sit corporis velocitas, ut latus rectum L æquale fuerit $2SP+2KP$, longitudo PH infinita erit; & propterea figura erit parabola axem habens SH parallelum lineæ PK, & inde dabitur. Quod si corpus majori adhuc cum velocitate de loco



suo P exeat, capienda erit longitudo PH ad alteram partem tangentis; ideoque tangente inter umbilicos pergente, figura erit hyperbola axem habens principalem æqualem differentiæ linearum SP & PH, & inde dabitur. Nam si corpus in his casibus revolvatur in conica sectione sic inventa, demonstratum est in prop. XI, XII, & XIII, quod vis centripeta erit ut quadratum distantiæ corporis a centro virium S reciproce; ideoque linea PQ recte exhibetur, quam corpus tali vi describet, de loco dato P, cum data velocitate, secundum rectam positione datam PR egrediens. *Q. E. F.*

Corol. 1. Hinc in omni coni sectione ex dato vertice principali D, latere recto L, & umbilico S, datur umbilicus alter H capiendo DH ad DS ut est latus rectum ad differentiam inter latus rectum & $4DS$. Nam proportio $SP+PH$ ad PH ut $2SP+2KP$ ad L in

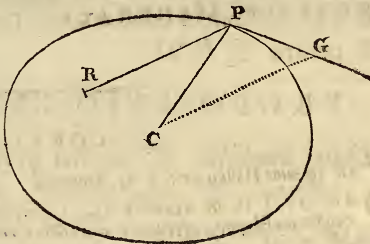
in casu hujus corollarii, fit $DS + DH$ ad DH ut $4\,DS$ ad L, & divisim DS ad DH ut $4\,DS - L$ ad L.

Corol. 2. Unde si datur corporis velocitas in vertice principali D, invenietur orbita expedite, capiendo scilicet latus rectum ejus ad duplam distantiam DS, in duplicata ratione velocitatis hujus datæ ad velocitatem corporis in circulo ad distantiam DS gyrantis (per corol. 3. prop. XVI.;) dein DH ad DS ut latus rectum ad differentiam inter latus rectum & $4\,DS$.

Corol. 3. Hinc etiam si corpus moveatur in sectione quacunque conica, & ex orbe suo impulsu quocunque exturbetur; cognosci potest orbis, in quo postea cursum suum peraget. Nam componendo proprium corporis motum cum motu illo, quem impulsus solus generaret, habebitur motus quocum corpus de dato impulsus loco, secundum rectam positione datam, exibit.

Corol. 4. Et si corpus illud vi aliqua extrinsecus impressa continuo perturbetur, innotescet cursus quam proxime, colligendo mutationes quas vis illa in punctis quibusdam inducit, & ex seriei analogia mutationes continuas in locis intermediis æstimando.

Scholium.



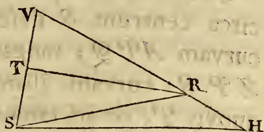
Si corpus P vi centripeta ad punctum quodcunque datum R tendente moveatur in perimetro datæ cujuscunque sectionis conicæ, cujus centrum sit C; & requiratur lex vis centripetæ: ducatur CG radio RP parallela, & orbis tangenti PG occurrens in G; & vis illa (per corol. 1. & schol. prop. X. & corol. 3. prop. VII.) erit ut $\frac{CG\ cub.}{RP\ quad.}$

SECTIO IV.

De inventione orbium ellipticorum, parabolicorum & hyperbolicorum ex umbilico dato.

LEMMA XV.

Si ab ellipseos vel hyperbolæ cujusvis umbilicis duobus S, H, *ad punctum quodvis tertium* V *inflectantur rectæ duæ* SV, HV, *quarum una* HV *æqualis sit axi principali figuræ, id est, axi in quo umbilici jacent, altera* SV *a perpendiculo* TR *in se demisso bisecetur in* T; *perpendiculum illud* TR *sectionem conicam alicubi tanget: & contra, si tangit, erit* HV *æqualis axi principali figuræ.*

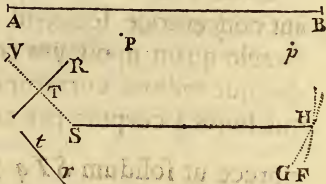


Secet enim perpendiculum *TR* rectam *HV* productam, si opus fuerit, in *R*; & jungatur *SR*. Ob æquales *TS*, *TV*, æquales erunt & rectæ *SR*, *VR* & anguli *TRS*, *TRV*. Unde punctum *R* erit ad sectionem conicam, & perpendiculum *TR* tanget eandem: & contra. *Q. E. D.*

PROPOSITIO XVIII. PROBLEMA X.

Datis umbilico & axibus principalibus describere trajectorias ellipticas & hyperbolicas, quæ transibunt per puncta data, & rectas positione datas contingent.

Sit *S* communis umbilicus figurarum; *AB* longitudo axis principalis trajectoriæ cujusvis; *P* punctum per quod trajectoria debet transire; & *TR* recta quam debet tangere. Centro *P* intervallo *AB—SP*, si orbita sit ellipsis, vel *AB+SP*, si ea sit hyperbola, describatur circulus *HG*. Ad tangentem *TR* demittatur perpendiculum *ST*, & producatur idem ad *V*, ut sit *TV* æqualis *ST*; centroque

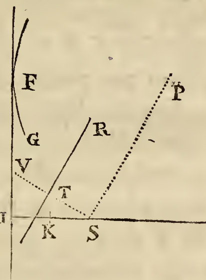


que *V* & intervallo *AB* deſcribatur circulus *FH*. Hac methodo ſive dentur duo puncta *P*, *p*, ſive duæ tangentes *TR*, *tr*, ſive punctum *P* & tangens *TR*, deſcribendi ſunt circuli duo. Sit *H* eorum interſectio communis, & umbilicis *S*, *H*, axe illo dato deſcribatur trajectoria. Dico factum. Nam trajectoria deſcripta (eo quod *PH* + *SP* in ellipſi, & *PH* — *SP* in hyperbola æquatur axi) tranſibit per punctum *P*, & (per lemma ſuperius) tanget rectam *TR*. Et eodem argumento vel tranſibit eadem per puncta duo *P*, *p*, vel tanget rectas duas *TR*, *tr*. *Q. E. F.*

PROPOSITIO XIX. PROBLEMA XI.

Circa datum umbilicum trajectoriam parabolicam deſcribere, quæ tranſibit per puncta data, & rectas poſitione datas continget.

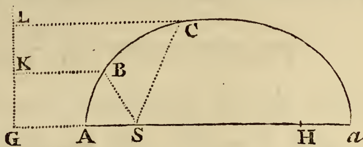
Sit *S* umbilicus, *P* punctum & *TR* tangens trajectoriæ deſcribendæ. Centro *P*, intervallo *PS* deſcribe circulum *FG*. Ab umbilico ad tangentem demitte perpendicularem *ST*, & produc eam ad *V*, ut ſit *TV* æqualis *ST*. Eodem modo deſcribendus eſt alter circulus *fg*, ſi datur alterum punctum *p*; vel inveniendum alterum punctum *v*, ſi datur altera tangens *tr*; dein ducenda recta *IF* quæ tangat duos circulos *FG*, *fg* ſi dantur duo puncta *P*, *p*, vel tranſeat per duo puncta *V*, *v*, ſi dantur duæ tangentes *TR*, *tr*, vel tangat circulum *FG* & tranſeat per punctum *V*, ſi datur punctum *P* & tangens *TR*. Ad *FI* demitte perpendicularem *SI*, eamque biſeca in *K*; & axe *SK*, vertice principali *K* deſcribatur parabola. Dico factum. Nam parabola, ob æquales *SK* & *IK*, *SP* & *FP*, tranſibit per punctum *P*; & (per lem. XIV. corol. 3.) ob æquales *ST* & *TV* & angulum rectum *STR*, tanget rectam *TR*. *Q. E. F.*



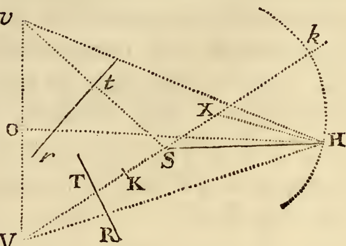
PROPOSITIO XX. PROBLEMA XII.

Circa datum umbilicum trajectoriam quamvis specie datam describere, quæ per data puncta transibit & rectas tanget positione datas.

Cas. 1. Dato umbilico *S*, describenda sit trajectoria *ABC* per puncta duo *B*, *C*. Quoniam trajectoria datur specie, dabitur ratio axis principalis ad distantiam umbilicorum. In ea ratione cape *KB* ad *BS*, & *LC* ad *CS*. Centris *B*, *C*, intervallis *BK*, *CL*, describe circulos duos, & ad rectam *KL*, quæ tangat eosdem in *K* & *L*, demitte perpendiculum *SG*, idemque seca in *A* & *a*, ita ut sit *GA* ad *AS* & *Ga* ad *aS* ut est *KB* ad *BS* & axe *Aa*, verticibus *A*, *a*, describatur trajectoria. Dico factum. Sit enim *H* umbilicus alter figuræ descriptæ, & cum sit *GA* ad *AS* ut *Ga* ad *aS*, erit divisim *Ga* — *GA* seu *Aa* ad *aS* — *AS* seu *SH* in eadem ratione, ideoque in ratione quam habet axis principalis figuræ describendæ ad distantiam umbilicorum ejus; & propterea figura descripta est ejusdem speciei cum describenda. Cumque sint *KB* ad *BS* & *LC* ad *CS* in eadem ratione, transibit hæc figura per puncta *B*, *C*, ut ex conicis manifestum est.



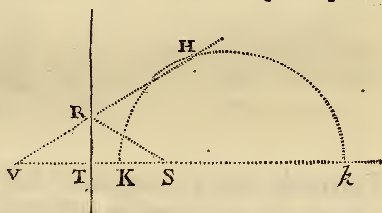
Cas. 2. Dato umbilico *S*, describenda sit trajectoria quæ rectas duas *TR*, *tr* alicubi contingat. Ab umbilico in tangentes demitte perpendicula *ST*, *St* & produc eadem ad *V*, *v*, ut sint *TV*, *tv* æquales *TS*, *tS*. Biseca *Vv* in *O*, & erige perpendiculum infinitum *OH*, rectamque *VS* infinite productam seca in *K* & *k*, ita ut sit *VK* ad *KS* & *Vk* ad *kS* ut est trajectoriæ describendæ axis principalis ad umbilicorum distantiam. Super diametro *Kk* describatur circulus secans *OH* in *H*; & umbilicis *S*, *H*, axe principali ipsam *VH* æquante, describatur trajectoria. Dico factum. Nam biseca *Kk* in *X*, &



junge

junge HX, HS, HV, Hv. Quoniam eſt VK ad KS ut Vk ad kS; & compoſite ut $VK+Vk$ ad $KS+kS$; diviſimque ut $Vk-VK$ ad $kS-KS$, id eſt, ut $2VX$ ad $2KX$ & $2KX$ ad $2SX$, ideoque ut VX ad HX & HX ad SX, ſimilia erunt triangula VXH, HXS, & propterea VH erit ad SH ut VX ad XH, ideoque ut VK ad KS. Habet igitur trajectoriæ deſcriptæ axis principalis VH eam rationem ad ipſius umbilicorum diſtantiam SH, quam habet trajectoriæ deſcribendæ axis principalis ad ipſius umbilicorum diſtantiam, & propterea ejuſdem eſt ſpeciei. Inſuper cum VH, vH æquentur axi principali, & VS, vS a rectis TR, tr perpendiculariter biſecentur, liquet (ex lem. xv.) rectas illas trajectoriam deſcriptam tangere. *Q. E. F.*

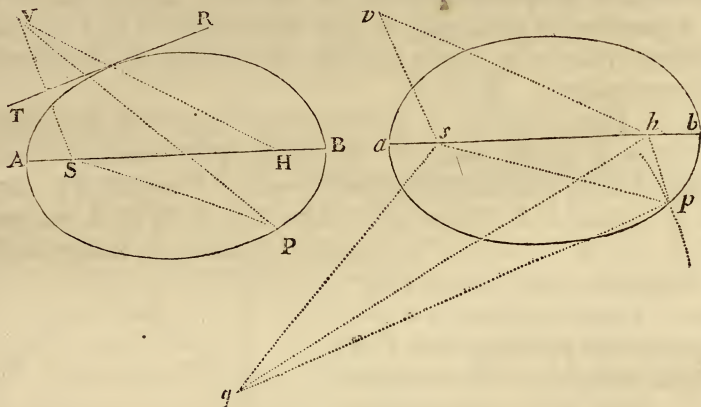
Caſ. 3. Dato umbilico S deſcribenda ſit trajectoria quæ rectam TR tanget in puncto dato R. In rectam TR demitte perpendicularem ST, & produc eandem ad V, ut ſit TV æqualis ST. Junge VR & rectam VS infinite productam ſeca in K & k, ita ut ſit VK ad SK & Vk ad Sk ut ellipſeos deſcribendæ axis principalis ad diſtantiam umbilicorum; circuloque ſuper diametro Kk deſcripto ſecetur producta recta VR in H, & umbilicis S, H, axe principali rectam VH æquante, deſcribatur trajectoria. Dico factum. Namque VH eſſe ad SH ut VK ad SK, atque ideo ut axis principalis trajectoriæ deſcribendæ ad diſtantiam umbilicorum ejus, patet ex demonſtratis in caſu ſecundo, & propterea trajectoriam deſcriptam ejuſdem eſſe ſpeciei cum deſcribenda, rectam vero TR qua angulus VRS biſecatur, tangere trajectoriam in puncto R, patet ex conicis. *Q. E. F.*



Caſ. 4. Circa umbilicum S deſcribenda jam ſit trajectoria APB, quæ tangat rectam TR, tranſeatque per punctum quodvis P extra tangentem datum, quæque ſimilis ſit figuræ apb, axe principali ab & umbilicis s, h deſcriptæ. In tangentem TR demitte perpendiculum ST, & produc idem ad V, ut ſit TV æqualis ST. Angulis autem VSP, SVP fac angulos hsq, shq æquales; centroque q & intervallo quod ſit ad ab ut SP ad VS deſcribe circulum ſecantem figuram apb in p. Junge sp & age SH quæ ſit ad sh ut eſt

SP ad

SP ad *sp*, quæque angulum *PSH* angulo *psh* & angulum *VSH* angulo *psq* æquales constituat. Denique umbilicis *S*, *H*, & axe principali *AB* distantiam *VH* æquante, describatur sectio conica. Dico factum. Nam si agatur *sv* quæ sit ad *sp* ut est *sh* ad *sq*, quæque constituat angulum *vsp* angulo *hsq* & angulum *vsh* angulo *psq* æquales, triangula *svh*, *spq* erunt similia, & propterea *vh* erit ad *pq* ut est *sh* ad *sq*, id est (ob similia triangula *VSP*, *hsq*) ut est *VS* ad *SP* seu *ab* ad *pq*. Æquantur ergo *vh* & *ab*.



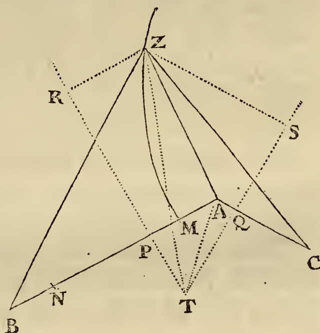
Porro ob similia triangula *VSH*, *vsh*, est *VH* ad *SH* ut *vh* ad *sh*, id est, axis conicæ sectionis jam descriptæ ad illius umbilicorum intervallum, ut axis *ab* ad umbilicorum intervallum *sh*; & propterea figura jam descripta similis est figuræ *apb*. Transit autem hæc figura per punctum *P*, eo quod triangulum *PSH* simile sit triangulo *psh*; & quia *VH* æquatur ipsius axi & *VS* bisecatur perpendiculariter a recta *TR*, tangit eadem rectam *TR*. *Q. E. F.*

LEMMA XVI.

A datis tribus punctis ad quartum non datum inflectere tres rectas quarum differentiæ vel dantur vel nullæ sunt.

Cas. 1. Sunto puncta illa data *A*, *B*, *C* & punctum quartum *Z*, quod invenire oportet; ob datam differentiam linearum *AZ*, *BZ*, locabitur

locabitur punctum Z in hyperbola cujus umbilici sunt A & B, & principalis axis differentia illa data. Sit axis ille MN. Cape PM ad MA ut est MN ad AB, & erecta PR perpendiculari ad AB, demissaque ZR perpendiculari ad PR; erit, ex natura hujus hyperbolæ, ZR ad AZ ut est MN ad AB. Simili discursu punctum Z locabitur in alia hyperbola, cujus umbilici sunt A, C & principalis axis differentia inter AZ & CZ, ducique potest QS ipsi AC perpendicularis, ad quam si ab hyperbolæ hujus puncto quovis Z demittatur normalis ZS, hæc fuerit ad AZ ut est differentia inter AZ & CZ ad AC. Dantur ergo rationes ipsarum ZR & ZS ad AZ, & idcirco datur earundem ZR & ZS ratio ad invicem; ideoque si rectæ RP, SQ concurrant in T, & agantur TZ & TA, figura $TRZS$ dabitur specie, & recta TZ in qua punctum Z alicubi locatur, dabitur positione. Dabitur etiam recta TA, ut & angulus ATZ; & ob datas rationes ipsarum AZ ac TZ ad ZS dabitur earundem ratio ad invicem; & inde dabitur triangulum ATZ, cujus vertex est punctum Z. *Q. E. I.*



Cas. 2. Si duæ ex tribus lineis, puta AZ & BZ, æquantur, ita age rectam TZ, ut bisecet rectam AB; dein quære triangulum ATZ ut supra.

Cas. 3. Si omnes tres æquantur, locabitur punctum Z in centro circuli per puncta A, B, C transeuntis. *Q. E. I.*

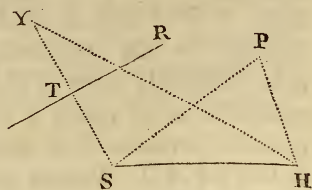
Solvitur etiam hoc lemma problematicum per librum tactionum *Apollonii* a *Vieta* restitutum.

PROPOSITIO XXI. PROBLEMA XIII.

Trajectoriam circa datum umbilicum describere, quæ transibit per puncta data & rectas positione datas continget.

Detur umbilicus S, punctum P, & tangens TR, & inveniendus sit umbilicus alter H. Ad tangentem demitte perpendiculum ST, & pro-

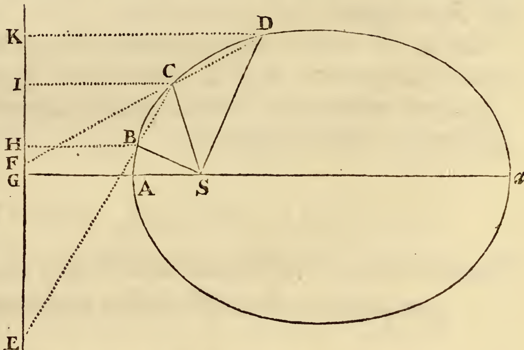
produc idem ad *Y*, ut ſit *TY* æqualis *ST*, & erit *YH* æqualis axi principali. Junge *SP*, *HP*, & erit *SP* differentia inter *HP* & axem principalem. Hoc modo ſi dentur plures tangentes *TR*, vel plura puncta *P*, devenietur ſemper ad lineas totidem *YH*, vel *PH*, a dictis punctis *Y* vel *P* ad umbilicum *H* ductas, quæ vel æquantur axibus, vel datis longitudinibus *SP* differunt ab iiſdem, atque ideo quæ vel æquantur ſibi invicem, vel datas habent differentias; & inde, per lemma ſuperius, datur umbilicus ille alter *H*. Habitis autem umbilicis una cum axis longitudine (quæ vel eſt *YH*; vel, ſi trajectoria ellipſis eſt, *PH* + *SP*; ſin hyperbola, *PH* — *SP*) habetur trajectoria. *Q. E. I.*



Scholium.

Ubi trajectoria eſt hyperbola, ſub nomine hujus trajectoriæ oppoſitam hyperbolam non comprehendo. Corpus enim pergendo in motu ſuo in oppoſitam hyperbolam tranſire non poteſt.

Caſus ubi dantur tria puncta ſic ſolvitur expeditius. Dentur puncta *B*, *C*, *D*. Junctas *BC*, *CD* produc ad *E*, *F*, ut ſit *EB* ad *EC* ut *SB* ad *SC*, & *FC* ad *FD* ut *SC* ad *SD*. Ad *EF* ductam & productam demitte normales *SG*, *BH*, inque *GS* infinite producta cape *GA* ad *AS* & *Ga* ad *aS* ut eſt *HB* ad *BS*; & erit *A* vertex, & *Aa* axis principalis trajectoriæ: quæ, perinde ut *GA* major, æqualis, vel minor fuerit quam *AS*, erit ellipſis, parabola vel hyperbola; puncto *a* in primo caſu cadente ad eandem partem lineæ *GF* cum puncto *A*; in ſecundo caſu abeunte in infinitum; in tertio cadente ad contrariam partem lineæ *GF*. Nam ſi demittantur ad *GF* perpendicula *CI*, *DK*; erit *IC* ad *HB* ut *EC* ad *EB*, hoc eſt, ut *SC* ad *SB*; & viciſſim *IC* ad *SC* ut *HB* ad *SB* ſive ut *GA* ad *SA*. Et



Et ſimili argumento probabitur eſſe *KD* ad *SD* in eadem ratione. Jacent ergo puncta *B*, *C*, *D* in coni ſectione circa umbilicum *S* ita deſcripta, ut rectæ omnes, ab umbilico *S* ad ſingula ſectionis puncta ductæ, ſint ad perpendicula a punctis iiſdem ad rectam *GF* demiſſa in data illa ratione.

Methodo haud multum diſſimili hujus problematis ſolutionem tradit clariſſimus geometra *de la Hire*, conicorum ſuorum lib. VIII. prop. XXV.

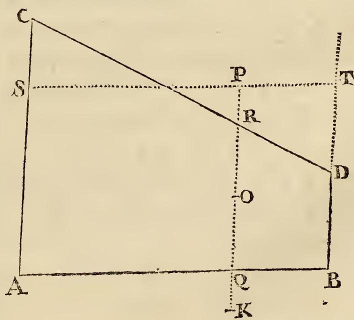
SECTIO V.

Inventio orbium ubi umbilicus neuter datur.

LEMMA XVII.

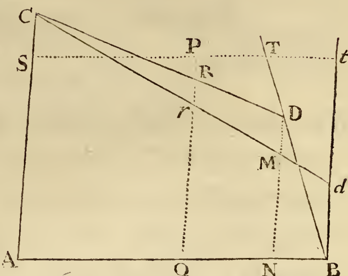
Si a datæ conicæ ſectionis puncto quovis P *ad trapezii alicujus* ABDC, *in conica illa ſectione inſcripti, latera quatuor infinite producta* AB, CD, AC, DB *totidem rectæ* PQ, PR, PS, PT *in datis angulis ducantur, ſingulæ ad ſingula: rectangulum ductarum ad oppoſita duo latera* PQ×PR, *erit ad rectangulum ductarum ad alia duo latera oppoſita* PS×PT *in data ratione.*

Caſ. 1. Ponamus primo lineas ad oppoſita latera ductas parallelas eſſe alterutri reliquorum laterum, puta *PQ* & *PR* lateri *AC*, & *PS* ac *PT* lateri *AB*. Sintque inſuper latera duo ex oppoſitis, puta *AC* & *BD*, ſibi invicem parallela. Et recta, quæ biſecat parallela illa latera, erit una ex diametris conicæ ſectionis, & biſecabit etiam *RQ*. Sit *O* punctum in quo *RQ* biſecatur, & erit *PO* ordinatim applicata ad diametrum illam. Produc *PO* ad *K*, ut ſit *OK* æqualis *PO*, & erit *OK* ordinatim applicata ad contrarias partes diametri. Cum igitur puncta *A*, *B*, *P* & *K* ſint ad conicam ſectionem, & *PK* ſecet *AB* in dato angulo, erit (per prop. 17, 19, 21 & 23. lib. III. coni-

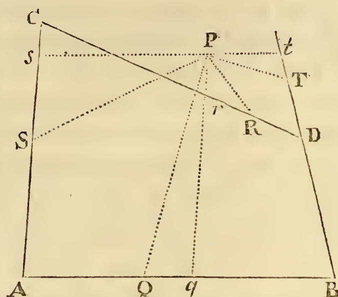


corum *Apollonii*) rectangulum *PQK* ad rectangulum *AQB* in data ratione. Sed *QK* & *PR* æquales sunt, utpote æqualium *OK*, *OP*, & *OQ*, *OR* differentiæ, & inde etiam rectangula *PQK* & *PQ* × *PR* æqualia sunt; atque ideo rectangulum *PQ* × *PR* est ad rectangulum *AQB*, hoc est ad rectangulum *PS* × *PT* in data ratione. *Q. E. D.*

Cas. 2. Ponamus jam trapezii latera opposita *AC* & *BD* non esse parallela. Age *Bd* parallelam *AC* & occurrentem tum rectæ *ST* in *t*, tum conicæ sectioni in *d*. Junge *Cd* secantem *PQ* in *r*, & ipsi *PQ* parallelam age *DM* secantem *Cd* in *M* & *AB* in *N*. Jam ob similia triangula *BTt*, *DBN*; est *Bt* seu *PQ* ad *Tt* ut *DN* ad *NB*. Sic & *Rr* est ad *AQ* seu *PS* ut *DM* ad *AN*. Ergo, ducendo antecedentes in antecedentes & consequentes in consequentes, ut rectangulum *PQ* in *Rr* est ad rectangulum *PS* in *Tt*, ita rectangulum *NDM* est ad rectangulum *ANB*, & (per cas. 1.) ita rectangulum *PQ* in *Pr* est ad rectangulum *PS* in *Pt*, ac divisim ita rectangulum *PQ* × *PR* est ad rectangulum *PS* × *PT*. *Q. E. D.*



Cas. 3. Ponamus denique lineas quatuor *PQ*, *PR*, *PS*, *PT* non esse parallelas lateribus *AC*, *AB*, sed ad ea utcunque inclinatas. Earum vice age *Pq*, *Pr* parallelas ipsi *AC*; & *Ps*, *Pt* parallelas ipsi *AB*; & propter datos angulos triangulorum *PQq*, *PRr*, *PSs*, *PTt*, dabuntur rationes *PQ* ad *Pq*, *PR* ad *Pr*, *PS* ad *Ps*, & *PT* ad *Pt*; atque ideo rationes compositæ *PQ* × *PR* ad *Pq* × *Pr*, & *PS* × *PT* ad *Ps* × *Pt*. Sed, per superius demonstrata, ratio *Pq* × *Pr* ad *Ps* × *Pt* data est: ergo & ratio *PQ* × *PR* ad *PS* × *PT*. *Q. E. D.*

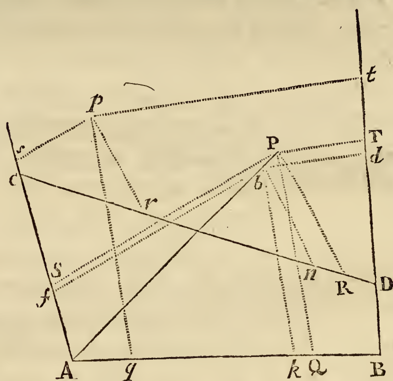


LEMMA

LEMMA XVIII.

Iisdem positis, si rectangulum ductarum ad opposita duo latera trapezii PQ×PR *sit ad rectangulum ductarum ad reliqua duo latera* PS×PT *in data ratione; punctum* P, *a quo lineæ ducuntur, tanget conicam sectionem circa trapezium descriptam.*

Per puncta *A*, *B*, *C*, *D* & aliquod infinitorum punctorum *P*, puta *p*, concipe conicam sectionem describi: dico punctum *P* hanc semper tangere. Si negas, junge *AP* secantem hanc conicam sectionem alibi quam in *P*, si fieri potest, puta in *b*. Ergo si ab his punctis *p* & *b* ducantur in datis angulis ad latera trapezii rectæ *pq*, *pr*, *ps*, *pt* & *bk*, *bn*, *bf*, *bd*; erit ut $bk \times bn$ ad $bf \times bd$ ita (per lem. XVII.) $pq \times pr$ ad $ps \times pt$, & ita (per hypoth.) $PQ \times PR$ ad $PS \times PT$. Est & propter similitudinem trapeziorum *bkAf*, *PQAS*, ut *bk* ad *bf* ita *PQ* ad *PS*. Quare, applicando terminos prioris proportionis ad terminos correspondentes hujus, erit *bn* ad *bd* ut *PR* ad *PT*. Ergo trapezia æquiangula *Dnbd*, *DRPT* similia sunt, & eorum diagonales *Db*, *DP* propterea coincidunt. Incidit itaque *b* in intersectionem rectarum *AP*, *DP* ideoque coincidit cum puncto *P*. Quare punctum *P*, ubicunque sumatur, incidit in assignatam conicam sectionem. *Q. E. D.*



Corol. Hinc si rectæ tres *PQ*, *PR*, *PS* a puncto communi *P* ad alias totidem positione datas rectas *AB*, *CD*, *AC*, singulæ ad singulas, in datis angulis ducantur, sitque rectangulum sub duabus ductis $PQ \times PR$ ad quadratum tertiæ *PS* in data ratione: punctum *P*, a quibus rectæ ducuntur, locabitur in sectione conica quæ tangit lineas *AB*, *CD* in *A* & *C*; & contra. Nam coeat linea

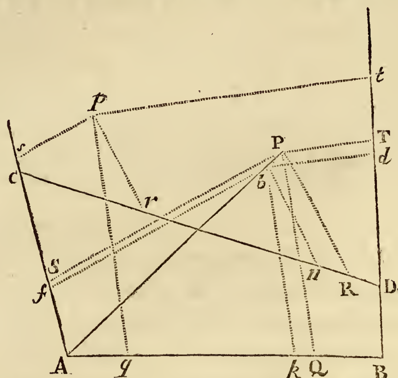
BD cum

De Motu Corporum

BD cum linea *AC*, manente positione trium *AB*, *CD*, *AC*; dein coeat etiam linea *PT* cum linea *PS*: & rectangulum $PS \times PT$ evadet *PS quad.* rectæque *AB*, *CD*, quæ curvam in punctis *A* & *B*, *C* & *D* secabant, jam curvam in punctis illis coeuntibus non amplius secare possunt, sed tantum tangent.

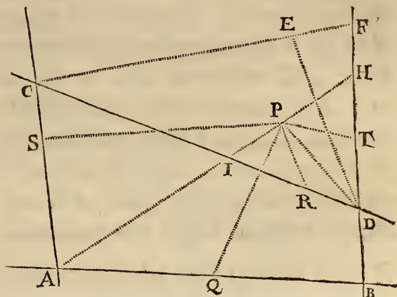
Scholium.

Nomen conicæ sectionis in hoc lemmate late sumitur, ita ut sectio tam rectilinea per verticem coni transiens, quam circularis basi parallela includatur. Nam si punctum *p* incidit in rectam, qua puncta *A* & *D* vel *C* & *B* junguntur, conica sectio vertetur in geminas rectas, quarum una est recta illa in quam punctum *p* incidit, & altera est recta qua alia duo ex punctis quatuor junguntur. Si trapezii anguli duo oppositi simul sumpti æquentur duobus rectis, & lineæ quatuor *PQ*, *PR*, *PS*, *PT* ducantur ad latera ejus vel perpendiculariter vel in angulis quibusvis æqualibus, sitque rectangulum sub duabus ductis $PQ \times PR$ æquale rectangulo sub duabus aliis $PS \times PT$, sectio conica evadet circulus. Idem fiet, si lineæ quatuor ducantur in angulis quibusvis, & rectangulum sub duabus ductis $PQ \times PR$ sit ad rectangulum sub aliis duabus $PS \times PT$ ut rectangulum sub sinubus angulorum *S*, *T*, in quibus duæ ultimæ *PS*, *PT* ducuntur, ad rectangulum sub sinubus angulorum *Q*, *R*, in quibus duæ primæ *PQ*, *PR* ducuntur. Cæteris in casibus locus puncti *P* erit aliqua trium figurarum, quæ vulgo nominantur sectiones conicæ. Vice autem trapezii *ABCD* substitui potest quadrilaterum, cujus latera duo opposita se mutuo instar diagonalium decussant. Sed & e punctis quatuor *A*, *B*, *C*, *D* possunt unum vel duo abire ad infinitum, eoque pacto latera figuræ, quæ ad puncta illa convergunt, evadere parallela: quo in casu sectio conica transibit per cætera puncta, & in plagas parallelarum abibit in infinitum.



LEMMA

LEMMA XIX.



Invenire punctum P, *a quo si rectæ quatuor* PQ, PR, PS, PT *ad alias totidem positione datas rectas* AB, CD, AC, BD, *singulæ ad singulas, in datis angulis ducantur, rectangulum sub duabus ductis,* PQ×PR, *sit ad rectangulum sub aliis duabus,* PS×PT, *in data ratione.*

Lineæ *AB*, *CD*, ad quas rectæ duæ *PQ*, *PR* unum rectangulorum continentes ducuntur, conveniant cum aliis duabus positione datis lineis in punctis *A*, *B*, *C*, *D*. Ab eorum aliquo *A* age rectam quamlibet *AH*, in qua velis punctum *P* reperiri. Secet ea lineas oppositas *BD*, *CD*, nimirum *BD* in *H* & *CD* in *I*, & ob datos omnes angulos figuræ, dabuntur rationes *PQ* ad *PA* & *PA* ad *PS*, ideoque ratio *PQ* ad *PS*. Auferendo hanc a data ratione *PQ* × *PR* ad *PS* × *PT*, dabitur ratio *PR* ad *PT*, & addendo datas rationes *PI* ad *PR*, & *PT* ad *PH* dabitur ratio *PI* ad *PH*, atque ideo punctum *P*. *Q. E. I.*

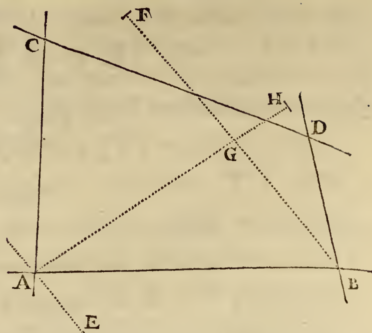
Corol. 1. Hinc etiam ad loci punctorum infinitorum *P* punctum quodvis *D* tangens duci potest. Nam chorda *PD*, ubi puncta *P* ac *D* conveniunt, hoc est, ubi *AH* ducitur per punctum *D*, tangens evadit. Quo in casu, ultima ratio evanescentium *IP* & *PH* invenietur ut supra. Ipsi igitur *AD* duc parallelam *CF*, occurrentem *BD* in *F*, & in ea ultima ratione sectam in *E*, & *DE* tangens erit, propterea quod *CF* & evanescens *IH* parallelæ sunt, & in *E* & *P* similiter sectæ.

Corol. 2. Hinc etiam locus punctorum omnium *P* definiri potest. Per quodvis punctorum *A*, *B*, *C*, *D*, puta *A*, duc loci tangentem *AE*, & per aliud quodvis punctum *B* duc tangenti parallelam *BF*

occurren-

De Motu Corporum

occurrentem loco in *F*. Invenietur autem punctum *F* per lem. XIX. Biseca *BF* in *G*, & acta indefinita *AG* erit positio diametri ad quam *BG* & *FG* ordinatim applicantur. Hæc *AG* occurrat loco in *H*, & erit *AH* diameter sive latus transversum, ad quod latus rectum erit ut *BGq* ad *AG* x *GH*. Si *AG* nusquam occurrit loco, linea *AH* existente infinita, locus erit parabola,



& latus rectum ejus ad diametrum *AG* pertinens erit $\frac{BGq}{AG}$. Sin ea alicubi occurrit, locus hyperbola erit, ubi puncta *A* & *H* sita sunt ad easdem partes ipsius *G*: & ellipsis, ubi *G* intermedium est, nisi forte angulus *AGB* rectus sit, & insuper *BG quad.* æquale rectangulo *AGH*, quo in casu circulus habebitur.

Atque ita problematis veterum de quatuor lineis ab *Euclide* incœpti & ab *Apollonio* continuati non calculus, sed compositio geometrica, qualem veteres quærebant, in hoc corollario exhibetur.

LEMMA XX.

Si parallelogrammum quodvis ASPQ *angulis duobus oppositis* A & P *tangit sectionem quamvis conicam in punctis* A & P; & *lateribus unius angulorum illorum infinite productis* AQ, AS *occurrit eidem sectioni conicæ in* B & C; *a punctis autem occursuum* B & C *ad quintum quodvis sectionis conicæ punctum* D *agantur rectæ duæ* BD, CD *occurrentes alteris duobus infinite productis parallelogrammi lateribus* PS, PQ *in* T & R: *erunt semper abscissæ laterum partes* PR & PT *ad invicem in data ratione. Et contra, si partes illæ abscissæ sunt ad invicem in data ratione, punctum* D *tanget sectionem conicam per puncta quatuor* A, B, C, P *transeuntem.*

Cas.

Caſ. 1. Jungantur BP, CP & a puncto D agantur rectæ duæ DG, DE, quarum prior DG ipſi AB parallela ſit & occurrat PB, PQ, CA in H, I, G; altera DE parallela ſit ipſi AC & occurrat PC, PS, AB in F, K, E: & erit (per lem. XVII.) rectangulum $DE \times DF$ ad rectangulum $DG \times DH$ in ratione data. Sed eſt PQ ad DE (ſeu IQ) ut PB ad HB, ideoque ut PT ad DH; & viciſſim PQ ad PT ut DE ad DH. Eſt & PR ad DF ut RC ad DC, ideoque ut (IG vel) PS ad DG, & viciſſim PR ad PS ut DF ad DG; & conjunctis rationibus fit rectangulum $PQ \times PR$ ad rectangulum $PS \times PT$ ut rectangulum $DE \times DF$ ad rectangulum $DG \times DH$, atque ideo in data ratione. Sed dantur PQ & PS, & propterea ratio PR ad PT datur. *Q. E. D.*

Caſ. 2. Quod ſi PR & PT ponantur in data ratione ad invicem, tum ſimili ratiocinio regrediendo, ſequetur eſſe rectangulum $DE \times DF$ ad rectangulum $DG \times DH$ in ratione data, ideoque punctum D (per lem. XVIII.) contingere conicam ſectionem tranſeuntem per puncta A, B, C, P. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc ſi agatur BC ſecans PQ in r, & in PT capiatur Pt in ratione ad Pr quam habet PT ad PR: erit Bt tangens conicæ ſectionis ad punctum B. Nam concipe punctum D coire cum puncto B, ita ut, chorda BD evaneſcente, BT tangens evadat; & CD ac BT coincident cum CB & Bt.

Corol. 2. Et vice verſa ſi Bt ſit tangens, & ad quodvis conicæ ſectionis punctum D conveniant BD, CD; erit PR ad PT ut Pr ad Pt. Et contra, ſi ſit PR ad PT ut Pr ad Pt: convenient BD, CD ad conicæ ſectionis punctum aliquod D.

Corol. 3. Conica ſectio non ſecat conicam ſectionem in punctis pluribus quam quatuor. Nam, ſi fieri poteſt, tranſeant duæ conicæ ſectiones per quinque puncta A, B, C, P, O; eaſque ſecet recta BD in punctis D, d, & ipſam PQ ſecet recta Cd in q. Ergo PR eſt ad

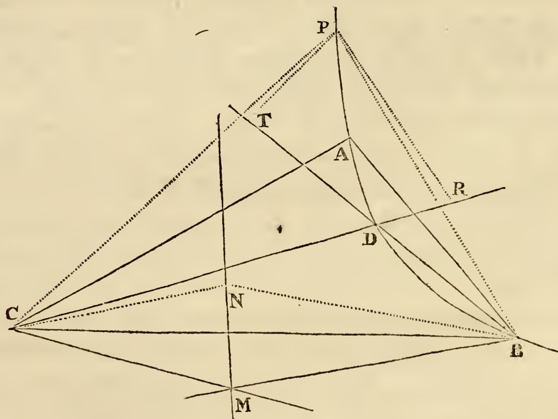
PT

PT ut *Pq* ad *PT*; unde *PR* & *Pq* sibi invicem æquantur, contra hypothesin.

LEMMA XXI.

Si rectæ duæ mobiles & infinitæ BM, CM *per data puncta* B, C *ceu polos ductæ, concursu suo* M *describant tertiam positione datam rectam* MN; *& aliæ duæ infinitæ rectæ* BD, CD *cum prioribus duabus ad puncta illa data* B, C *datos angulos* MBD, MCD *efficientes ducantur: dico quod hæ duæ* BD, CD *concursu suo* D *describent sectionem conicam per puncta* B, C *transeuntem. Et vice versa, si rectæ* BD, CD *concursu suo* D *describant sectionem conicam per data puncta* B, C, A *transeuntem, & sit angulus* DBM *semper æqualis angulo dato* ABC, *angulusque* DCM *semper æqualis angulo dato* ACB: *punctum* M *continget rectam positione datam.*

Nam in recta *MN* detur punctum *N*, & ubi punctum mobile *M* incidit in immotum *N*, incidat punctum mobile *D* in immotum *P*.



Junge *CN*, *BN*, *CP*, *BP*, & a puncto *P* age rectas *PT*, *PR* occurrentes ipsis *BD*, *CD* in *T* & *R*, & facientes angulum *BPT* æqualem

æqualem angulo dato BNM, & angulum CPR æqualem angulo dato CNM. Cum ergo (ex hypotheſi) æquales ſint anguli MBD, NBP, ut & anguli MCD, NCP; aufer communes NBD & NCD, & reſtabunt æquales NBM & PBT, NCM & PCR: ideoque triangula NBM, PBT ſimilia ſunt, ut & triangula NCM, PCR. Quare PT eſt ad NM ut PB ad NB, & PR ad NM ut PC ad NC. Sunt autem puncta B, C, N, P immobilia. Ergo PT & PR datam habent rationem ad NM, proindeque datam rationem inter ſe; atque ideo (per lem. xx.) punctum D, perpetuus rectarum mobilium BT & CR concurſus, contingit ſectionem conicam, per puncta B, C, P tranſeuntem. *Q. E. D.*

Et contra, ſi punctum mobile D contingat ſectionem conicam tranſeuntem per data puncta B, C, A, & ſit angulus DBM ſemper æqualis angulo dato ABC, & angulus DCM ſemper æqualis angulo dato ACB, & ubi punctum D incidit ſucceſſive in duo quævis ſectionis puncta immobilia p, P, punctum mobile M incidat ſucceſſive in puncta duo immobilia n, N: per eadem n, N agatur

recta nN, & hæc erit locus perpetuus puncti illius mobilis M. Nam, ſi fieri poteſt, verſetur punctum M in linea aliqua curva. Tanget ergo punctum D ſectionem conicam per puncta quinque B, C, A, p, P tranſeuntem, ubi punctum M perpetuo tangit lineam curvam. Sed & ex jam demonſtratis tanget etiam punctum D ſectionem conicam per eadem quinque puncta B, C, A, p, P, tranſeuntem, ubi

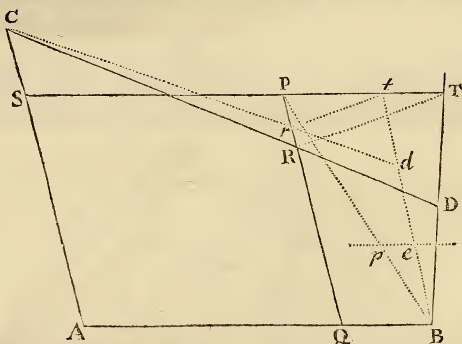
M punctum

punctum *M* perpetuo tangit lineam rectam. Ergo duæ sectiones conicæ transibunt per eadem quinque puncta, contra corol 3. lemmat. xx. Igitur punctum *M* versari in linea curva absurdum est. *Q. E. D.*

PROPOSITIO XXII. PROBLEMA XIV.

Trajectoriam per data quinque puncta describere.

Dentur puncta quinque *A, B, C, P, D*. Ab eorum aliquo *A* ad alia duo quævis *B, C*, quæ poli nominentur, age rectas *A B, A C*, hisque parallelas *T P S, P R Q* per punctum quartum *P*. Deinde a polis duobus *B, C* age per punctum quintum *D* infinitas duas *BDT, C R D*, novissime ductis *T P S, P R Q* (priorem priori & posteriorem posteriori) occurrentes in *T* & *R*. Denique de rectis *P T, P R*, acta recta *t r* ipsi *T R* parallela, abscinde quasvis *P t, P r* ipsis *P T, P R* proportionales; & si per earum terminos *t, r* & polos *B, C* actæ *B t, C r* concurrant in *d*, locabitur punctum illud *d* in trajectoria quæ-

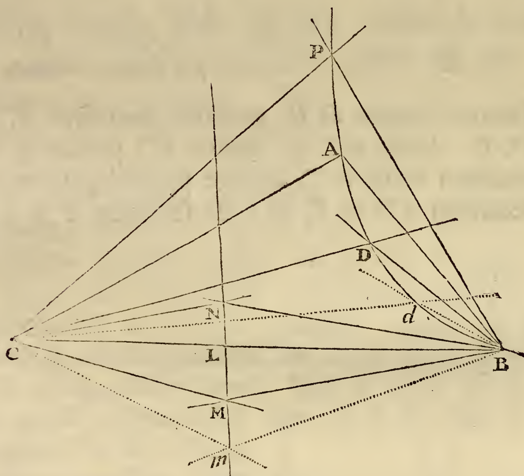


sita. Nam punctum illud *d* (per lem. xx) versatur in conica sectione per puncta quatuor *A, B, C, P* transeunte; & lineis *R r, T t* evanescentibus, coit punctum *d* cum puncto *D*. Transit ergo sectio conica per puncta quinque *A, B, C, P, D*. *Q. E. D.*

Idem aliter.

E punctis datis junge tria quævis *A, B, C*; & circum duo eorum *B, C*, ceu polos, rotando angulos magnitudine datos *A B C, A C B*, applicentur crura *B A, C A* primo ad punctum *D*, deinde ad punctum

ctum *P*, & notentur puncta *M*, *N* in quibus altera crura *BL*, *CL* casu utroque se decussant. Agatur recta infinita *MN*, & rotentur anguli illi mobiles circum polos suos *B*, *C*, ea lege ut crurum *BL*, *CL* vel *BM*, *CM* intersectio, quæ jam sit *m*, incidat semper in rectam illam infinitam *MN*; & crurum *BA*, *CA*, vel *BD*, *CD* intersectio, quæ jam sit *d*, trajectoriam quæsitam *PADdB* delineabit. Nam punctum *d* (per lem. XXI.) continget sectionem conicam



per puncta *B*, *C* transeuntem; & ubi punctum *m* accedit ad puncta *L*, *M*, *N*, punctum *d* (per constructionem) accedet ad puncta *ADP*. Describetur itaque sectio conica transiens per puncta quinque *A*, *B*, *C*, *P*, *D*. *Q. E. F.*

Corol. 1. Hinc recta expedite duci potest, quæ trajectoriam quæsitam in puncto quovis dato *B* continget. Accedat punctum *d* ad punctum *B*, & recta *Bd* evadet tangens quæsita.

Corol. 2. Unde etiam trajectoriarum centra, diametri & latera recta inveniri possunt, ut in corollario secundo lemmatis XIX.

Scholium.

Constructio prior evadet paulo simplicior jungendo *BP*, & in ea, si opus est, producta capiendo *Bp* ad *BP* ut est *PR* ad *PT*; & per *p* agendo rectam infinitam *pe* ipsi *SPT* parallelam, & in ea

M 2 capiendo

capiendo ſemper *p e* æqualem *P r*; & agendo rectas *B e*, *C r* concurrentes in *d*. Nam cum ſint *P r* ad *P t*, *P R* ad *P T*, *p B* ad *P B*, *p e* ad *P t* in eadem ratione; erunt *p e* & *P r* ſemper æquales. Hac methodo puncta trajectoriæ inveniuntur expeditiſſime, niſi mavis curvam, ut in conſtructione ſecunda, deſcribere mechanice.

PROPOSITIO XXIII. PROBLEMA XV.

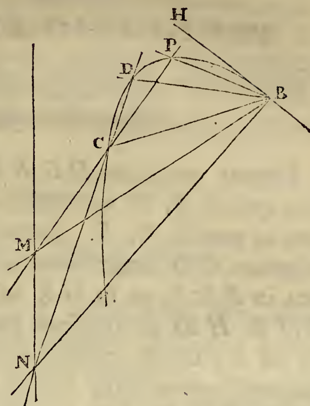
Trajectoriam deſcribere, quæ per data quatuor puncta tranſibit, & rectam continget poſitione datam.

Caſ. 1. Dentur tangens *H B*, punctum contactus *B*, & alia tria puncta *C*, *D*, *P*. Junge *B C*, & agendo *P S* parallelam rectæ *B H*, & *P Q* parallelam rectæ *B C*, comple parallelogrammum *B S P Q*. Age *B D* ſecantem *S P* in *T*, & *C D* ſecantem *P Q* in *R*. Denique, agendo quamvis *t r* ipſi *T R* parallelam, de *P Q*, *P S* abſcinde *P r*, *P t* ipſis *P R*, *P T* proportionales reſpective; & actarum *C r*, *B t* concurſus *d* (per lem. xx.) incidet ſemper in trajectoriam deſcribendam.

Idem aliter.

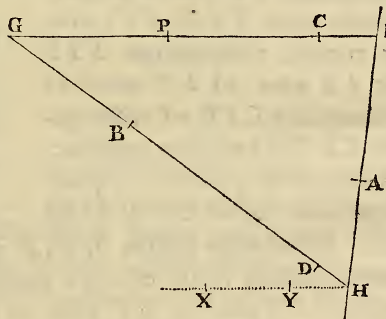
Revolvatur tum angulus magnitudine datus *C B H* circa polum *B*, tum radius quilibet rectilineus & utrinque productus *D C* circa polum *C*. Notentur puncta *M*, *N*, in quibus anguli crus *B C* ſecat radium illum, ubi crus alterum *B H* concurrit cum eodem radio in punctis *P* & *D*. Deinde ad actam infinitam *M N* concurrant perpetuo

petuo radius ille CP vel CD & anguli crus BC, & cruris alterius BH concursus cum radio delineabit trajectoriam quæsitam.



Nam si in constructionibus problematis superioris accedat punctum A ad punctum B, lineæ CA & CB coincident, & linea AB in ultimo suo situ fiet tangens BH; atque ideo constructiones ibi positæ evadent eædem cum constructionibus hic descriptis. Delineabit igitur cruris BH concursus cum radio sectionem conicam per puncta C, D, P transeuntem, & rectam BH tangentem in puncto B. *Q. E. F.*

Cas. 2. Dentur puncta quatuor B, C, D, P extra tangentem HI sita. Junge bina lineis BD, CP concurrentibus in G, tangentique occurrentibus in H & I. Secetur tangens in A, ita ut sit HA ad IA, ut est rectangulum sub media proportionali inter CG & GP & media proportionali inter BH & HD, ad rectangulum sub media proportionali inter DG & GB & media proportionali inter PI & IC; & erit A punctum contactus. Nam si rectæ PI parallela HX trajectoriam secet in punctis quibusvis X & Y: erit (ex conicis) punctum A ita locandum, ut fuerit HA *quad.* ad AI *quad.* in ratione composita ex ratione rectanguli XHY ad rectangulum BHD, seu rectanguli CGP ad rectangulum DGB, & ex ratione rectanguli BHD ad rectangulum PIC. Invento autem contactus puncto A, describetur trajectoria ut in casu primo. *Q. E. F.*



Capi autem potest punctum A vel inter puncta H & I, vel extra; & perinde trajectoria dupliciter describi.

PROPO-

PROPOSITIO XXIV PROBLEMA XVI.

Trajectoriam describere, quæ transibit per data tria puncta, & rectas duas positione datas continget.

Dentur tangentes *HI*, *KL* & puncta *B*, *C*, *D*. Per punctorum duo quævis *B*, *D* age rectam infinitam *BD* tangentibus occurrentem in punctis *H*, *K*. Deinde etiam per alia duo quævis *C*, *D* age infinitam *CD* tangentibus occurrentem in punctis *I*, *L*. Actas ita seca in *R* & *S*, ut sit *HR* ad *KR* ut est media proportionalis inter *BH* & *HD* ad mediam proportionalem inter *BK* & *KD*; & *IS* ad *LS* ut est media proportionalis inter *CI* & *ID* ad mediam proportionalem inter *CL* & *LD*. Seca autem pro lubitu vel inter puncta *K* & *H*, *I* & *L*, vel extra eadem; dein age *RS* secantem tangentes in *A* & *P*, & erunt *A* & *P* puncta contactuum. Nam si *A* & *P* supponantur esse puncta contactuum alicubi in tangentibus sita; & per punctorum *H*, *I*, *K*, *L* quodvis *I*, in tangente alterutra *HI* situm, agatur recta *IY* tangenti alteri *KL* parallela, quæ occurrat curvæ in *X* & *Y*, & in ea sumatur *IZ* media proportionalis inter *IX* & *IY*: erit, ex conicis, rectangulum *XIY* seu *IZ quad.* ad *LP quad.* ut rectangulum *CID* ad rectangulum *CLD*, id est (per constructionem) ut *SI quad.* ad *SL quad.* atque ideo *IZ* ad *LP* ut *SI* ad *SL*. Jacent ergo puncta *S*, *P*, *Z* in una recta. Porro tangentibus concurrentibus in *G*, erit (ex conicis) rectangulum *XIY* seu *IZ quad.* ad *IA quad.* ut *GP quad.* ad *GA quad.* ideoque *IZ* ad *IA* ut *GP* ad *GA*. Jacent ergo puncta *P*, *Z* & *A* in una recta, ideoque puncta *S*, *P* & *A* sunt in una recta. Et eodem argumento probabitur quod puncta *R*, *P* & *A* sunt in una recta. Jacent igitur puncta contactuum *A* & *P* in recta *RS*. Hisce autem inventis, trajectoria describetur ut in casu primo problematis superioris. *Q. E. F.*

In

In hac propoſitione, & caſu ſecundo propoſitionis ſuperioris conſtructiones eædem ſunt, ſive recta *X Y* trajectoriam ſecet in *X* & *Y*, ſive non ſecet; eæque non pendent ab hac ſectione. Sed demonſtratis conſtructionibus ubi recta illa trajectoriam ſecat, innoteſcunt conſtructiones, ubi non ſecat; iiſque ultra demonſtrandis brevitatis gratia non immoror.

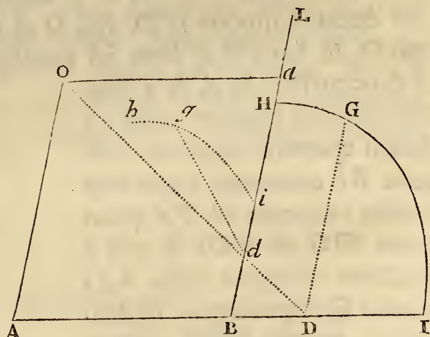
LEMMA XXII.

Figuras in alias ejuſdem generis figuras mutare.

Tranſmutanda ſit figura quævis *H G I*. Ducantur pro lubitu rectæ duæ parallelæ *A O*, *B L* tertiam quamvis poſitione datam *A B* ſecantes in *A* & *B*, & a figuræ puncto quovis *G*, ad rectam *AB* ducatur quævis *G D*, ipſi *O A* parallela. Deinde a puncto aliquo *O*, in linea *O A* dato, ad punctum *D* ducatur recta *O D*, ipſi *B L* occurrens in *d*, & a puncto occurſus erigatur recta *d g* datum quemvis angulum cum recta *BL* continens, atque eam habens rationem ad *O d* quam habet *D G* ad *O D*; & erit *g* punctum in figura nova *h g i* puncto *G* reſpondens. Eadem ratione puncta ſingula figuræ primæ dabunt puncta totidem figuræ novæ. Concipe igitur punctum *G* motu continuo percurrere puncta omnia figuræ primæ, & punctum *g* motu itidem continuo percurret puncta omnia figuræ novæ & eandem deſcribet. Diſtinctionis gratia nominemus *D G* ordinatam primam, *d g* ordinatam novam; *A D* abſciſſam primam, *a d* abſciſſam novam; *O* polum, *O D* radium abſcindentem, *O A* radium ordinatum primum, & *O a* (quo parallelogrammum *O A B a* completur) radium ordinatum novum.

Dico jam quod, ſi punctum *G* tangit rectam lineam poſitione datam, punctum *g* tanget etiam lineam rectam poſitione datam. Si punctum *G* tangit conicam ſectionem, punctum *g* tanget etiam conicam ſectionem. Conicis ſectionibus hic circulum annumero. Porro

ro si punctum G tangit lineam tertii ordinis analytici, punctum g tanget lineam tertii itidem ordinis; & sic de curvis lineis superiorum ordinum. Lineæ duæ erunt ejusdem semper ordinis analytici quas puncta G, g tangunt. Etenim ut est ad ad OA ita sunt Od ad OD, dg ad DG, & AB ad AD; ideoque AD æqualis est $\frac{OA \times AB}{ad}$, & DG æqualis est $\frac{OA \times dg}{ad}$. Jam si punctum G tangit rectam lineam, atque ideo in æquatione quavis, qua relatio inter abscissam AD & ordinatam DG habetur, indeterminatæ illæ AD & DG ad unicam tantum dimensionem ascendunt, scribendo in hac æquatione $\frac{OA \times AB}{ad}$ pro AD, & $\frac{OA \times dg}{ad}$ pro DG, producetur æquatio nova, in qua abscissa nova ad & ordinata nova dg ad unicam tantum dimensionem ascendent, atque ideo quæ designat lineam rectam. Sin AD & DG, vel earum alterutra, ascendebant ad duas dimensiones in æquatione prima, ascendent itidem ad & dg ad duas in æquatione secunda. Et sic de tribus vel pluribus dimensionibus. Indeterminatæ ad, dg in æquatione secunda, & AD, DG in prima ascendent semper ad eundem dimensionum numerum, & propterea lineæ, quas puncta G, g tangunt, sunt ejusdem ordinis analytici.



Dico præterea, quod si recta aliqua tangat lineam curvam in figura prima; hæc recta eodem modo cum curva in figuram novam translata tanget lineam illam curvam in figura nova; & contra. Nam si curvæ puncta quævis duo accedunt ad invicem & coeunt in figura prima, puncta eadem translata accedent ad invicem & coibunt in figura nova; atque ideo rectæ, quibus hæc puncta junguntur, simul evadent curvarum tangentes in figura utraque.

Componi possent harum assertionum demonstrationes more magis geometrico. Sed brevitati consulo.

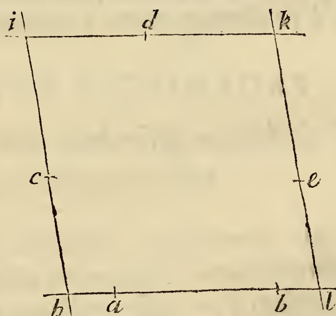
Igitur

Igitur si figura rectilinea in aliam transmutanda est, sufficit rectarum, a quibus conflatur, intersectiones transferre, & per easdem in figura nova lineas rectas ducere. Sin curvilineam transmutare oportet, transferenda sunt puncta, tangentes, & aliæ rectæ, quarum ope curva linea definitur. Inservit autem hoc lemma solutioni difficiliorum problematum, transmutando figuras propositas in simpliciores. Nam rectæ quævis convergentes transmutantur in parallelas, adhibendo pro radio ordinato primo lineam quamvis rectam, quæ per concursum convergentium transit; idque quia concursus ille hoc pacto abit in infinitum; lineæ autem parallelæ sunt, quæ nusquam concurrunt. Postquam autem problema solvitur in figura nova; si per inversas operationes transmutetur hæc figura in figuram primam, habebitur solutio quæsita.

Utile est etiam hoc lemma in solutione solidorum problematum. Nam quoties duæ sectiones conicæ obvenerint, quarum intersectione problema solvi potest, transmutare licet earum alterutram, si hyperbola sit vel parabola, in ellipsin: deinde ellipsis facile mutatur in circulum. Recta item & sectio conica, in constructione planorum problematum, vertuntur in rectam & circulum.

PROPOSITIO XXV. PROBLEMA XVII.

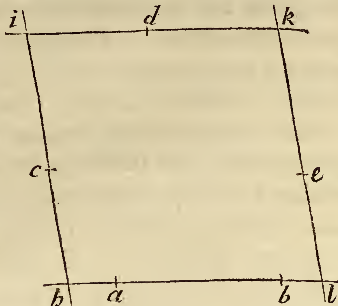
Trajectoriam describere, quæ per data duo puncta transibit, & rectas tres continget positione datas.



Per concursum tangentium quarumvis duarum cum se invicem, & concursum tangentis tertiæ cum recta illa, quæ per puncta duo data transit, age rectam infinitam; eaque adhibita pro radio ordinato primo, transmutetur figura, per lemma superius, in figuram novam. In hac figura tangentes illæ duæ evadent sibi invicem parallelæ, & tangens tertia fiet parallela rectæ per puncta duo data transeunti. Sunto *h i*, *k l* tangentes illæ duæ parallelæ, *i k* tangens tertia, & *h l* recta huic

parallela

parallela transiens per puncta illa *a*, *b*, per quæ conica sectio in hac figura nova transire debet, & parallelogrammum *h i k l* complens. Secentur rectæ *h i*, *i k*, *k l* in *c*, *d*, *e*, ita ut sit *h c* ad latus quadratum rectanguli *a h b*, *i c* ad *i d*, & *k e* ad *k d* ut est summa rectarum *h i* & *k l* ad summam trium linearum, quarum prima est recta *i k*, & alteræ duæ sunt latera quadrata rectangulorum *a h b* & *a l b*: & erunt *c*, *d*, *e* puncta contactuum. Etenim, ex conicis, sunt *h c* quadratum ad rectangulum *a h b*, & *i c* quadratum ad *i d* quadratum, & *k e* quadratum ad *k d* quadratum, & *e l* quadratum ad rectangulum *a l b* in eadem ratione; & propterea *h c* ad latus quadratum ipsius *a h b*, *i c* ad *i d*, *k e* ad *k d*, & *e l* ad latus quadratum ipsius *a l b* sunt in subduplicata illa ratione, & composite, in data ratione omnium antecedentium *h i* & *k l* ad omnes consequentes, quæ sunt latus quadratum rectanguli *a h b*, & recta *i k*, & latus quadratum rectanguli *a l b*. Habentur igitur ex data illa ratione puncta contactuum *c*, *d*, *e*, in figura nova. Per inversas operationes lemmatis novissimi transferantur hæc puncta in figuram primam, & ibi (per prob. xiv.) describetur trajectoria. *Q. E. F.* Cæterum perinde ut puncta *a*, *b* jacent vel inter puncta *h*, *l*, vel extra, debent puncta *c*, *d*, *e* vel inter puncta *h*, *i*, *k*, *l* capi, vel extra. Si punctorum *a*, *b* alterutrum cadit inter puncta *h*, *l*, & alterum extra, problema impossibile est.

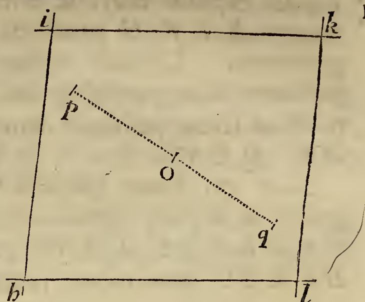


PROPOSITIO XXVI. PROBLEMA XVIII.

Trajectoriam describere, quæ transibit per punctum datum, & rectas quatuor positione datas continget.

Ab intersectione communi duarum quarumlibet tangentium ad intersectionem communem reliquarum duarum agatur recta infinita, & eadem pro radio ordinato primo adhibita, transmutetur figura (per lem. xxii.) in figuram novam, & tangentes binæ, quæ ad radium ordinatum primum concurrebant, jam evadent parallelæ. Sunto

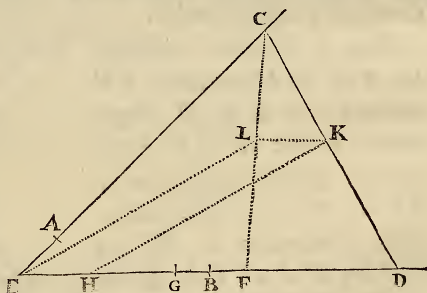
to illæ $h\,i$ & $k\,l$, $i\,k$ & $h\,l$ continentes parallelogrammum $h\,i\,k\,l$. Sitque p punctum in hac nova figura puncto in figura prima dato respondens. Per figuræ centrum O agatur $p\,q$, & existente $O\,q$ æquali $O\,p$, erit q punctum alterum per quod sectio conica in hac figura nova transire debet. Per lemmatis XXII. operationem inversam transferatur hoc punctum in figuram primam, & ibi habebuntur puncta duo per quæ trajectoria describenda est. Per eadem vero describi potest trajectoria illa per problema XVII. *Q. E. F.*



LEMMA XXIII.

Si rectæ duæ positione datæ AC, BD *ad data puncta* A, B, *terminentur, datamque habeant rationem ad invicem, &* *recta* CD, *qua puncta indeterminata* C, D *junguntur, secetur in ratione data in* K: *dico quod punctum* K *locabitur in recta positione data.*

Concurrant enim rectæ AC, BD in E, & in BE capiatur BG ad AE ut est BD ad AC, sitque FD semper æqualis datæ EG; & erit ex constructione EC ad GD, hoc est, ad EF ut AC ad BD, ideoque in ratione data, & propterea dabitur specie triangulum EFC. Secetur CF in L ut sit CL ad CF in ratione CK ad CD; & ob datam illam rationem, dabitur etiam specie triangulum EFL; proindeque punctum L locabitur in recta EL positione data. Junge LK, & similia erunt triangula CLK, CFD; & ob datam FD & datam rationem LK ad FD, dabitur LK. Huic



 æqualis

De Motu Corporum

æqualis capiatur *EH*, & erit ſemper *ELKH* parallelogrammum. Locatur igitur punctum *K* in parallelogrammi illius latere poſitione dato *HK*. *Q.E.D.*

Corol. Ob datam ſpecie figuram *EFLC*, rectæ tres *EF*, *EL* & *EC*, id eſt, *GD*, *HK* & *EC*, datas habent rationes ad invicem.

LEMMA XXIV.

Si rectæ tres tangant quamcunque coni ſectionem, quarum duæ parallelæ ſint ac dentur poſitione; dico quod ſectionis ſemidiameter hiſce duabus parallela, ſit media proportionalis inter harum ſegmenta, punctis contactuum & tangenti tertiæ interjecta.

Sunto *AF*, *GB* parallelæ duæ coni ſectionem *ADB* tangentes in *A* & *B*; *EF* recta tertia coni ſectionem tangens in *I*, & occurrens prioribus tangentibus in *F* & *G*; ſitque *CD* ſemidiameter figuræ tangentibus parallela: dico quod *AF*, *CD*, *BG* ſunt continue proportionales.

Nam ſi diametri conjugatæ *AB*, *DM* tangenti *FG* occurrant in *E* & *H*, ſeque mutuo ſecent in *C*, & compleatur parallelogrammum *IKCL*; erit ex natura ſectionum conicarum ut *EC* ad *CA* ita *CA* ad *CL*, & ita diviſim *EC*—*CA* ad *CA*—*CL*, ſeu *EA* ad *AL*, & compoſite *EA* ad *EA*+*AL* ſeu *EL* ut *EC* ad *EC*+*CA* ſeu *EB*; ideoque, ob ſimilitudinem triangulorum *EAF*, *ELI*, *ECH*, *EBG*, *AF* ad *LI* ut

LI ut *CH* ad *BG*. Eſt itidem, ex natura ſectionum conicarum, *LI* ſeu *CK* ad *CD* ut *CD* ad *CH*; atque ideo ex æquo perturbate *AF* ad *CD* ut *CD* ad *BG*. *Q. E. D.*

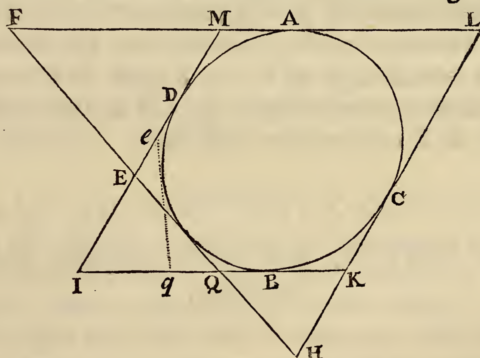
Corol. 1. Hinc ſi tangentes duæ *FG*, *PQ* tangentibus parallelis *AF*, *BG* occurrant in *F* & *G*, *P* & *Q*, ſeque mutuo ſecent in *O*; erit ex æquo perturbate *AF* ad *BQ* ut *AP* ad *BG*, & diviſim ut *FP* ad *GQ*, atque ideo ut *FO* ad *OG*.

Corol. 2. Unde etiam rectæ duæ *PG*, *FQ*, per puncta *P* & *G*, *F* & *Q* ductæ, concurrent ad rectam *ACB* per centrum figuræ & puncta contactuum *A*, *B* tranſeuntem.

LEMMA XXV.

Si parallelogrammi latera quatuor infinite producta tangant ſectionem quamcunque conicam, & abſcindantur ad tangentem quamvis quintam; ſumantur autem laterum quorumvis duorum conterminorum abſciſſæ terminatæ ad angulos oppoſitos parallelogrammi: dico quod abſciſſa alterutra ſit ad latus illud a quo eſt abſciſſa, ut pars lateris alterius contermini inter punctum contactus & latus tertium eſt ad abſciſſarum alteram.

Tangant parallelogrammi *MLIK* latera quatuor *ML*, *IK*, *KL*, *MI* ſectionem conicam in *A*, *B*, *C*, *D*, & ſecet tangens quinta *FQ*



hæc latera in *F*, *Q*, *H* & *E*; ſumantur autem laterum *MI*, *KI* abſciſſæ

abſciſſæ *ME*, *KQ*, vel laterum *KL*, *ML* abſciſſæ *KH*, *MF*: dico quod ſit *ME* ad *MI* ut *BK* ad *KQ*; & *KH* ad *KL* ut *AM* ad *MF*. Nam per corollarium primum lemmatis ſuperioris eſt *ME* ad *EI* ut *AM* ſeu *BK* ad *BQ*, & componendo *ME* ad *MI* ut *BK* ad *KQ*. *Q. E. D.* Item *KH* ad *HL* ut *BK* ſeu *AM* ad *AF*, & dividendo *KH* ad *KL* ut *AM* ad *MF*. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc ſi datur parallelogrammum *IKLM*, circa datam ſectionem conicam deſcriptum, dabitur rectangulum $KQ \times ME$, ut & huic æquale rectangulum $KH \times MF$. Æquantur enim rectangula illa ob ſimilitudinem triangulorum *KQH*, *MFE*.

Corol. 2. Et ſi ſexta ducatur tangens *eq* tangentibus *KI*, *MI* occurrens in *q* & *e*; rectangulum $KQ \times ME$ æquabitur rectangulo $Kq \times Me$; eritque *KQ* ad *Me* ut *Kq* ad *ME*, & diviſim ut *Qq* ad *Ee*.

Corol. 3. Unde etiam ſi *Eq*, *eQ* jungantur & biſecentur, & recta per puncta biſectionum agatur, tranſibit hæc per centrum ſectionis conicæ. Nam cum ſit *Qq* ad *Ee* ut *KQ* ad *Me*, tranſibit eadem recta per medium omnium *Eq*, *eQ*, *MK* (per lem. XXIII.) & medium rectæ *MK* eſt centrum ſectionis.

PROPOSITIO XXVII. PROBLEMA XIX.

Trajectoriam deſcribere, quæ rectas quinque poſitione datas continget.

Dentur poſitione tangentes *ABG*, *BCF*, *GCD*, *FDE*, *EA*. Figuræ quadrilateræ ſub quatuor quibuſvis contentæ *ABFE* diagonales

gonales *AF*, *BE* biseca in *M* & *N*, & (per corol. 3. lem. xxv.) recta *MN* per puncta bisectionum acta transibit per centrum trajectoriæ. Rursus figuræ quadrilateræ *B G D F*, sub aliis quibusvis quatuor tangentibus contentæ, diagonales (ut ita dicam) *B D*, *G F* biseca in *P* & *Q*: & recta *P Q* per puncta bisectionum acta transibit per centrum trajectoriæ. Dabitur ergo centrum in concursu bisecantium. Sit illud *O*. Tangenti cuivis *B C* parallelam age *K L*, ad eam distantiam ut centrum *O* in medio inter parallelas locetur,

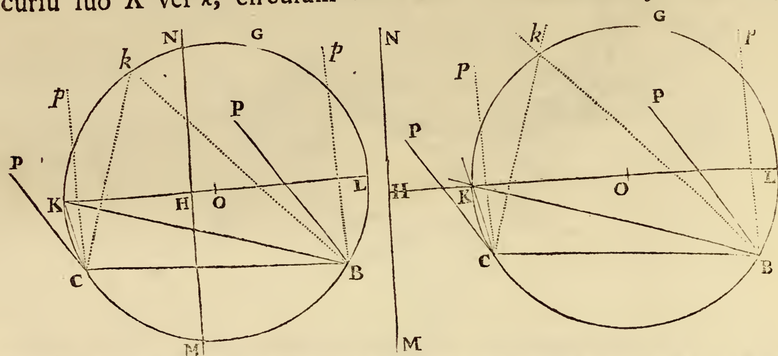
& acta *K L* tanget trajectoriam describendam. Secet hæc tangentes alias quasvis duas *G C D*, *F D E* in *L* & *K*. Per harum tangentium non parallelarum *CL*, *FK* cum parallelis *CF*, *KL* concursus *C* & *K*, *F* & *L* age *C K*, *F L* concurrentes in *R*, & recta *O R* ducta & producta secabit tangentes parallelas *C F*, *K L* in punctis contactuum. Patet hoc per corol. 2. lem. xxiv. Eadem methodo invenire licet alia contactuum puncta, & tum demum per construct. prob. xiv. trajectoriam describere. *Q. E. F.*

Scholium.

Problemata, ubi dantur trajectoriarum vel centra vel asymptoti, includuntur in præcedentibus. Nam datis punctis & tangentibus una cum centro, dantur alia totidem puncta aliæque tangentes a centro ex altera ejus parte æqualiter distantes. Asymptotos autem pro tangente habenda est, & ejus terminus infinite distans (si ita loqui

qui fas ſit) pro punćto contaćtus. Concipe tangentis cujuſvis punćtum contaćtus abire in infinitum, & tangens vertetur in Aſymptoton, atque conſtrućtiones problematum præcedentium vertentur in conſtrućtiones ubi Aſymptotos datur.

Poſtquam trajećtoria deſcripta eſt, invenire licet axes & umbilicos ejus hac methodo. In conſtrućtione & figura lemmatis XXI. fac ut angulorum mobilium *PBN*, *PCN* crura *BP*, *CP*, quorum concurſu trajećtoria deſcribebatur, ſint ſibi invicem parallela, eumque ſervantia ſitum revolvantur circa polos ſuos *B*, *C* in figura illa. Interea vero deſcribant altera angulorum illorum crura *CN*, *BN*, concurſu ſuo *K* vel *k*, circulum *BGKC*. Sit circuli hujus centrum



O. Ab hoc centro ad regulam *MN*, ad quam altera illa crura *CN*, *BN* interea concurrebant, dum trajećtoria deſcribebatur, demitte normalem *OH* circulo occurrentem in *K* & *L*. Et ubi crura illa altera *CK*, *BK* concurrunt ad punćtum illud *K* quod regulæ propius eſt, crura prima *CP*, *BP* parallela erunt axi majori, & perpendicularia minori; & contrarium eveniet, ſi crura eadem concurrunt ad punćtum remotius *L*. Unde ſi detur trajećtoriæ centrum, dabuntur axes. Hiſce autem datis, umbilici ſunt in promptu.

Axium vero quadrata ſunt ad invicem ut *KH* ad *LH*, & inde facile eſt trajećtoriam ſpecie datam per data quatuor punćta deſcribere. Nam ſi duo ex punćtis datis conſtituantur poli *C*, *B*, tertium dabit angulos mobiles, *PCK*, *PBK*; his autem datis deſcribi poteſt circulus *BGKC*. Tum ob datam ſpecie trajećtoriam, dabitur ratio *OH* ad *OK*, ideoque ipſa *OH*. Centro *O* & intervallo *OH* deſcribe

describe alium circulum, & recta, quæ tangit hunc circulum, & transit per concursum crurum CK, BK, ubi crura prima CP, BP concurrunt ad quartum datum punctum, erit regula illa MN cujus ope trajectoria describetur. Unde etiam vicissim trapezium specie datum (si casus quidam impossibiles excipiantur) in data quavis sectione conica in scribi potest.

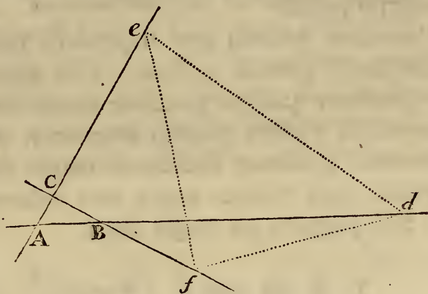
Sunt & alia lemmata quorum ope trajectoriæ specie datæ, datis punctis & tangentibus, describi possunt. Ejus generis est quod, si recta linea per punctum quodvis positione datum ducatur, quæ datam coni sectionem in punctis duobus intersecet, & intersectionum intervallum bisecetur, punctum bisectionis tanget aliam coni sectionem ejusdem speciei cum priore, atque axes habentem prioris axibus parallelos. Sed propero ad magis utilia.

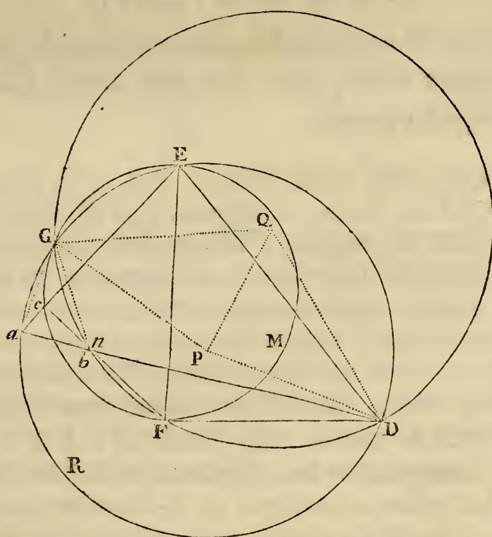
LEMMA XXVI.

Trianguli specie & magnitudine dati tres angulos ad rectas totidem positione datas, quæ non sunt omnes parallelæ, singulos ad singulas ponere.

Dantur positione tres rectæ infinitæ AB, AC, BC, & oportet triangulum DEF ita locare, ut angulus ejus D lineam AB, angulus E lineam AC, & angulus F lineam BC tangat. Super DE, DF & EF describe tria circulorum segmenta DRE, DGF, EMF, quæ capiant angulos angulis BAC, ABC, ACB æquales respective. Describantur autem hæc segmenta ad eas partes linearum DE, DF, EF, ut literæ $DRED$ eodem ordine cum literis $BACB$, literæ $DGFD$ eodem cum literis $ABCA$, & literæ $EMFE$ eodem cum literis $ACBA$ in orbem redeant; deinde compleantur hæc segmenta in circulos integros. Secent circuli duo priores se mutuo in G, sintque centra eorum P & Q. Junctis GP, PQ, cape Ga ad AB ut est GP ad PQ, & centro G, intervallo Ga describe circulum, qui secet circulum primum DGE in a. Jungatur tum aD secans circulum secundum DFG in b, tum aE secans circulum tertium EMF in c. Et jam licet figuram $ABCdef$ constituere similem & æqualem figuræ $abcDEF$. Quo facto perficitur problema.

Agatur enim Fc ipsi $a\mathcal{D}$ occurrens in n, & jungantur aG, bG, $\mathcal{Q}G$, $\mathcal{Q}\mathcal{D}$, $\mathcal{P}\mathcal{D}$. Ex constructione est angulus $Ea\mathcal{D}$ æqualis angulo CAB, & angulus acF æqualis angulo ACB, ideoque triangulum anc triangulo ABC æquiangulum. Ergo angulus anc seu $Fn\mathcal{D}$ angulo ABC, ideoque angulo $Fb\mathcal{D}$ æqualis est; & prop-





terea punctum n incidit in punctum b. Porro angulus $G\mathcal{P}\mathcal{Q}$, qui dimidius est anguli ad centrum $G\mathcal{P}\mathcal{D}$, æqualis est angulo ad circumferentiam $Ga\mathcal{D}$; & angulus $G\mathcal{Q}\mathcal{P}$, qui dimidius est anguli ad centrum $G\mathcal{Q}\mathcal{D}$, æqualis est complemento ad duos rectos anguli ad circumferentiam $Gb\mathcal{D}$, ideoque æqualis angulo Gba; suntque ideo

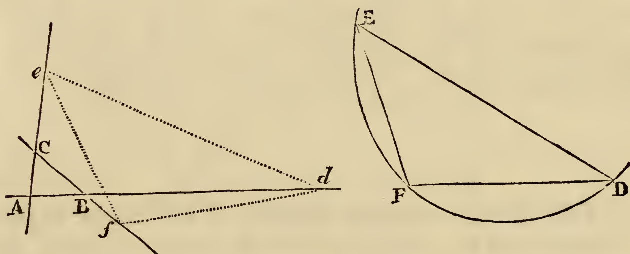
ideo triangula *G P Q*, *G a b* similia; & *G a* est ad *a b* ut *G P* ad *P Q*; id est (ex constructione) ut *G a* ad *A B*. Æquantur itaque *a b* & *A B*; & propterea triangula *a b c*, *A B C*, quæ modo similia esse probavimus, sunt etiam æqualia. Unde, cum tangant insuper trianguli *D E F* anguli *D*, *E*, *F* trianguli *a b c* latera *a b*, *a c*, *b c* respective, compleri potest figura *A B C d e f* figuræ *a b c D E F* similis & æqualis, atque eam complendo solvetur problema. *Q. E. F.*

Corol. Hinc recta duci potest cujus partes longitudine datæ rectis tribus positione datis interjacebunt. Concipe triangulum *D E F*, puncto *D* ad latus *E F* accedente, & lateribus *D E*, *D F* in directum positis, mutari in lineam rectam, cujus pars data *D E* rectis positione datis *A B*, *A C*, & pars data *D F* rectis positione datis *A B*, *B C* interponi debet; & applicando constructionem præcedentem ad hunc casum solvetur problema.

PROPOSITIO XXVIII. PROBLEMA XX.

Trajectoriam specie & magnitudine datam describere, cujus partes datæ rectis tribus positione datis interjacebunt.

Describenda sit trajectoria, quæ sit similis & æqualis lineæ curvæ *D E F*, quæque a rectis tribus *A B*, *A C*, *B C* positione datis, in



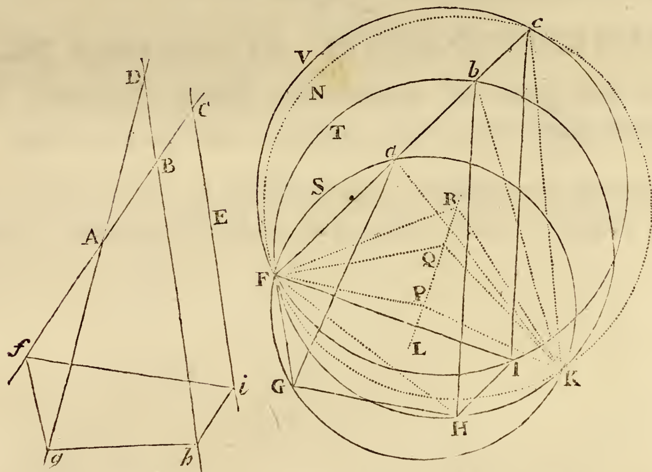
partes datis hujus partibus *D E* & *E F* similes & æquales secabitur.

Age rectas *D E*, *E F*, *D F*, & trianguli hujus *D E F* pone angulos *D*, *E*, *F* ad rectas illas positione datas (per lem. XXVI) dein circa triangulum describe trajectoriam curvæ *D E F* similem & æqualem. *Q. E. F.*

LEMMA XXVII.

Trapezium ſpecie datum deſcribere, cujus anguli ad rectas quatuor poſitione datas, quæ neque omnes parallelæ ſunt, neque ad commune punctum convergunt, ſinguli ad ſingulas conſiſtent.

Dentur poſitione rectæ quatuor *ABC*, *AD*, *BD*, *CE*; quarum prima ſecet ſecundam in *A*, tertiam in *B*, & quartam in *C*: & deſcribendum ſit trapezium *fghi*, quod ſit trapezio *FGHI* ſimile; & cujus angulus *f*, angulo dato *F* æqualis, tangat rectam *ABC*; cæterique anguli *g*, *h*, *i*, cæteris angulis datis *G*, *H*, *I* æquales, tangant cæteras lineas *AD*, *BD*, *CE* reſpective. Jungatur *FH* & ſuper *FG*, *FH*, *FI* deſcribantur totidem circulorum ſegmenta



FSG, *FTH*, *FVI*; quorum primum *FSG* capiat angulum æqualem angulo *BAD*, ſecundum *FTH* capiat angulum æqualem angulo *CBD*, ac tertium *FVI* capiat angulum æqualem angulo *ACE*. Deſcribi autem debent ſegmenta ad eas partes linearum *FG*, *FH*, *FI*, ut literarum *FSGF* idem ſit ordo circularis qui literarum *BADB*, utque literæ *FTHF* eodem ordine cum literis *CBDC*, & literæ *FVIF* eodem cum literis *ACEA* in orbem redeant. Compleantur ſegmenta in circulos integros, ſitque

P cen-

P centrum circuli primi *FSG*, & *Q* centrum secundi *FTH*. Jungatur & utrinque producatur *PQ*, & in ea capiatur *QR* in ea ratione ad *PQ* quam habet *BC* ad *AB*. Capiatur autem *QR* ad eas partes puncti *Q* ut literarum *P*, *Q*, *R* idem sit ordo atque literarum *A*, *B*, *C*: centroque *R* & intervallo *RF* describatur circulus quartus *FNc* secans circulum tertium *FVI* in *c*. Jungatur *Fc* secans circulum primum in *a*, & secundum in *b*. Agantur *aG*, *bH*, *cI*, & figuræ *abcFGHI* similis constitui potest figura *ABC fghi*. Quo facto erit trapezium *fghi* illud ipsum, quod constituere oportebat.

Secent enim circuli duo primi *FSG*, *FTH* se mutuo in *K*. Jungantur *PK*, *QK*, *RK*, *aK*, *bK*, *cK*, & producatur *QP* ad *L*. Anguli ad circumferentias *FaK*, *FbK*, *FcK* sunt semisses angulorum *FPK*, *FQK*, *FRK* ad centra, ideoque angulorum illorum dimidiis *LPK*, *LQK*, *LRK* æquales. Est ergo figura *PQRK* figuræ *abcK* æquiangula & similis, & propterea *ab* est ad *bc* ut *PQ* ad *QR*, id est, ut *AB* ad *BC*. Angulis insuper *FaG*, *FbH* *FcI* æquantur *fAg*, *fBh*, *fCi* per constructionem. Ergo figuræ *abcFGHI* figura similis *ABCfghi* compleri potest. Quo facto trapezium *fghi* constituetur simile trapezio *FGHI*, & angulis suis *f*, *g*, *h*, *i* tanget rectas *ABC*, *AD*, *BD*, *CE*. *Q.E.F.*

Corol. Hinc recta duci potest cujus partes, rectis quatuor positione datis dato ordine interjectæ, datam habebunt proportionem ad invicem. Augeantur anguli *FGH*, *GHI* usque eo, ut rectæ *FG*, *GH*, *HI* in directum jaceant, & in hoc casu construendo problema ducetur recta *fghi*, cujus partes *fg*, *gh*, *hi*, rectis quatuor positione datis *AB* & *AD*, *AD* & *BD*, *BD* & *CE* interjectæ, erunt ad invicem ut lineæ *FG*, *GH*, *HI*, eundemque servabunt ordinem inter se. Idem vero sic fit expeditius.

Producantur *AB* ad *K*, & *BD* ad *L*, ut sit *BK* ad *AB* ut *HI* ad *GH*; & *DL* ad *BD* ut *GI* ad *FG*; & jungatur *KL* occurrens rectæ *CE* in *i*. Producatur *iL* ad *M*, ut sit *LM* ad *iL* ut *GH* ad *HI*, & agatur tum *MQ* ipsi *LB* parallela, rectæque *AD* occurrens in *g*, tum *gi* secans *AB*, *BD* in *f*, *h*. Dico factum.

Secet enim *Mg* rectam *AB* in *Q*, & *AD* rectam *KL* in *S*, & agatur *AP* quæ sit ipsi *BD* parallela & occurrat *iL* in *P*, & erunt *gM* ad *Lh* (*gi* ad *hi*, *Mi* ad *Li*, *GI* ad *HI*, *AK* ad *BK*) & *AP* ad

AP ad *BL* in eadem ratione. Secetur *DL* in *R* ut ſit *DL* ad *RL* in eadem illa ratione, & ob proportionales *gS* ad *gM*, *AS* ad *AP*, & *DS* ad *DL*; erit, ex æquo, ut *gS* ad *Lh* ita *AS* ad *BL* & *DS* ad *RL*; & mixtim, *BL*—*RL* ad *Lh*—*BL* ut *AS*—*DS* ad *gS*—*AS*. Id eſt *BR* ad *Bh* ut *AD* ad *Ag*, ideoque ut *BD* ad *gQ*. Et viciſſim *BR* ad *BD* ut *Bh* ad *gQ*, ſeu *fh* ad *fg*. Sed ex conſtructione linea *BL* eadem ratione ſecta fuit in *D* & *R* atque linea *FI* in *G* & *H*: ideoque eſt *BR* ad *BD* ut *FH* ad *FG*. Ergo *fh* eſt ad *fg* ut *FH* ad *FG*. Cum igitur ſit etiam *gi* ad *hi* ut *Mi* ad *Li*, id eſt, ut *GI* ad *HI*, patet lineas *FI*, *fi* in *g* & *h*, *G* & *H* ſimiliter ſectas eſſe. *Q. E. F.*

In conſtructione corollarii hujus poſtquam ducitur *LK* ſecans *CE* in *i*, producere licet *iE* ad *V*, ut ſit *EV* ad *Ei* ut *FH* ad *HI*, & agere *Vf* parallelam ipſi *BD*. Eodem recidit ſi centro *i*, intervallo *IH*, deſcribatur circulus ſecans *BD* in *X*, & producatur *iX* ad *Y*, ut ſit *iY* æqualis *IF*, & agatur *Yf* ipſi *BD* parallela.

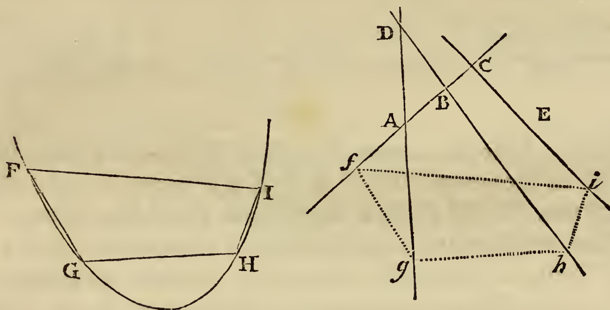
Problematis hujus ſolutiones alias *Wrennus* & *Walliſius* olim excogitarunt.

PROPO-

PROPOSITIO XXIX. PROBLEMA XXI.

Trajectoriam specie datam describere, quæ a rectis quatuor positione datis in partes secabitur, ordine, specie & proportione datas.

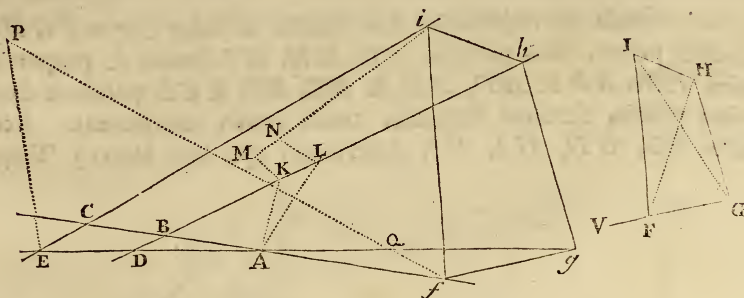
Describenda sit trajectoria, quæ similis sit lineæ curvæ *FGHI*, & cujus partes, illius partibus *FG*, *GH*, *HI* similes & proportionales, rectis *AB* & *AD*, *AD* & *BD*, *BD* & *CE* positione datis, prima primis, secunda secundis, tertia tertiis interjaceant. Actis rectis *FG*, *GH*, *HI*, *FI*, describatur (per lem. XXVII.) Trapezium *fghi* quod sit trapezio *FGHI* simile, & cujus anguli *f*, *g*, *h*, *i* tangant rectas illas positione datas *AB*, *AD*, *BD*, *CE*, singuli singulas dicto ordine. Dein circa hoc trapezium describatur trajectoria curvæ lineæ *FGHI* consimilis.



Scholium.

Construi etiam potest hoc problema ut sequitur. Junctis *FG*, *GH*, *HI*, *FI* produc *GF* ad *V*, jungeque *FH*, *IG*, & angulis *FGH*, *VFH* fac angulos *CAK*, *DAL* æquales. Concurrant *AK*, *AL* cum recta *BD* in *K* & *L*, & inde agantur *KM*, *LN*, quarum *KM* constituat angulum *AKM* æqualem angulo *GHI*, sitque ad *AK* ut est *HI* ad *GH*; & *LN* constituat angulum *ALN* æqualem angulo *FHI*, sitque ad *AL* ut *HI* ad *FH*. Ducantur autem *AK*, *KM*

KM, *AL*, *LN* ad eas partes linearum *AD*, *AK*, *AL*, ut literæ *CAKMC*, *ALKA*, *DALND* eodem ordine cum literis *FGHIF* in orbem redeant; & acta *MN* occurrat rectæ *CE* in *i*. Fac angulum *iEP* æqualem angulo *IGF*, sitque *PE* ad *Ei* ut *FG* ad *GI*; & per *P* agatur *PQf*, quæ cum recta *ADE* contineat angulum *PQE* æqualem angulo *FIG*, rectæque *AB* occurrat in *f*, &



jungatur *fi*. Agantur autem *PE* & *PQ* ad eas partes linearum *CE*, *PE*, ut literarum *PEiP* & *PEQP* idem sit ordo circularis qui literarum *FGHIF*, & si super linea *fi* eodem quoque literarum ordine constituatur trapezium *fghi* trapezio *FGHI* simile, & circumscribatur trajectoria specie data, solvetur problema.

Hactenus de orbibus inveniendis. Superest ut motus corporum in orbibus inventis determinemus.

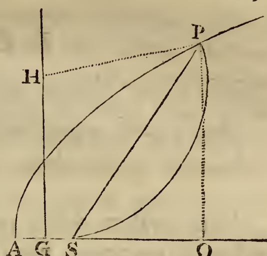
SECTIO VI.

De inventione motuum in orbibus datis.

PROPOSITIO XXX. PROBLEMA XXII.

Corporis in data trajectoria parabolica moti invenire locum ad tempus assignatum.

Sit *S* umbilicus & *A* vertex principalis parabolæ, sitque $4 AS \times M$ æquale areæ parabolicæ abscindendæ *APS*, quæ radio *SP*, vel post excessum corporis de vertice descripta fuit, vel ante appulsum ejus ad



ad verticem describenda est. Innotescit quantitas areæ illius abscindendæ ex tempore ipsi proportionali. Biseca AS in G, erigeque perpendiculum GH æquale 3 M, & circulus centro H, intervallo HS descriptus secabit parabolam in loco quæsito P. Nam, demissa ad axem perpendiculari PO & ducta PH, est $AGq + GHq$ $(= HPq = \overline{AO - AG}: quad. + \overline{PO - GH}: quad)$ $= AOq + POq - 2GAO - 2GH \times PO + AGq + GHq$. Unde $2GH \times PO (= AOq + POq - 2GAO) = AOq + \frac{3}{4}POq$. Pro AOq scribe $AO \times \frac{POq}{4AS}$; & applicatis terminis omnibus ad $3PO$ ductisque in $2AS$, fiet $\frac{4}{3}GH \times AS$ $(= \frac{1}{6}AO \times PO + \frac{1}{2}AS \times PO$ $= \frac{AO + 3AS}{6} \times PO = \frac{4AO - 3SO}{6} \times PO =$ areæ $\overline{APO - SPO})$ $=$ areæ APS. Sed GH erat 3 M, & inde $\frac{4}{3}GH \times AS$ est $4AS \times$ M. Ergo area abscissa APS æqualis est abscindendæ $4AS \times$ M. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc GH est ad AS, ut tempus quo corpus descripsit arcum AP ad tempus quo corpus descripsit arcum inter verticem A & perpendiculum ad axem ab umbilico S erectum.

Corol. 2. Et circulo ASP per corpus motum P perpetuo transeunte, velocitas puncti H est ad velocitatem quam corpus habuit in vertice A ut 3 ad 8; ideoque in ea etiam ratione est linea GH ad lineam rectam quam corpus tempore motus sui ab A ad P, ea cum velocitate quam habuit in vertice A, describere posset.

Corol. 3. Hinc etiam vice versa inveniri potest tempus quo corpus descripsit arcum quemvis assignatum AP. Junge AP & ad medium ejus punctum erige perpendiculum rectæ GH occurrens in H.

LEMMA XXVIII.

Nulla extat figura ovalis cujus area, rectis pro lubitu abscissa, possit per æquationes numero terminorum ac dimensionum finitas generaliter inveniri.

Intra ovalem detur punctum quodvis, circa quod ceu polum revolvatur perpetuo linea recta, uniformi cum motu, & interea in recta illa exeat punctum mobile de polo, pergatque semper ea cum velocitate, quæ sit ut rectæ illius intra ovalem quadratum. Hoc motu punctum illud describet spiralem gyris infinitis. Jam si areæ ovalis a recta illa abscissæ portio per finitam æquationem inveniri potest, invenietur etiam per eandem æquationem distantia puncti a polo, quæ huic areæ proportionalis est, ideoque omnia spiralis puncta per æquationem finitam inveniri possunt: & propterea rectæ cujusvis positione datæ intersectio cum spirali inveniri etiam potest per æquationem finitam. Atqui recta omnis infinite producta spiralem secat in punctis numero infinitis, & æquatio, qua intersectio aliqua duarum linearum invenitur, exhibet earum intersectiones omnes radicibus totidem, ideoque ascendit ad tot dimensiones quot sunt intersectiones. Quoniam circuli duo se mutuo secant in punctis duobus, intersectio una non invenietur nisi per æquationem duarum dimensionum, qua intersectio altera etiam inveniatur. Quoniam duarum sectionum conicarum quatuor esse possunt intersectiones, non potest aliqua earum generaliter inveniri nisi per æquationem quatuor dimensionum, qua omnes simul inveniantur. Nam si intersectiones illæ seorsim quærantur, quoniam eadem est omnium lex & conditio, idem erit calculus in casu unoquoque, & propterea eadem semper conclusio, quæ igitur debet omnes intersectiones simul complecti & indifferenter exhibere. Unde etiam intersectiones sectionum conicarum & curvarum tertiæ potestatis, eo quod sex esse possunt, simul prodeunt per æquationes sex dimensionum, & intersectiones duarum curvarum tertiæ potestatis, quia novem esse possunt, simul prodeunt per æquationes dimensionum novem. Id nisi necessario fieret, reducere liceret problemata omnia solida ad plana, & plusquam solida ad solida. Loquor hic de curvis potestate irre-

irreducibilibus. Nam si æquatio, per quam curva definitur, ad inferiorem potestatem reduci possit: curva non erit unica, sed ex duabus vel pluribus composita, quarum intersectiones per calculos diversos seorsim inveniri possunt. Ad eundem modum intersectiones binæ rectarum & sectionum conicarum prodeunt semper per æquationes duarum dimensionum, ternæ rectarum & curvarum irreducibilium tertiæ potestatis per æquationes trium, quaternæ rectarum & curvarum irreducibilium quartæ potestatis per æquationes dimensionum quatuor, & sic in infinitum. Ergo rectæ & spiralis intersectiones numero infinitæ, cum curva hæc sit simplex & in curvas plures irreducibilis, requirunt æquationes numero dimensionum & radicum infinitas, quibus intersectiones omnes possunt simul exhiberi. Est enim eadem omnium lex & idem calculus. Nam si a polo in rectam illam secantem demittatur perpendiculum, & perpendiculum illud una cum secante revolvatur circa polum, intersectiones spiralis transibunt in se mutuo, quæque prima erat seu proxima, post unam revolutionem secunda erit, post duas tertia, & sic deinceps: nec interea mutabitur æquatio nisi pro mutata magnitudine quantitatum per quas positio secantis determinatur. Unde cum quantitates illæ post singulas revolutiones redeunt ad magnitudines primas, æquatio redibit ad formam primam, ideoque una eademque exhibebit intersectiones omnes, & propterea radices habebit numero infinitas, quibus omnes exhiberi possunt. Nequit ergo intersectio rectæ & spiralis per æquationem finitam generaliter inveniri, & idcirco nulla extat ovalis cujus area, rectis imperatis abscissa, possit per talem æquationem generaliter exhiberi.

Eodem argumento, si intervallum poli & puncti, quo spiralis describitur, capiatur Ovalis perimetro abscissæ proportionale, probari potest quod longitudo perimetri nequit per finitam æquationem generaliter exhiberi. De ovalibus autem hic loquor quæ non tanguntur a figuris conjugatis in infinitum pergentibus.

Corollarium.

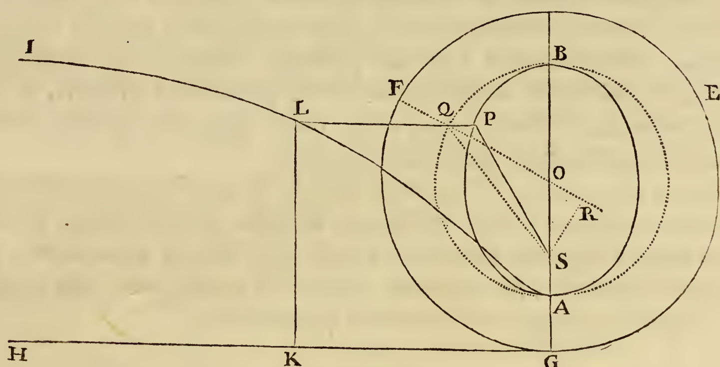
Hinc area ellipseos, quæ radio ab umbilico ad corpus mobile ducto describitur, non prodit ex dato tempore, per æquationem finitam; & propterea per descriptionem curvarum geometrice rationalium determinari nequit. Curvas geometrice rationales appello qua-

rum puncta omnia per longitudines æquationibus definitas, id est, per longitudinum rationes complicatas, determinari possunt; cæterasque (ut spirales, quadratrices, trochoides) geometrice irrationales. Nam longitudines quæ sunt vel non sunt ut numerus ad numerum (quemadmodum in decimo elementorum) sunt arithmetice rationales vel irrationales. Aream igitur ellipseos tempori proportionalem abscindo per curvam geometrice irrationalem ut sequitur.

PROPOSITIO XXXI. PROBLEMA XXIII.

Corporis in data trajectoria elliptica moti invenire locum ad tempus assignatum.

Ellipseos *APB* sit *A* vertex principalis, *S* umbilicus, & *O* centrum, sitque *P* corporis locus inveniendus. Produc *OA* ad *G*, ut sit *OG* ad *OA* ut *OA* ad *OS*. Erige perpendiculum *GH*, centroque *O* & intervallo *OG* describe circulum *GEF*, & super regula *GH*, ceu fundo, progrediatur rota *GEF* revolvendo circa axem suum, & interea puncto suo *A* describendo trochoidem *ALI*. Quo facto, cape *GK* in ratione ad rotæ perimetrum *GEFG*, ut



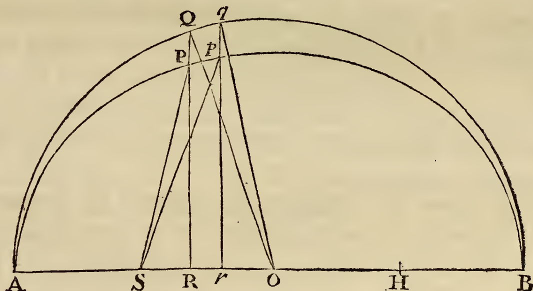
est tempus, quo corpus progrediendo ab *A* descripsit arcum *AP*, ad tempus revolutionis unius in ellipsi. Erigatur perpendiculum *KL* occurrens trochoidi in *L*, & acta *LP* ipsi *KG* parallela occurret ellipsi in corporis loco quæsito *P*.

Nam

Nam centro *O*, intervallo *OA* deſcribatur ſemicirculus *AQB*, & arcui *AQ* occurrat *LP* ſi opus eſt producta in *Q*, junganturque *SQ*, *OQ*. Arcui *EFG* occurrat *OQ* in *F*, & in eandem *OQ* demittatur perpendiculum *SR*. Area *APS* eſt ut area *AQS*, id eſt, ut differentia inter ſectorem *OQA* & triangulum *OQS*, ſive ut differentia rectangulorum $\frac{1}{2} OQ \times AQ$ & $\frac{1}{2} OQ \times SR$, hoc eſt, ob datam $\frac{1}{2} OQ$, ut differentia inter arcum *AQ* & rectam *SR*, ideoque (cum eædem ſint datæ rationes *SR* ad ſinum arcus *AQ*, *OS* ad *OA*, *OA* ad *OG*, *AQ* ad *GF*, & diviſim $AQ - SR$ ad $GF -$ ſinu arcus *AQ*) ut *GK* differentia inter arcum *GF* & ſinum arcus *AQ*. *Q. E. D.*

Scholium.

Cæterum, cum difficilis ſit hujus curvæ deſcriptio, præſtat ſolutionem vero proximam adhibere. Inveniatur tum angulus quidam B, qui ſit ad angulum graduum 57.29578, quem arcus radio æqualis ſubtendit, ut eſt umbilicorum diſtantia *SH* ad ellipſeos diametrum *AB*; tum etiam longitudo quædam L, quæ ſit ad radium in eadem

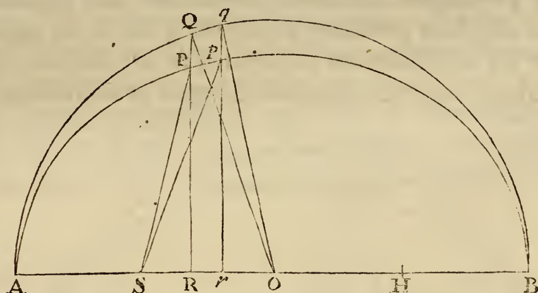


ratione inverſe. Quibus ſemel inventis, problema deinceps confit per ſequentem analyſin. Per conſtructionem quamvis, vel utcunque conjecturam faciendo, cognoſcatur corporis locus *P* proximus vero ejus loco *p*. Demiſſaque ad axem ellipſeos ordinatim applicata *PR*, ex proportione diametrorum ellipſeos, dabitur circuli circumſcripti *AQB* ordinatim applicata *RQ*, quæ ſinus eſt anguli *AOQ* exiſtente *AO* radio, quæque ellipſin ſecat in *P*. Sufficit angulum illum rudi calculo in numeris proximis invenire. Cognoſcatur etiam angulus tempori proportionalis, id eſt, qui ſit ad quatuor rectos, ut eſt

tempus,

De Motu Corporum

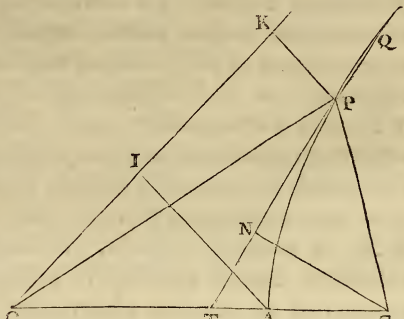
tempus, quo corpus descripsit arcum *Ap*, ad tempus revolutionis unius in ellipsi. Sit angulus iste N. Tum capiatur & angulus D ad angulum B, ut est sinus iste anguli *AOQ* ad radium, & angulus E ad angulum N—*AOQ*+D, ut est longitudo L ad longitudinem eandem L cosinu anguli *AOQ* diminutam, ubi angulus iste recto minor est, auctam ubi major. Postea capiatur tum angulus F ad angulum B, ut est sinus anguli *AOQ*+E ad radium, tum angulus G ad angulum N—*AOQ*—E+F ut est longitudo L ad longitudinem eandem cosinu anguli *AOQ*+E diminutam ubi angulus iste recto minor est, auctam ubi major. Tertia vice capiatur angulus H ad angulum B, ut est sinus anguli *AOQ*+E+G ad radium; & angulus I ad angulum N—*AOQ*—E—G+H, ut est longitudo L ad eandem longitudinem cosinu anguli *AOQ*+E+G diminutam, ubi an-



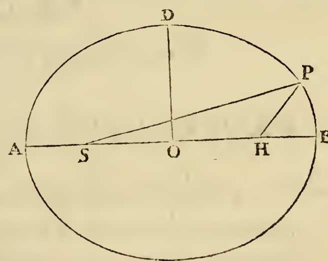
gulus iste recto minor est, auctam ubi major. Et sic pergere licet in infinitum. Denique capiatur angulus *AOq* æqualis angulo *AOQ* +E+G+I+ &c. Et ex cosinu ejus *Or* & ordinata *pr*, quæ est ad sinum ejus *qr* ut ellipseos axis minor ad axem majorem, habebitur corporis locus correctus *p*. Si quando angulus N—*AOQ*+D negativus est, debet signum + ipsius E ubique mutari in —, & signum — in +. Idem intelligendum est de signis ipsorum G & I, ubi anguli N—*AOQ*—E+F, & N—*AOQ*—E—G+H negativi prodeunt. Convergit autem series infinita *AOQ*+E+G+I+ &c. quam celerrime, adeo ut vix unquam opus fuerit ultra progredi quam ad terminum secundum E. Et fundatur calculus in hoc theoremate, quod area *APS* sit ut differentia inter arcum *AQ* & rectam ab umbilico *S* in radium *OQ* perpendiculariter demissam.

Non

Non diſſimili calculo conficitur problema in hyperbola. Sit ejus centrum *O*, vertex *A*, umbilicus *S* & aſymptotos *OK*. Cognoſcatur quantitas areæ abſcindendæ tempori proportionalis. Sit ea A, & fiat conjectura de poſitione rectæ *SP*, quæ aream *APS* abſcindat veræ proximam. Jungatur *OP*, & ab *A* & *P* ad aſymptoton agantur *AI*, *PK* aſymptoto alteri parallelæ, & per tabulam logarithmorum dabitur area *AIKP*, eique æqualis area *OPA*, quæ ſubducta de triangulo *OPS* relinquet aream abſciſſam *APS*. Applicando areæ abſcindendæ A & abſciſſæ *APS* differentiam duplam $2APS - 2A$ vel $2A - 2APS$ ad lineam *SN*, quæ ab umbilico *S* in tangentem *TP* perpendicularis eſt, orietur longitudo chordæ *PQ*. Inſcribatur autem chorda illa *PQ* inter *A* & *P*, ſi area abſciſſa *APS* major ſit area abſcindenda A, ſecus ad puncti *P* contrarias partes: & punctum *Q* erit locus corporis accuratior. Et computatione repetita invenietur idem accuratior in perpetuum.

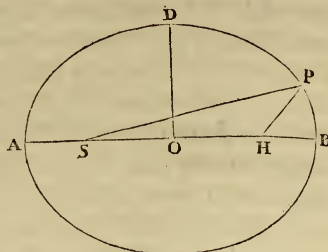


Atque his calculis problema generaliter confit analytice. Verum uſibus aſtronomicis accommodatior eſt calculus particularis qui ſequitur. Exiſtentibus *AO*, *OB*, *OD* ſemiaxibus ellipſeos, & L ipſius latere recto, ac D differentia inter ſemiaxem minorem *OD* & lateris recti ſemiſſem $\frac{1}{2}$ L; quære tum angulum Y, cujus ſinus ſit ad radium ut eſt rectangulum ſub differentia illa D, & ſemiſumma axium $AO + OD$ ad quadratum axis majoris *AB*; tum angulum Z, cujus ſinus ſit ad radium ut eſt duplum rectangulum ſub umbilicorum diſtantia *SH* & differentia illa D ad triplum quadratum ſemiaxis majoris *AO*. His angulis ſemel inventis; locus corporis ſic deinceps determinabitur. Sume angulum T proportionalem tempori quo arcus *BP* deſcriptus eſt, ſeu motui medio (ut loquuntur) æqualem; & angulum V,



primam

primam medii motus æquationem, ad angulum Y, æquationem maximam primam, ut eſt ſinus dupli anguli T ad radium; atque angulum X, æquationem ſecundam, ad angulum Z, æquationem maximam ſecundam, ut eſt cubus ſinus anguli T ad cubum radii. Angulorum T, V, X vel ſummæ T+X+V, ſi angulus T recto minor eſt, vel differentiæ T+X—V, ſi is recto major eſt rectiſque duobus minor, æqualem cape angulum *BHP*, motum medium æquatum; & ſi *HP* occurrat ellipſi in *P*, acta *SP* abſcindet aream *BSP* tempori proportionalem quamproxime. Hæc praxis ſatis expedita videtur, propterea quod angulorum perexiguorum V & X, in minutis ſecundis, ſi placet, poſitorum, figuras duas treſve primas invenire ſufficit. Sed & ſatis accurata eſt ad theoriam planetarum. Nam in orbe vel Martis ipſius, cujus æquatio centri maxima eſt graduum decem, error vix ſuperabit minutum unum ſecundum. Invento autem angulo motus medii æquati *BHP*, angulus veri motus *BSP* & diſtantia *SP* in promptu ſunt per methodum notiſſimam.



Hactenus de motu corporum in lineis curvis. Fieri autem poteſt ut mobile recta deſcendat vel recta aſcendat, & quæ ad iſtiuſmodi motus ſpectant, pergo jam exponere.

SECTIO VII.

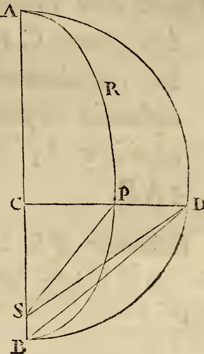
De corporum aſcenſu & deſcenſu rectilineo.

PROPOSITIO XXXII. PROBLEMA XXIV.

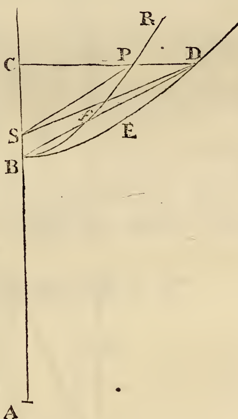
Poſito quod vis centripeta ſit reciproce proportionalis quadrato diſtantiæ locorum a centro, ſpatia definire quæ corpus recta cadendo datis temporibus deſcribit.

Caſ. 1. Si corpus non cadit perpendiculariter, deſcribet id (per corol. 1. prop. XIII.) ſectionem aliquam conicam cujus umbilicus congruit cum centro virium. Sit ſectio illa conica *ARPB* & umbilicus

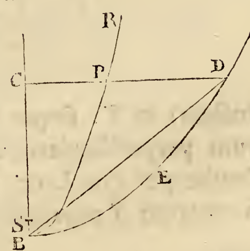
bilicus ejus *S*. Et primo si figura ellipsis est; super hujus axe majore *AB* describatur semicirculus *ADB*, & per corpus decidens transeat recta *DPC* perpendicularis ad axem; actisque *DS*, *PS* erit area *ASD* areæ *ASP*, atque ideo etiam tempori proportionalis. Manente axe *AB* minuatur perpetuo latitudo ellipseos, & semper manebit area *ASD* tempori proportionalis. Minuatur latitudo illa in infinitum: & orbe *APB* jam coincidente cum axe *AB* & umbilico *S* cum axis termino *B*, descendet corpus in recta *AC*, & area *ABD* evadet tempori proportionalis. Dabitur itaque spatium *AC*, quod corpus de loco *A* perpendiculariter cadendo tempore dato describit, si modo tempori proportionalis capiatur area *ABD*, & a puncto *D* ad rectam *AB* demittatur perpendicularis *DC*. *Q. E. I.* LIBER PRIMUS.



Cas. 2. Si figura illa *RPB* hyperbola est, describatur ad eandem diametrum principalem *AB* hyperbola rectangula *BED*: & quoniam areæ *CSP*, *CBfP*, *SPfB* sunt ad areas *CSD*, *CBED*, *SDEB*, singulæ ad singulas, in data ratione altitudinum *CP*, *CD*; & area *SPfB* proportionalis est tempori quo corpus *P* movebitur per arcum *PfB*; erit etiam area *SDEB* eidem tempori proportionalis. Minuatur latus rectum hyperbolæ *RPB* in infinitum manente latere transverso, & coibit arcus *PB* cum recta *CB* & umbilicus *S* cum vertice *B* & recta *SD* cum recta *BD*. Proinde area *BDEB* proportionalis erit tempori quo corpus *C* recto descensu describit lineam *CB*. *Q. E. I.*



Cas. 3. Et simili argumento si figura *RPB* parabola est, & eodem vertice principali *B* describatur alia parabola *BED*, quæ semper maneat data, interea dum parabola prior, in cujus perimetro corpus *P* movetur, diminuto & in nihilum redacto ejus latere recto, conveniat cum linea *CB*; fiet segmentum parabolicum *BDEB* proportionale tempori quo corpus illud *P* vel *C* descendet ad centrum *S* vel *B*. *Q. E. I.*

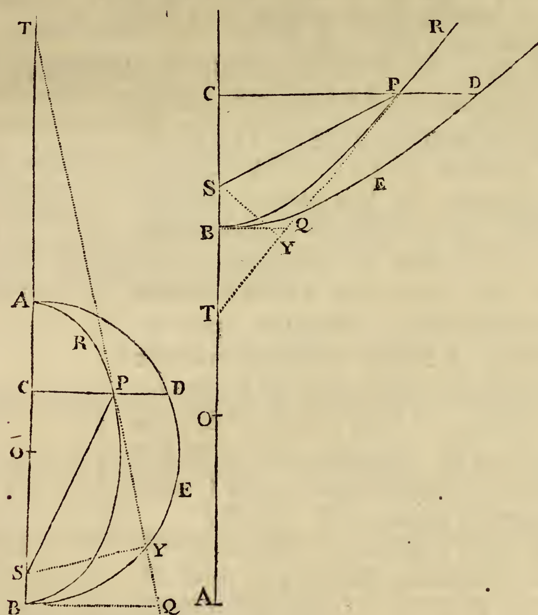


De Motu Corporum

PROPOSITIO XXXIII. THEOREMA IX.

Positis jam inventis, dico quod corporis cadentis velocitas in loco quovis C *est ad velocitatem corporis centro* B *intervallo* BC *circulum describentis, in subduplicata ratione quam* AC, *distantia corporis a circuli vel hyperbolæ rectangulæ vertice ulteriore* A, *habet ad figuræ semidiametrum principalem* $\frac{1}{2}$AB.

Bisecetur *AB*, communis utriusque figuræ *RPB*, *DEB* diameter, in *O*; & agatur recta *PT*, quæ tangat figuram *RPB* in *P*, atque etiam secet communem illam diametrum *AB* (si opus est pro-



ductam) in *T*; sitque *SY* ad hanc rectam, & *BQ* ad hanc diametrum perpendicularis, atque figuræ *RPB* latus rectum ponatur L. Constat per corol. IX. prop. XVI. quod corporis in linea *RPB* circa centrum *S* moventis velocitas in loco quovis *P* sit ad velocitatem corporis

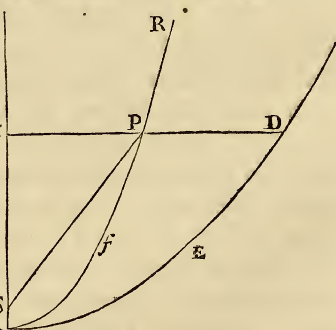
corporis intervallo SP circa idem centrum circulum deſcribentis in ſubduplicata ratione rectanguli $\frac{1}{2}L \times SP$ ad SY quadratum. Eſt autem ex conicis ACB ad CPq ut 2 AO ad L, ideoque $\frac{2CPq \times AO}{ACB}$ æquale L. Ergo velocitates illæ ſunt ad invicem in ſubduplicata ratione $\frac{CPq \times AO \times SP}{ACB}$ ad SY *quad.* Porro ex conicis eſt CO ad BO ut BO ad TO, & compoſite vel diviſim ut CB ad BT. Unde vel dividendo vel componendo fit $BO -$ vel $+ CO$ ad BO ut CT ad BT, id eſt, AC ad AO ut CP ad BQ; indeque $\frac{CPq \times AO \times SP}{ACB}$ æquale eſt $\frac{BQq \times AC \times SP}{AO \times BC}$. Minuatur jam in infinitum figuræ RPB latitudo CP, ſic ut punctum P coeat cum puncto C, punctumque S cum puncto B, & linea SP cum linea BC, lineaque SY cum linea BQ; & corporis jam recta deſcendentis in linea CB velocitas fiet ad velocitatem corporis centro B intervallo BC circulum deſcribentis, in ſubduplicata ratione ipſius $\frac{BQq \times AC \times SP}{AO \times BC}$ ad SYq, hoc eſt (neglectis æqualitatis rationibus SP ad BC & BQq ad SYq) in ſubduplicata ratione AC ad AO ſive $\frac{1}{2}AB$. *Q. E. D.*

Corol. 1. Punctis B & S coeuntibus, fit TC ad TS ut AC ad AO.

Corol. 2. Corpus ad datam a centro diſtantiam in circulo quovis revolvens, motu ſuo ſurſum verſo aſcendet ad duplam ſuam a centro diſtantiam.

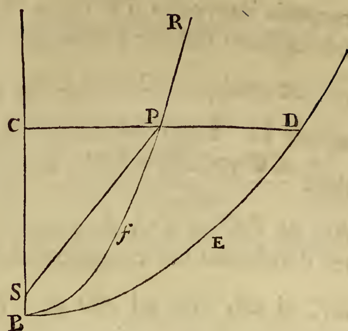
PROPOSITIO XXIV. THEOREMA X.

Si figura BED *parabola eſt, dico quod corporis cadentis velocitas in loco quovis* C *æqualis eſt velocitati qua corpus centro* B *dimidio intervalli ſui* BC *circulum uniformiter deſcribere poteſt.*



Nam corporis parabolam RPB circa centrum S deſcribentis velocitas in loco quovis P (per corol. VII. prop.

De Motu Corporum



prop. XVI.) æqualis est velocitati corporis dimidio intervalli *SP* circulum circa idem centrum *S* uniformiter describentis. Minuatur parabolæ latitudo *CP* in infinitum eo, ut arcus parabolicus *PfB* cum recta *CB*, centrum *S* cum vertice *B*, & intervallum *SP* cum intervallo *BC* coincidat, & constabit propositio. *Q. E. D.*

PROPOSITIO XXXV. THEOREMA XI.

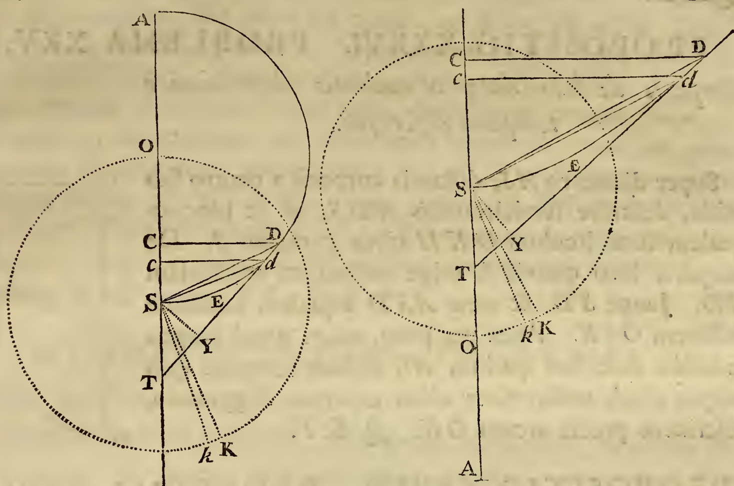
Iisdem positis, dico quod area figuræ DES, *radio indefinito* SD *descripta, æqualis sit areæ quam corpus, radio dimidium lateris recti figuræ* DES *æquante, circa centrum* S *uniformiter gyrando, eodem tempore describere potest.*

Nam concipe corpus *C* quam minima temporis particula lineolam *Cc* cadendo describere, & interea corpus aliud *K*, uniformiter in circulo *OKk* circa centrum *S* gyrando, arcum *Kk* describere. Erigantur perpendicula *CD*, *cd* occurrentia figuræ *DES* in *D*, *d*. Jungantur *SD*, *Sd*, *SK*, *Sk* & ducatur *Dd* axi *AS* occurrens in *T*, & ad eam demittatur perpendiculum *SY*.

Cas. 1. Jam si figura *DES* circulus est vel hyperbola rectangula, bisecetur ejus transversa diameter *AS* in *O*, & erit *SO* dimidium lateris recti. Et quoniam est *TC* ad *TD* ut *Cc* ad *Dd*, & *TD* ad *TS* ut *CD* ad *SY*, erit ex æquo *TC* ad *TS* ut $CD \times Cc$ ad $SY \times Dd$. Sed (per corol 1. prop. XXXIII.) est *TC* ad *TS* ut *AC* ad *AO*, puta si in coitu punctorum *D*, *d* capiantur linearum rationes ultimæ. Ergo *AC* est ad *AO* seu *SK* ut $CD \times Cc$ ad $SY \times Dd$. Porro corporis descendentis velocitas in *C* est ad velocitatem corporis circulum intervallo *SC* circa centrum *S* describentis in subduplicata ratione *AC* ad *AO* vel *SK* (per prop. XXXIII.) Et hæc velocitas ad velocitatem corporis describentis circulum *OKk* in subduplicata ratione *SK* ad *SC* (per corol. VI. prop. IV.) & ex æquo velocitas prima ad ultimam, hoc est lineola *Cc* ad arcum *Kk* in subduplicata

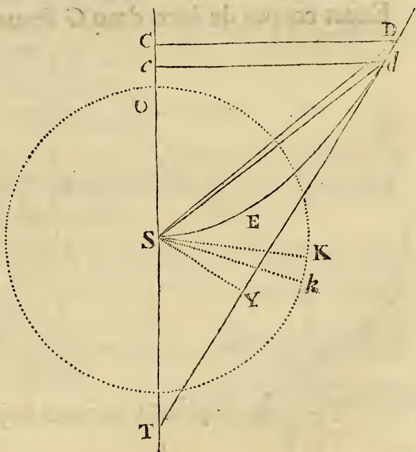
ratione

ratione AC ad SC, id est in ratione AC ad CD. Quare est $CD \times Cc$ æquale $AC \times Kk$, & propterea AC ad SK ut $AC \times Kk$ ad $SY \times Dd$, indeque $SK \times Kk$ æquale $SY \times Dd$, & $\frac{1}{2} SK \times Kk$ æquale $\frac{1}{2} SY \times Dd$, id est area KSk æqualis areæ SDd. Singulis igitur temporis



particulis generantur arearum duarum particulæ KSk, & SDd, quæ, si magnitudo earum minuatur & numerus augeatur in infinitum, rationem obtinent æqualitatis, & propterea (per corollarium lemmatis IV.) areæ totæ simul genitæ sunt semper æquales. *Q. E. D.*

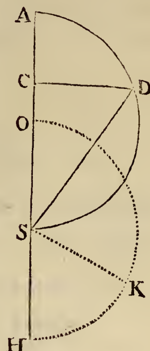
Cas. 2. Quod si figura DES parabola sit, invenietur esse ut supra $CD \times Cc$ ad $SY \times Dd$ ut TC ad TS, hoc est ut 2 ad 1, ideoque $\frac{1}{4} CD \times Cc$ æquale esse $\frac{1}{2} SY \times Dd$. Sed corporis cadentis velocitas in C æqualis est velocitati qua circulus intervallo $\frac{1}{2} SC$ uniformiter describi possit (per prop. XXXIV.) Et hæc velocitas ad velocitatem qua circulus radio SK describi possit, hoc est, lineola Cc ad arcum Kk (per corol. VI. prop.



prop. IV.) eſt in ſubduplicata ratione SK ad $\frac{1}{2}SC$, id eſt, in ratione SK ad $\frac{1}{2}CD$. Quare eſt $\frac{1}{2}SK \times Kk$ æquale $\frac{1}{4}CD \times Cc$, ideoque æquale $\frac{1}{2}SY \times Dd$, hoc eſt, area KSk æqualis areæ SDd, ut ſupra. *Q. E. D.*

PROPOSITIO XXXVI. PROBLEMA XXV.

Corporis de loco dato A *cadentis determinare tempora deſcenſus.*

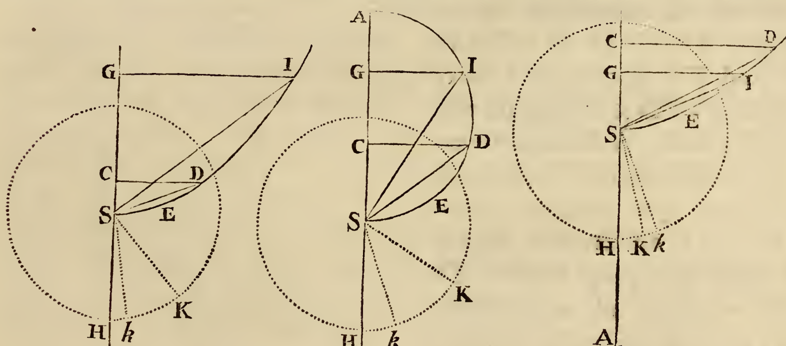


Super diametro AS, diſtantia corporis a centro ſub initio, deſcribe ſemicirculum ADS, ut & huic æqualem ſemicirculum OKH circa centrum S. De corporis loco quovis C erige ordinatim applicatam CD. Junge SD, & areæ ASD æqualem conſtitue ſectorem OSK. Patet per prop. XXXV. quod corpus cadendo deſcribet ſpatium AC eodem tempore quo corpus aliud, uniformiter circa centrum S gyrando, deſcribere poteſt arcum OK. *Q. E. F.*

PROPOSITIO XXXVII. PROBLEMA XXVI.

Corporis de loco dato ſurſum vel deorſum projecti definire tempora aſcenſus vel deſcenſus.

Exeat corpus de loco dato G ſecundum lineam GS cum velocitate

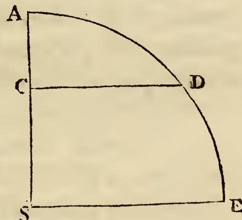


quacunque. In duplicata ratione hujus velocitatis ad uniformem in circulo

circulo velocitatem, qua corpus ad intervallum datum *SG* circa centrum *S* revolvi poſſet, cape *GA* ad $\frac{1}{2}$ *AS*. Si ratio illa eſt numeri binarii ad unitatem, punctum *A* infinite diſtat, quo caſu parabola vertice *S*, axe *SG*, latere quovis recto deſcribenda eſt. Patet hoc per prop. XXXIV. Sin ratio illa minor vel major eſt quam 2 ad 1, priore caſu circulus, poſteriore hyperbola rectangula ſuper diametro *SA* deſcribi debet. Patet per prop. XXXIII. Tum centro *S*, intervallo æquante dimidium lateris recti, deſcribatur circulus *HkK*, & ad corporis deſcendentis vel aſcendentis locum *G*, & locum alium quemvis *C*, erigantur perpendicula *GI*, *CD* occurrentia conicæ ſectioni vel circulo in *I* ac *D*. Dein junctis *SI*, *SD*, fiant ſegmentis *SEIS*, *SEDS* ſectores *HSK*, *HSk* æquales, & per prop. XXXV. corpus *G* deſcribet ſpatium *GC* eodem tempore quo corpus *K* deſcribere poteſt arcum *Kk*. *Q. E. F.*

PROPOSITIO XXXVIII. THEOREMA XII.

Poſito quod vis centripeta proportionalis ſit altitudini ſeu diſtantiæ locorum a centro, dico quod cadentium tempora, velocitates & ſpatia deſcripta ſunt arcubus, arcuumque ſinibus rectis & ſinibus verſis reſpective proportionalia.



Cadat corpus de loco quovis *A* ſecundum rectam *AS*; & centro virium *S*, intervallo *AS*, deſcribatur circuli quadrans *AE*, ſitque *CD* ſinus rectus arcus cujuſvis *AD*; & corpus *A*, tempore *AD*, cadendo deſcribit ſpatium *AC*, inque loco *C* acquiret velocitatem *CD*.

Demonſtratur eodem modo ex propoſitione X, quo propoſitio XXXII, ex propoſitione XI demonſtrata fuit.

Corol. 1. Hinc æqualia ſunt tempora, quibus corpus unum de loco *A* cadendo pervenit ad centrum *S*, & corpus aliud revolvendo deſcribit arcum quadrantalem *ADE*.

Corol. 2. Proinde æqualia ſunt tempora omnia quibus corpora de locis quibuſvis ad uſque centrum cadunt. Nam revolventium tempora omnia periodica (per corol. III. prop. IV.) æquantur.

PROPOSITIO XXXIX. PROBLEMA XXVII.

Poſita cujuſcunque generis vi centripeta, & conceſſis figurarum curvilinearum quadraturis, requiritur corporis recta aſcendentis vel deſcendentis tum velocitas in locis ſingulis, tum tempus quo corpus ad locum quemvis perveniet: Et contra.

De loco quovis *A* in recta *ADEC* cadat corpus *E*, deque loco ejus *E* erigatur ſemper perpendicularis *EG*, vi centripetæ in loco illo ad centrum *C* tendenti proportionalis: Sitque *BFG* linea curva quam punctum *G* perpetuo tangit. Coincidat autem *EG* ipſo motus initio cum perpendiculari *AB*, & erit corporis velocitas in loco quovis *E* ut recta, quæ poteſt aream curvilineam *ABGE*. *Q. E. I.*

In *EG* capiatur *EM* rectæ, quæ poteſt aream *ABGE*, reciproce proportionalis, & ſit *VLM* linea curva, quam punctum *M* perpetuo tangit, & cujus aſymptotos eſt recta *AB* producta; & erit tempus, quo corpus cadendo deſcribit lineam *AE*, ut area curvilinea *ABTVME*. *Q. E. I.*

Etenim in recta *AE* capiatur linea quam minima *DE* datæ longitudinis, ſitque *DLF* locus lineæ *EMG*, ubi corpus verſabatur in *D*; & ſi ea ſit vis centripeta, ut recta, quæ poteſt aream *ABGE*, ſit ut deſcendentis velocitas: erit area ipſa in duplicata ratione velocitatis, id eſt, ſi pro velocitatibus in *D* & *E*, ſcribantur V & $V+I$, erit area *ABFD* ut VV, & area *ABGE* ut $VV+2VI+II$, & diviſim area *DFGE* ut $2VI+II$, ideoque $\frac{DFGE}{DE}$ ut

ut $\frac{2\,VI + II}{DE}$, id eſt, ſi primæ quantitatum naſcentium rationes ſumantur, longitudo *DF* ut quantitas $\frac{2\,VI}{DE}$, ideoque etiam ut quantitatis hujus dimidium $\frac{I \times V}{DE}$. Eſt autem tempus, quo corpus cadendo deſcribit lineolam *DE*, ut lineola illa directe & velocitas V inverſe, eſtque vis ut velocitatis incrementum I directe & tempus inverſe, ideoque ſi primæ naſcentium rationes ſumantur, ut $\frac{I \times V}{DE}$, hoc eſt, ut longitudo *DF*. Ergo vis ipſi *DF* vel *EG* proportionalis facit ut corpus ea cum velocitate deſcendat, quæ ſit ut recta quæ poteſt aream *ABGE*. *Q. E. D.*

Porro cum tempus, quo quælibet longitudinis datæ lineola *DE* deſcribatur, ſit ut velocitas inverſe, ideoque inverſe ut linea recta quæ poteſt aream *ABFD*; ſitque *DL*, atque ideo area naſcens *DLME*, ut eadem linea recta inverſe : erit tempus ut area *DLME*, & ſumma omnium temporum ut ſumma omnium arearum, hoc eſt (per corol. lem. IV.) tempus totum quo linea *AE* deſcribitur ut area tota *ATVME*. *Q. E. D.*

Corol. 1. Si *P* ſit locus, de quo corpus cadere debet, ut urgente aliqua uniformi vi centripeta nota (qualis vulgo ſupponitur gravitas) velocitatem acquirat in loco *D* æqualem velocitati, quam corpus aliud vi quacunque cadens acquiſivit eodem loco *D*, & in perpendiculari *DF* capiatur *DR*, quæ ſit ad *DF* ut vis illa uniformis ad vim alteram in loco *D*, & compleatur rectangulum *PDRQ*, eique æqualis abſcindatur area *ABFD*; erit *A* locus de quo corpus alterum cecidit. Namque completo rectangulo *DRSE*, cum ſit area *ABFD* ad aream *DFGE* ut VV ad 2 VI, ideoque ut ½ V ad I, id eſt, ut ſemiſſis velocitatis totius ad incrementum velocitatis corporis vi inæquabili cadentis; & ſimiliter area *PQRD* ad aream *DRSE* ut ſemiſſis velocitatis totius ad incrementum velocitatis corporis uniformi vi cadentis; ſintque incrementa illa (ob æqualitatem temporum naſcentium) ut vires generatrices, id eſt, ut ordinatim applicatæ *DF*, *DR*, ideoque ut areæ naſcentes *DFGE*, *DRSE*; erunt ex æquo areæ totæ *ABFD*, *PQRD* ad invicem ut ſemiſſes totarum velocitatum, & propterea, ob æqualitatem velocitatum, æquantur.

Corol. 2. Unde ſi corpus quodlibet de loco quocunque *D* data cum velocitate vel ſurſum vel deorſum projiciatur, & detur lex vis centripetæ, invenietur velocitas ejus in alio quovis loco *e*, erigendo ordinatam *eg*, & capiendo velocitatem illam ad velocitatem in loco *D* ut eſt recta, quæ poteſt rectangulum *PQRD* area curvilinea *DFge* vel auctum, ſi locus *e* eſt loco *D* inferior, vel diminutum, ſi is ſuperior eſt, ad rectam quæ poteſt rectangulum ſolum *PQRD*.

Corol. 3. Tempus quoque innoteſcet erigendo ordinatam *em* reciproce proportionalem lateri quadrato ex *PQRD* + vel − *DFge*, & capiendo tempus quo corpus deſcripſit lineam *De* ad tempus quo corpus alterum vi uniformi cecidit a *P* & cadendo pervenit ad *D*, ut area curvilinea *DLme* ad rectangulum 2*PD* x *DL*. Namque tempus quo corpus vi uniformi deſcendens deſcripſit lineam *PD* eſt ad tempus quo corpus idem deſcripſit lineam *PE* in ſubduplicata ratione *PD* ad *PE*, id eſt (lineola *DE* jamjam naſcente) in ratione *PD* ad *PD* + ½ *DE* ſeu 2 *PD* ad 2 *PD* + *DE*, & diviſim, ad tempus quo corpus idem deſcripſit lineolam *DE* ut 2 *PD* ad *DE*, ideoque ut rectangulum 2 *PD* x *DL* ad aream *DLME*; eſtque tempus quo corpus utrumque deſcripſit lineolam *DE* ad tempus quo corpus alterum inæquabili motu deſcripſit lineam *De*, ut area *DLME* ad aream *DLme*, & ex æquo tempus primum ad tempus ultimum ut rectangulum 2 *PD* x *DL* ad aream *DLme*.

SECTIO

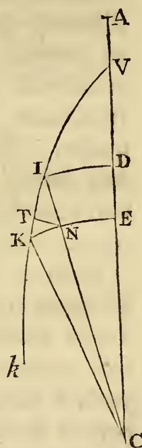
SECTIO VIII.

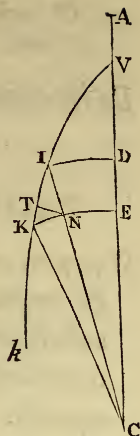
De inventione orbium in quibus corpora viribus quibuscunque centripetis agitata revolvuntur.

PROPOSITIO XL. THEOREMA. XIII.

Si corpus, cogente vi quacunque centripeta, moveatur utcunque, & corpus aliud recta ascendat vel descendat, sintque eorum velocitates in aliquo æqualium altitudinum casu æquales, velocitates eorum in omnibus æqualibus altitudinibus erunt æquales.

Descendat corpus aliquod ab *A* per *D*, *E*, ad centrum *C*, & moveatur corpus aliud a *V* in linea curva *VIKk*. Centro *C* intervallis quibusvis describantur circuli concentrici *DI*, *EK* rectæ *AC* in *D* & *E*, curvæque *VIK* in *I* & *K* occurrentes. Jungatur *IC* occurrens ipsi *KE* in *N*; & in *IK* demittatur perpendiculum *NT*; sitque circumferentiarum circulorum intervallum *DE* vel *IN* quam minimum, & habeant corpora in *D* & *I* velocitates æquales. Quoniam distantiæ *CD*, *CI* æquantur, erunt vires centripetæ in *D* & *I* æquales. Exponantur hæ vires per æquales lineolas *DE*, *IN*; & si vis una *IN* (per legum corol. 2.) resolvatur in duas *NT* & *IT*, vis *NT*, agendo secundum lineam *NT* corporis cursui *ITK* perpendicularem, nil mutabit velocitatem corporis in cursu illo, sed retrahet solummodo corpus a cursu rectilineo, facietque ipsum de orbis tangente perpetuo deflectere, inque via curvilinea *ITKk* progredi. In hoc effectu producendo vis illa tota consumetur: vis autem altera *IT*, secundum corporis cursum agendo, tota accelerabit illud, ac dato tempore quam minimo accelerationem generabit sibi ipsi proportionalem. Proinde corporum in *D* & *I* accelerationes æqualibus temporibus factæ (si





sumantur linearum nascentium *DE*, *IN*, *IK*, *IT*, *NT* rationes primæ) sunt ut lineæ *DE*, *IT*: temporibus autem inæqualibus ut lineæ illæ & tempora conjunctim. Tempora autem quibus *DE* & *IK* describuntur, ob æqualitatem velocitatum sunt ut viæ descriptæ *DE* & *IK*, ideoque accelerationes, in cursu corporum per lineas *DE* & *IK*, sunt ut *DE* & *IT*, *DE* & *IK* conjunctim, id est ut *DE quad.* & $IT \times IK$ *rectangulum.* Sed *rectangulum* $IT \times IK$ æquale est *IN quadrato*, hoc est, æquale *DE quad.* & propterea accelerationes in transitu corporum a *D* & *I* ad *E* & *K* æquales generantur. Æquales igitur sunt corporum velocitates in *E* & *K*: & eodem argumento semper reperientur æquales in subsequentibus æqualibus distantiis. *Q. E. D.*

Sed & eodem argumento corpora æquivelocia & æqualiter a centro distantia, in ascensu ad æquales distantias æqualiter retardabuntur. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc si corpus vel oscilletur pendens a filo, vel impedimento quovis politissimo & perfecte lubrico cogatur in linea curva moveri, & corpus aliud recta ascendat vel descendat, sintque velocitates eorum in eadem quacunque altitudine æquales: erunt velocitates eorum in aliis quibuscunque æqualibus altitudinibus æquales. Namque corporis penduli filo vel impedimento vasis absolute lubrici idem præstatur quod vi transversa *NT*. Corpus eo non retardatur, non acceleratur, sed tantum cogitur de cursu rectilineo discedere.

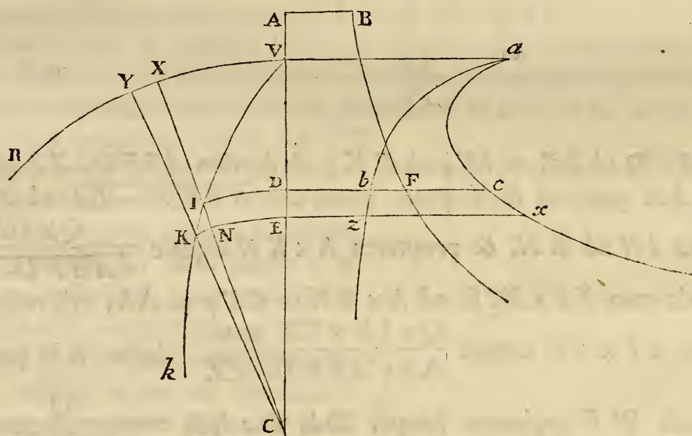
Corol. 2. Hinc etiam si quantitas P sit maxima a centro distantia, ad quam corpus vel oscillans vel in trajectoria quacunque revolvens, deque quovis trajectoriæ puncto, ea quam ibi habet velocitate sursum projectum ascendere possit; sitque quantitas A distantia corporis a centro in alio quovis orbitæ puncto, & vis centripeta semper sit ut ipsius A dignitas quælibet A^{n-1}, cujus index $n-1$ est numerus quilibet n unitate diminutus; velocitas corporis in omni altitudine A erit ut $\sqrt{P^n - A^n}$, atque ideo datur. Namque velocitas recta ascendentis ac descendentis (per prop. XXXIX.) est in hac ipsa ratione.

PROPO-

PROPOSITIO XLI. PROBLEMA XXVIII.

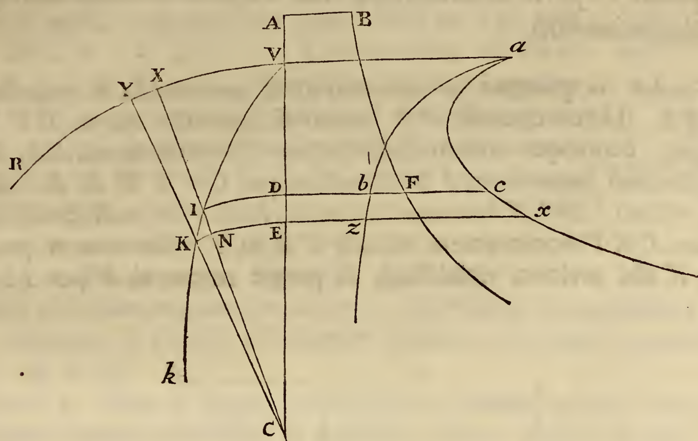
Posita cujuscunque generis vi centripeta & concessis figurarum curvilinearum quadraturis, requiruntur tum trajectoriæ in quibus corpora movebuntur, tum tempora motuum in trajectoriis inventis.

Tendat vis quælibet ad centrum *C* & invenienda sit trajectoria *VIKk*. Detur circulus *VR* centro *C* intervallo quovis *CV* descriptus, centroque eodem describantur alii quivis circuli *ID*, *KE* trajectoriam secantes in *I* & *K* rectamque *CV* in *D* & *E*. Age tum rectam *CNIX* secantem circulos *KE*, *VR* in *N* & *X*, tum rectam *CKY* occurrentem circulo *VR* in *Y*. Sint autem puncta *I* & *K* sibi invicem vicinissima, & pergat corpus ab *V* per *I* & *K*



ad *k* ; sitque punctum *A* locus ille de quo corpus aliud cadere debet, ut in loco *D* velocitatem acquirat æqualem velocitati corporis prioris in *I*. Et stantibus quæ in propositione XXXIX, lineola *IK*, dato tempore quam minimo descripta, erit ut velocitas, atque ideo ut recta quæ potest aream *ABFD*, & triangulum *ICK* tempori proportionale dabitur, ideoque *KN* erit reciproce ut altitudo *IC*, id

id est, si detur quantitas aliqua Q, & altitudo IC nominetur A, ut $\frac{Q}{A}$. Hanc quantitatem $\frac{Q}{A}$ nominemus Z, & ponamus eam esse magnitudinem ipsius Q ut sit in aliquo casu $\sqrt{ABFD}$ ad Z ut est IK ad KN, & erit in omni casu $\sqrt{ABFD}$ ad Z ut IK ad KN, &



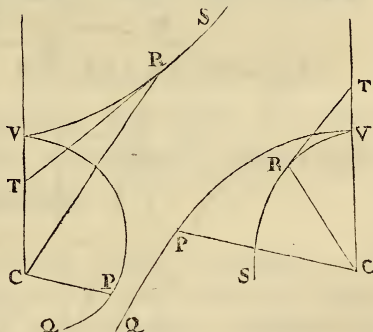
$ABFD$ ad ZZ ut IKq ad KNq, & divisim $ABFD-ZZ$ ad ZZ ut IN *quad.* ad KN *quad.* ideoque $\sqrt{ABFD-ZZ}$ ad Z seu $\frac{Q}{A}$ ut IN ad KN, & propterea $A \times KN$ æquale $\frac{Q \times IN}{\sqrt{ABFD-ZZ}}$. Unde cum $YX \times XC$ sit ad $A \times KN$ ut CXq ad AA, erit rectangulum $XY \times XC$ æquale $\frac{Q \times IN \times CX \text{ quad.}}{AA\sqrt{ABFD-ZZ}}$. Igitur si in perpendiculo DF capiantur semper Db, Dc ipsis $\frac{Q}{2\sqrt{ABFD-ZZ}}$, $\frac{Q \times CX \text{ quad.}}{2AA\sqrt{ABFD-ZZ}}$ æquales respective, & describantur curvæ lineæ ab, ac, quas puncta b, c perpetuo tangunt; deque puncto V ad lineam AC erigatur perpendiculum Va abscindens areas curvilineas $VDba$, $VDca$, & erigantur etiam ordinatæ Ez, Ex: quoniam rectangulum $Db \times IN$ seu $DbzE$ æquale est dimidio rectanguli

guli $A \times KN$ seu triangulo ICK; & rectangulum $Dc \times IN$ seu $Dcx E$ æquale est dimidio rectanguli $YX \times XC$ seu triangulo XCY; hoc est, quoniam arearum $VDba$, VIC æquales semper sunt nascentes particulæ $DbzE$, ICK, & arearum $VDca$, VCX æquales semper sunt nascentes particulæ $DcxE$, XCY, erit area genita $VDba$ æqualis areæ genitæ VIC, ideoque tempori proportionalis, & area genita $VDca$ æqualis sectori genito VCX. Dato igitur tempore quovis ex quo corpus discessit de loco V, dabitur area ipsi proportionalis $VDba$, & inde dabitur corporis altitudo CD vel CI; & area $VDca$, eique æqualis sector VCX una cum ejus angulo VCI. Datis autem angulo VCI & altitudine CI datur locus I, in quo corpus completo illo tempore reperietur. *Q. E. I.*

Corol. 1. Hinc maximæ minimæque corporum altitudines, id est, apsides trajectoriarum expedite inveniri possunt. Sunt enim apsides puncta illa in quibus recta IC per centrum ducta incidit perpendiculariter in trajectoriam VIK: id quod fit ubi rectæ IK & NK æquantur, ideoque ubi area $ABFD$ æqualis est ZZ.

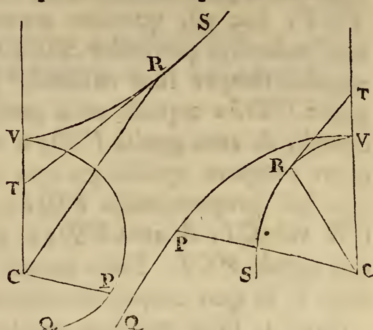
Corol. 2. Sed & angulus KIN, in quo trajectoria alicubi secat lineam illam IC, ex data corporis altitudine IC expedite invenitur; nimirum capiendo sinum ejus ad radium ut KN ad IK, id est, ut Z ad latus quadratum areæ $ABFD$.

Corol. 3. Si centro C & vertice principali V describatur sectio quælibet conica VRS, & a quovis ejus puncto R agatur tangens RT occurrens axi infinitæ producto CV in puncto T; dein juncta CR ducatur recta CP, quæ æqualis sit abscissæ CT, angulumque VCP sectori VCR proportionalem constituat; tendat autem ad centrum C vis centripeta cubo distantiæ locorum a centro reciproce proportionalis, & exeat corpus de loco V justa cum velocitate secundum lineam rectæ CV perpendicularem: progredietur corpus illud in trajectoria VPQ quam punctum P perpetuo tangit; ideoque si conica sectio VRS hyperbola sit, descendet idem ad centrum: Sin ea ellipsis sit, ascendet illud perpetuo & abibit



De Motu Corporum

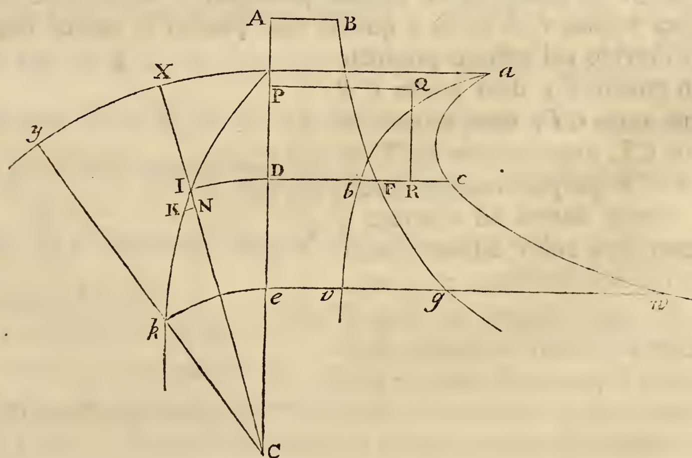
abibit in infinitum. Et contra, si corpus quacunque cum velocitate exeat de loco *V*, & perinde ut incœperit vel oblique descendere ad centrum, vel ab eo oblique ascendere, figura *VRS* vel hyperbola sit vel ellipsis, inveniri potest trajectoria augendo vel minuendo angulum *VCP* in data aliqua ratione. Sed &, vi centripeta in centrifugam versa, ascendet corpus oblique in trajectoria *VPQ*, quæ invenitur capiendo angulum *VCP* sectori elliptico *VRC* proportionalem, & longitudinem *CP* longitudini *CT* æqualem ut supra. Consequuntur hæc omnia ex propositione præcedente, per curvæ cujusdam quadraturam, cujus inventionem, ut satis facilem, brevitatis gratia missam facio.



PROPOSITIO XLII. PROBLEMA XXIX.

Data lege vis centripetæ, requiritur motus corporis de loco dato, data cum velocitate, secundum datam rectam egressi.

Stantibus quæ in tribus propositionibus præcedentibus: exeat



corpus de loco *I* secundum lineolam *IK*, ea cum velocitate quam corpus

corpus aliud, vi aliqua uniformi centripeta, de loco *P* cadendo acquirere poſſet in *D*: ſitque hæc vis uniformis ad vim, qua corpus primum urgetur in *I*, ut *DR* ad *DF*. Pergat autem corpus verſus *k*; centroque *C* & intervallo *Ck* deſcribatur circulus *ke* occurrens rectæ *PD* in *e*, & erigantur curvarum *BFg*, *abv*, *acw* ordinatim applicatæ *eg*, *ev*, *ew*. Ex dato rectangulo *PDRQ*, dataque lege vis centripetæ qua corpus primum agitatur, datur curva linea *BFg*, per conſtructionem problematis XXVII, & ejus corol. I. Deinde ex dato angulo *CIK* datur proportio naſcentium *IK*, *KN*, & inde, per conſtructionem prob. XXVIII. datur quantitas Q, una cum curvis lineis *abv*, *acw*: ideoque, completo tempore quovis *Dbve*, datur tum corporis altitudo *Ce* vel *Ck*, tum area *Dcwe*, eique æqualis ſector *XCy*, angulusque *ICk*, & locus *k* in quo corpus tunc verſabitur. *Q.E.I.*

Supponimus autem in his propoſitionibus vim centripetam in receſſu quidem a centro variari ſecundum legem quamcunque, quam quis imaginari poteſt, in æqualibus autem a centro diſtantiis eſſe undique eandem. Atque hactenus motum corporum in orbibus immobilibus conſideravimus. Supereſt ut de motu eorum in orbibus, qui circa centrum virium revolvuntur, adjiciamus pauca.

SECTIO IX.

De motu corporum in orbibus mobilibus, deque motu apſidum.

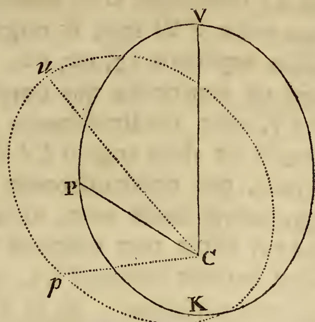
PROPOSITIO XLIII. PROBLEMA XXX.

Efficiendum eſt ut corpus in trajectoria quacunque circa centrum virium revolvente perinde moveri poſſit, atque corpus aliud in eadem trajectoria quieſcente.

In orbe *VPK* poſitione dato revolvatur corpus *P* pergendo a *V* verſus *K*. A centro *C* agatur ſemper *Cp*, quæ ſit ipſi *CP* æqualis, angulumque *VCp* angulo *VCP* proportionalem conſtituat; & area, quam linea *Cp* deſcribit, erit ad aream *VCP*, quam linea *CP* ſimul deſcribit, ut velocitas lineæ deſcribentis *Cp* ad velocitatem lineæ deſcribentis *CP*; hoc eſt, ut angulus *VCp* ad angulum *VCP*,

De Motu Corporum

ideoque in data ratione, & propterea tempori proportionalis. Cum area tempori proportionalis sit quam linea *Cp* in plano immobili describit, manifestum est quod corpus, cogente justæ quantitatis vi centripeta, revolvi possit una cum puncto *p* in curva illa linea quam punctum idem *p* ratione jam exposita describit in plano immobili. Fiat angulus *VCu* angulo *PCp*, & linea *Cu* lineæ *CV*, atque figura *uCp* figuræ *VCP* æqualis, & corpus in *p* semper existens movebitur in perimetro figuræ revolventis *uCp*, eodemque tempore describet arcum ejus *up* quo corpus aliud *P* arcum ipsi similem & æqualem *VP* in figura quiescente *VPK* describere potest. Quæratur igitur, per corollarium quintum propositionis VI, vis centripeta qua corpus revolvi possit in curva illa linea quam punctum *p* describit in plano immobili, & solvetur problema. *Q. E. F.*



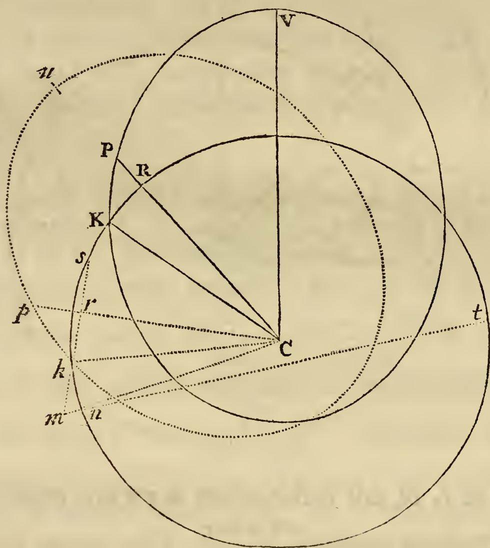
PROPOSITIO XLIV. THEOREMA XIV.

Differentia virium, quibus corpus in orbe quiescente, & corpus aliud in eodem orbe revolvente æqualiter moveri possunt, est in triplicata ratione communis altitudinis inverse.

Partibus orbis quiescentis *VP*, *PK* sunto similes & æquales orbis revolventis partes *up*, *pk*; & punctorum *P*, *K* distantia intelligatur esse quam minima. A puncto *k* in rectam *pC* demitte perpendiculum *kr*, idemque produc ad *m*, ut sit *mr* ad *kr* ut angulus *VCp* ad angulum *VCP*. Quoniam corporum altitudines *PC* & *pC*, *KC*, & *kC* semper æquantur, manifestum est quod linearum *PC* & *pC* incrementa vel decrementa semper sint æqualia, ideoque si corporum in locis *P* & *p* existentium distinguantur motus singuli (per legum corol. 2.) in binos, quorum hi versus centrum, sive secundum lineas *PC*, *pC* determinentur, & alteri prioribus transversi sint, & secundum lineas ipsis *PC*, *pC* perpendiculares directionem habeant; motus versus centrum erunt æquales, & motus transversus

corporis

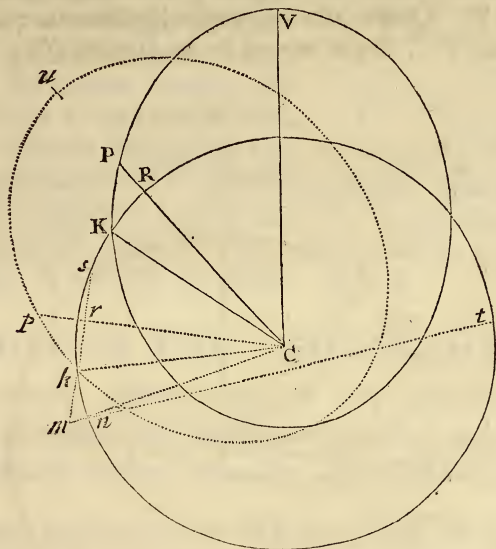
corporis *p* erit ad motum transversum corporis *P*, ut motus angularis lineæ *pC* ad motum angularem lineæ *PC*, id est, ut angulus *VCp* ad angulum *VCP*. Igitur eodem tempore quo corpus *P* motu suo utroque pervenit ad punctum *K*, corpus *p* æquali in centrum motu æqualiter movebitur a *p* versus *C*, ideoque completo illo tempore reperietur alicubi in linea *mkr*, quæ per punctum *k* in lineam *pC* perpendicularis est; & motu transverso acquiret distantiam a linea *pC*, quæ sit ad distantiam quam corpus alterum *P* acquirit a linea *PC*, ut est motus transversus corporis *p* ad motum transversum corporis alterius *P*. Quare cum *kr* æqualis sit distantiæ quam corpus *P* acquirit a linea *PC*, sitque *mr* ad *kr* ut angulus *VCp* ad angulum



VCP, hoc est, ut motus transversus corporis *p* ad motum transversum corporis *P*, manifestum est quod corpus *p* completo illo tempore reperietur in loco *m*. Hæc ita se habebunt ubi corpora *p* & *P* æqualiter secundum lineas *pC* & *PC* moventur, ideoque æqualibus viribus secundum lineas illas urgentur. Capiatur autem angulus *pCn* ad angulum *pCk* ut est angulus *VCp* ad angulum *VCP*, sitque *nC* æqualis *kC*, & corpus *p* completo illo tempore revera re-

 perietur

perietur in *n*; ideoque vi majore urgetur quam corpus *P*, si modo angulus *nCp* angulo *kCp* major est, id est si orbis *upk* vel movetur in consequentia, vel movetur in antecedentia majore celeritate quam sit dupla ejus qua linea *CP* in consequentia fertur; & vi minore si orbis tardius movetur in antecedentia. Estque virium differentia ut locorum intervallum *mn*, per quod corpus illud *p* ipsius actione, dato illo temporis spatio, transferri debet. Centro *C* intervallo *Cn* vel *Ck* describi intelligatur circulus secans lineas *mr*, *mn*



productas in *s* & *t*, & erit rectangulum $mn \times mt$ æquale rectangulo $mk \times ms$, ideoque *mn* æquale $\frac{mk \times ms}{mt}$. Cum autem triangula *pCk*, *pCn* dato tempore dentur magnitudine, sunt *kr* & *mr*, earumque differentia *mk* & summa *ms* reciproce ut altitudo *pC*, ideoque rectangulum $mk \times ms$ est reciproce ut quadratum altitudinis *pC*. Est & *mt* directe ut $\frac{1}{2} mt$, id est, ut altitudo *pC*. Hæ sunt primæ rationes linearum nascentium; & hinc fit $\frac{mk \times ms}{mt}$, id est lineola nascens *mn*, eique proportionalis virium differentia reciproce ut cubus altitudinis *pC*. *Q. E. D.*

Corol.

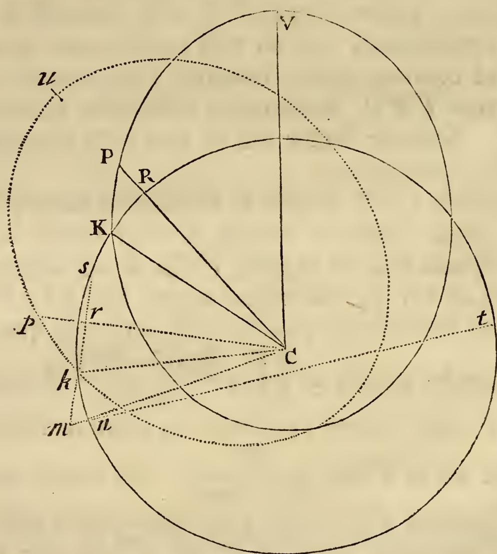
Corol. 1. Hinc differentia virium in locis *P* & *p*, vel *K* & *k*, est ad vim qua corpus motu circulari revolvi possit ab *R* ad *K* eodem tempore quo corpus *P* in orbe immobili describit arcum *PK*, ut lineola nascens *mn* ad sinum versum arcus nascentis *RK*, id est ut $\frac{mk \times ms}{mt}$ ad $\frac{rkq}{2kC}$, vel ut $mk \times ms$ ad *rk* quadratum; hoc est, si capiantur datæ quantitates F, G in ea ratione ad invicem quam habet angulus *VCP* ad angulum *VCp*, ut GG—FF ad FF. Et propterea, si centro *C* intervallo quovis *CP* vel *Cp* describatur sector circularis æqualis areæ toti *VPC*, quam corpus *P* tempore quovis in orbe immobili revolvens radio ad centrum ducto descripsit: differentia virium, quibus corpus *P* in orbe immobili & corpus *p* in orbe mobili revolvuntur, erit ad vim centripetam, qua corpus aliquod, radio ad centrum ducto, sectorem illum eodem tempore, quo descripta sit area *VPC*, uniformiter describere potuisset, ut GG—FF ad FF. Namque sector ille & area *pCk* sunt ad invicem ut tempora quibus describuntur.

Corol. 2. Si orbis *VPK* ellipsis sit umbilicum habens *C* & apsidem summam *V*; eique similis & æqualis ponatur ellipsis *upk*, ita ut sit semper *pC* æqualis *PC*, & angulus *VCp* sit ad angulum *VCP* in data ratione G ad F; pro altitudine autem *PC* vel *pC* scribatur A, & pro ellipseos latere recto ponatur 2R: erit vis, qua corpus in ellipsi mobili revolvi potest, ut $\frac{FF}{AA} + \frac{RGG - RFF}{A\ cub.}$ & contra. Exponatur enim vis qua corpus revolvatur in immota ellipsi per quantitatem $\frac{FF}{AA}$, & vis in *V* erit $\frac{FF}{CV\ quad.}$. Vis autem qua corpus in circulo ad distantiam *CV* ea cum velocitate revolvi posset quam corpus in ellipsi revolvens habet in *V*, est ad vim qua corpus in ellipsi revolvens urgetur in apside *V*, ut dimidium lateris recti ellipseos ad circuli semidiametrum *CV*, ideoque valet $\frac{RFF}{CV\ cub.}$: & vis, quæ sit ad hanc ut GG—FF ad FF, valet $\frac{RGG - RFF}{CV\ cub.}$: estque hæc vis (per hujus corol. 1.) differentia virium in *V* quibus corpus *P* in ellipsi immota *VPK*, & corpus *p* in ellipsi mobili *upk* revolvuntur. Unde cum (per hanc prop.) differentia illa in alia quavis altitudine A sit

De Motu Corporum

ſit ad ſeipſam in altitudine *CV* ut $\frac{1}{A\ cub.}$ ad $\frac{1}{CV\ cub.}$, eadem differentia in omni altitudine A valebit $\frac{RGG - RFF}{A\ cub.}$. Igitur ad vim $\frac{FF}{AA}$, qua corpus revolvi poteſt in ellipſi immobili *VPK*, addatur exceſſus $\frac{RGG - RFF}{A\ cub.}$; & componetur vis tota $\frac{FF}{AA} + \frac{RGG - RFF}{A\ cub.}$ qua corpus in ellipſi mobili *upk* iiſdem temporibus revolvi poſſit.

Corol. 3. Ad eundem modum colligetur quod, ſi orbis immobilis

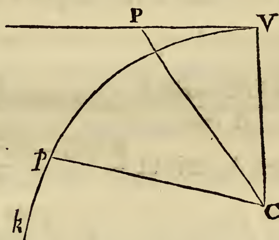


VPK ellipſis ſit centrum habens in virium centro *C*; eique ſimilis, æqualis & concentrica ponatur ellipſis mobilis *upk*; ſitque 2 R ellipſeos hujus latus rectum principale, & 2 T latus tranſverſum ſive axis major, atque angulus *VCp* ſemper ſit ad angulum *VCP* ut G ad F; vires, quibus corpora in ellipſi immobili & mobili temporibus æqualibus revolvi poſſunt, erunt ut $\frac{FFA}{T\ cub.}$ & $\frac{FFA}{T\ cub.} + \frac{RGG - RFF}{A\ cub.}$ reſpective.

Corol.

Corol. 4. Et universaliter, si corporis altitudo maxima *CV* nominetur T, & radius curvaturæ quam orbis *VPK* habet in *V*, id est radius circuli æqualiter curvi, nominetur R, & vis centripeta, qua corpus in trajectoria quacunque immobili *VPK* revolvi potest in loco *V*, dicatur $\frac{\text{VFF}}{\text{TT}}$, atque aliis in locis *P* indefinite dicatur X, altitudine *CP* nominata A, & capiatur G ad F in data ratione anguli *VCp* ad angulum *VCP*: erit vis centripeta, qua corpus idem eosdem motus in eadem trajectoria *upk* circulariter mota temporibus iisdem peragere potest, ut summa virium $\text{X} + \frac{\text{VRGG} - \text{VRFF}}{\text{A } cub.}$.

Corol. 5. Dato igitur motu corporis in orbe quocunque immobili, augeri vel minui potest ejus motus angularis circa centrum virium in ratione data, & inde inveniri novi orbes immobiles in quibus corpora novis viribus centripetis gyrentur.



Corol. 6. Igitur si ad rectam *CV* positione datam erigatur perpendiculum *VP* longitudinis indeterminatæ, jungaturque *CP*, & ipsi æqualis agatur *Cp*, constituens angulum *VCp*, qui sit ad angulum *VCP* in data ratione; vis qua corpus gyrari potest in curva illa *Vpk* quam punctum *p* perpetuo tangit, erit reciproce ut cubus altitudinis *Cp*. Nam corpus *P* per vim inertiæ, nulla alia vi urgente, uniformiter progredi potest in recta *VP*. Addatur vis in centrum *C*, cubo altitudinis *CP* vel *Cp* reciproce proportionalis, & (per jam demonstrata) detorquebitur motus ille rectilineus in lineam curvam *Vpk*. Est autem hæc curva *Vpk* eadem cum curva illa *VPQ* in corol. 3. prop. XLI. inventa, in qua ibi diximus corpora hujusmodi viribus attracta oblique ascendere.

PROPO-

PROPOSITIO XLV. PROBLEMA XXXI.

Orbium qui ſunt circulis maxime finitimi requiruntur motus apſidum.

Problema ſolvitur arithmetice faciendo ut orbis, quem corpus in ellipſi mobili (ut in propoſitionis ſuperioris corol. 2. vel 3.) revolvolvens deſcribit in plano immobili, accedat ad formam orbis cujus apſides requiruntur, & quærendo apſides orbis quem corpus illud in plano immobili deſcribit. Orbes autem eandem acquirent formam, ſi vires centripetæ quibus deſcribuntur, inter ſe collatæ, in æqualibus altitudinibus reddantur proportionales. Sit punctum *V* apſis ſumma, & ſcribantur T pro altitudine maxima *CV*, A pro altitudine quavis alia *CP* vel *Cp*, & X pro altitudinum differentia *CV*—*CP*; & vis, qua corpus in ellipſi circa umbilicum ſuum *C* (ut in corol. 2.) revolvente movetur, quæque in corol. 2. erat ut $\frac{FF}{AA}+\frac{RGG-RFF}{A\ cub.}$, id eſt ut $\frac{FFA+RGG-RFF}{A\ cub.}$, ſubſtituendo T—X pro A, erit ut $\frac{RGG-RFF+TFF-FFX}{A\ cub.}$. Reducenda ſimiliter eſt vis alia quævis centripeta ad fractionem cujus denominator ſit A *cub.* & numeratores, facta homologorum terminorum collatione, ſtatuendi ſunt analogi. Res exemplis patebit.

Exempl. 1. Ponamus vim centripetam uniformem eſſe, ideoque ut $\frac{A\ cub.}{A\ cub.}$, ſive (ſcribendo T—X pro A in numeratore) ut $\frac{T\ cub.-3TTX+3TXX-X\ cub.}{A\ cub.}$; & collatis numeratorum terminis correſpondentibus, nimirum datis cum datis & non datis cum non datis, fiet RGG—RFF+TFF ad T *cub.* ut —FFX ad —3TTX+3TXX —X *cub.* ſive ut —FF ad —3TT+3TX—XX. Jam cum orbis ponatur circulo quam maxime finitimus, coeat orbis cum circulo; & ob factas R, T æquales, atque X in infinitum diminutam, rationes ultimæ erunt RGG ad T *cub.* ut —FF ad —3TT, ſeu GG ad TT ut FF ad 3TT, & viciſſim GG ad FF ut TT ad 3TT, id eſt, ut

ut 1 ad 3; ideoque G ad F, hoc est angulus *VCp* ad angulum *VCP*, ut 1 ad $\sqrt{3}$. Ergo cum corpus in ellipsi immobili, ab apside summa ad apsidem imam descendendo conficiat angulum *VCP* (ut ita dicam) graduum 180; corpus aliud in ellipsi mobili, atque ideo in orbe immobili de quo agimus, ab apside summa ad apsidem imam descendendo conficiet angulum *VCp* graduum $\frac{180}{\sqrt{3}}$: id ideo ob similitudinem orbis hujus, quem corpus agente uniformi vi centripeta describit, & orbis illius quem corpus in ellipsi revolvente gyros peragens describit in plano quiescente. Per superiorem terminorum collationem similes redduntur hi orbes, non universaliter sed tunc cum ad formam circularem quam maxime appropinquant. Corpus igitur uniformi cum vi centripeta in orbe propemodum circulari revolvens, inter apsidem summam & apsidem imam conficiet semper angulum $\frac{180}{\sqrt{3}}$ graduum, seu 103 *gr.* 55 *m.* 23 *sec.* ad centrum; perveniens ab apside summa ad apsidem imam ubi semel confecit hunc angulum, & inde ad apsidem summam rediens ubi iterum confecit eundem angulum; & sic deinceps in infinitum.

Exempl. 2. Ponamus vim centripetam esse ut altitudinis A dignitas quælibet A^{n-3} seu $\frac{A^n}{A^3}$: ubi $n-3$ & n significant dignitatum indices quoscunque integros vel fractos, rationales vel irrationales, affirmativos vel negativos. Numerator ille A^n seu $\overline{T-X}|^n$ in seriem indeterminatam per methodum nostram serierum convergentium reducta, evadit $T^n - nXT^{n-1} + \frac{nn-n}{2}XXT^{n-2}$ &c. Et collatis hujus terminis cum terminis numeratoris alterius $RGG-RFF+TFF-FFX$, fit $RGG-RFF+TFF$ ad T^n ut $-FF$ ad $-nT^{n-1}+\frac{nn-n}{2}XT^{n-2}$ &c. Et sumendo rationes ultimas ubi orbes ad formam circularem accedunt, fit RGG ad T^n ut $-FF$ ad $-nT^{n-1}$, seu GG ad T^{n-1} ut FF ad nT^{n-1}, & vicissim GG ad FF ut T^{n-1} ad nT^{n-1} id est ut 1 ad n; ideoque G ad F, id est angulus *VCp* ad angulum *VCP*, ut 1 ad $\sqrt{n}$. Quare cum angulus *VCP*, in descensu corporis ab apside summa ad apsidem imam in ellipsi confectus, sit graduum 180; conficietur angulus *VCp*, in descensu corporis ab

T apside

De Motu Corporum

apſide ſumma ad apſidem imam, in orbe propemodum circulari quem corpus quodvis vi centripeta dignitati A^{n-3} proportionali deſcribit, æqualis angulo graduum $\frac{180}{\sqrt{n}}$; & hoc angulo repetito corpus redibit ab apſide ima ad apſidem ſummam, & ſic deinceps in infinitum. Ut ſi vis centripeta ſit ut diſtantia corporis a centro, id eſt, ut A ſeu $\frac{A^4}{A^3}$, erit n æqualis 4 & $\sqrt{n}$ æqualis 2; ideoque angulus inter apſidem ſummam & apſidem imam æqualis $\frac{180}{2}$ *gr.* ſeu 90 *gr.* Completa igitur quarta parte revolutionis unius corpus perveniet ad apſidem imam, & completa alia quarta parte ad apſidem ſummam, & ſic deinceps per vices in infinitum. Id quod etiam ex propoſitione x. manifeſtum eſt. Nam corpus urgente hac vi centripeta revolvetur in ellipſi immobili, cujus centrum eſt in centro virium. Quod ſi vis centripeta ſit reciproce ut diſtantia, id eſt directe ut $\frac{1}{A}$ ſeu $\frac{A^2}{A^3}$, erit n æqualis 2, ideoque inter apſidem ſummam & imam angulus erit graduum $\frac{180}{\sqrt{2}}$ ſeu 127 *gr.* 16 *m.* 45 *ſec.* & propterea corpus tali vi revolvens, perpetua anguli hujus repetitione, vicibus alternis ab apſide ſumma ad imam & ab ima ad ſummam perveniet in æternum. Porro ſi vis centripeta ſit reciproce ut latus quadrato-quadratum undecimæ dignitatis altitudinis, id eſt reciproce ut $A^{\frac{11}{4}}$, ideoque directe ut $\frac{1}{A^{\frac{11}{4}}}$ ſeu ut $\frac{A^{\frac{1}{4}}}{A^3}$ erit n æqualis $\frac{1}{4}$, & $\frac{180}{\sqrt{n}}$ *gr.* æqualis 360 *gr.* & propterea corpus de apſide ſumma diſcedens & ſubinde perpetuo deſcendens, perveniet ad apſidem imam ubi complevit revolutionem integram, dein perpetuo aſcenſu complendo aliam revolutionem integram, redibit ad apſidem ſummam: & ſic per vices in æternum.

Exempl. 3. Aſſumentes m & n pro quibuſvis indicibus dignitatum altitudinis, & b, c pro numeris quibuſvis datis, ponamus vim centripetam eſſe ut $\frac{bA^m + cA^n}{A\ cub.}$, id eſt, ut $\frac{b \text{ in } \overline{T-X}|^m + c \text{ in } \overline{T-X}|^n}{A\ cub.}$

ſue

ſeu (per eandem methodum noſtram ſerierum convergentium) ut

$$\frac{bT^m + cT^n - mbXT^{m-1} - ncXT^{n-1} + \frac{mm-m}{2}bXXT^{m-2} + \frac{nn-n}{2}cXXT^{n-2} \&c.}{A\ cub.}$$

& collatis numeratorum terminis, fiet $RGG - RFF + TFF$ ad $bT^m + cT^n$, ut $-FF$ ad $-mbT^{m-1} - ncT^{n-1} + \frac{mm-m}{2}bXT^{m-2} + \frac{nn-n}{2}cXT^{n-2}$ &c. Et ſumendo rationes ultimas quæ prodeunt ubi orbes ad formam circularem accedunt, fit GG ad $bT^{m-1} + cT^{n-1}$, ut FF ad $mbT^{m-1} + ncT^{n-1}$, & viciſſim GG ad FF ut $bT^{m-1} + cT^{n-1}$ ad $mbT^{m-1} + ncT^{n-1}$. Quæ proportio, exponendo altitudinem maximam *CV* ſeu T arithmetice per unitatem, fit GG ad FF ut $b+c$ ad $mb+nc$, ideoque ut 1 ad $\frac{mb+nc}{b+c}$. Unde eſt G ad F, id eſt angulus *VCp* ad angulum *VCP*, ut 1 ad $\sqrt{\frac{mb+nc}{b+c}}$. Et propterea cum angulus *VCP* inter apſidem ſummam & apſidem imam in ellipſi immobili ſit 180 *gr.* erit angulus *VCp* inter eaſdem apſides, in orbe quem corpus vi centripeta quantitati $\frac{bA^m + cA^n}{A\ cub.}$ proportionali deſcribit, æqualis angulo graduum $180\sqrt{\frac{b+c}{mb+nc}}$. Et eodem argumento ſi vis centripeta ſit ut $\frac{bA^m - cA^n}{A\ cub.}$, angulus inter apſides invenietur graduum $180\sqrt{\frac{b-c}{mb-nc}}$. Nec ſecus reſolvetur problema in caſibus difficilioribus. Quantitas, cui vis centripeta proportionalis eſt, reſolvi ſemper debet in ſeries convergentes denominatorem habentes A *cub.* Dein pars data numeratoris qui ex illa operatione provenit ad ipſius partem alteram non datam, & pars data numeratoris hujus $RGG - RFF + TFF - FFX$ ad ipſius partem alteram non datam in eadem ratione ponendæ ſunt: Et quantitates ſuperfluas delendo, ſcribendoque unitatem pro T, obtinebitur proportio G ad F.

Corol. 1. Hinc ſi vis centripeta ſit ut aliqua altitudinis dignitas, inveniri poteſt dignitas illa ex motu apſidum; & contra. Nimirum ſi motus totus angularis, quo corpus redit ad apſidem eandem, ſit

ad motum angularem revolutionis unius, ſeu graduum 360, ut numerus aliquis m ad numerum alium n, & altitudo nominetur A: erit vis ut altitudinis dignitas illa $A^{\frac{nn}{mm}-3}$, cujus index eſt $\frac{nn}{mm}-3$. Id quod per exempla ſecunda manifeſtum eſt. Unde liquet vim illam in majore quam triplicata altitudinis ratione, in receſſu a centro, decreſcere non poſſe: Corpus tali vi revolvens deque apſide diſcedens, ſi cœperit deſcendere nunquam perveniet ad apſidem imam ſeu altitudinem minimam, ſed deſcendet uſque ad centrum, deſcribens curvam illam lineam de qua egimus in corol. 3. prop. XLI. Sin cœperit illud, de apſide diſcedens, vel minimum aſcendere; aſcendet in infinitum, neque unquam perveniet ad apſidem ſummam. Deſcribet enim curvam illam lineam de qua actum eſt in eodem corol. & in corol. VI. prop. XLIV. Sic & ubi vis, in receſſu a centro, decreſcit in majore quam triplicata ratione altitudinis, corpus de apſide diſcedens, perinde ut cœperit deſcendere vel aſcendere, vel deſcendet ad centrum uſque vel aſcendet in infinitum. At ſi vis, in receſſu a centro, vel decreſcat in minore quam triplicata ratione altitudinis, vel creſcat in altitudinis ratione quacunque; corpus nunquam deſcendet ad centrum uſque, ſed ad apſidem imam aliquando perveniet: & contra, ſi corpus de apſide ad apſidem alternis vicibus deſcendens & aſcendens nunquam appellat ad centrum; vis in receſſu a centro aut augebitur, aut in minore quam triplicata altitudinis ratione decreſcet: & quo citius corpus de apſide ad apſidem redierit, eo longius ratio virium recedet a ratione illa triplicata. Ut ſi corpus revolutionibus 8 vel 4 vel 2 vel $1\frac{1}{2}$ de apſide ſumma ad apſidem ſummam alterno deſcenſu & aſcenſu redierit; hoc eſt, ſi fuerit m ad n ut 8 vel 4 vel 2 vel $1\frac{1}{2}$ ad 1, ideoque $\frac{nn}{mm}-3$ valeat $\frac{1}{64}-3$ vel $\frac{1}{16}-3$ vel $\frac{1}{4}-3$ vel $\frac{4}{9}-3$: erit vis ut $A^{\frac{1}{64}-3}$ vel $A^{\frac{1}{16}-3}$ vel $A^{\frac{1}{4}-3}$ vel $A^{\frac{4}{9}-3}$, id eſt, reciproce ut $A^{3-\frac{1}{64}}$ vel $A^{3-\frac{1}{16}}$ vel $A^{3-\frac{1}{4}}$ vel $A^{3-\frac{4}{9}}$. Si corpus ſingulis revolutionibus redierit ad apſidem eandem immotam; erit m ad n ut 1 ad 1, ideoque $A^{\frac{nn}{mm}-3}$ æqualis A^{-2} ſeu $\frac{1}{AA}$; & propterea decrementum virium in ratione duplicata altitudinis, ut in præcedentibus demonſtratum eſt. Si corpus partibus revolutionis unius

vel

vel tribus quartis, vel duabus tertiis, vel una tertia, vel una quarta, ad apſidem eandem redierit; erit m ad n ut $\frac{3}{4}$ vel $\frac{2}{3}$ vel $\frac{1}{3}$ vel $\frac{1}{4}$ ad 1, ideoque $A^{\frac{nn}{mm}-3}$ æqualis $A^{\frac{16}{9}-3}$ vel $A^{\frac{9}{4}-3}$ vel A^{9-3} vel A^{16-3}; & propterea vis aut reciproce ut $A^{\frac{11}{9}}$ vel $A^{\frac{3}{4}}$, aut directe ut A^{6} vel A^{13}. Denique ſi corpus pergendo ab apſide ſumma ad apſidem ſummam confecerit revolutionem integram, & præterea gradus tres, ideoque apſis illa ſingulis corporis revolutionibus confecerit in conſequentia gradus tres; erit m ad n ut 363 *gr.* ad 360 *gr.* ſive ut 121 ad 120, ideoque $A^{\frac{nn}{mm}-3}$ erit æquale $A^{-\frac{29523}{14641}}$; & propterea vis centripeta reciproce ut $A^{\frac{29523}{14641}}$ ſeu reciproce ut $A^{2\frac{4}{243}}$ proxime. Decreſcit igitur vis centripeta in ratione paulo majore quam duplicata, ſed quæ vicibus $59\frac{3}{4}$ propius ad duplicatam quam ad triplicatam accedit.

Corol. 2. Hinc etiam ſi corpus, vi centripeta quæ ſit reciproce ut quadratum altitudinis, revolvatur in ellipſi umbilicum habente in centro virium, & huic vi centripetæ addatur vel auferatur vis alia quævis extranea; cognoſci poteſt (per exempla tertia) motus apſidum qui ex vi illa extranea orietur: & contra. Ut ſi vis qua corpus revolvitur in ellipſi ſit ut $\frac{1}{AA}$, & vis extranea ablata ut cA, ideoque vis reliqua ut $\frac{A - cA^{4}}{A\ cub.}$; erit (in exemplis tertiis) b æqualis 1, m æqualis 1, & n æqualis 4, ideoque angulus revolutionis inter apſides æqualis angulo graduum $180\sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}$. Ponamus vim illam extraneam eſſe 357.45 partibus minorem quam vis altera qua corpus revolvitur in ellipſi, id eſt c eſſe $\frac{100}{35745}$, exiſtente A vel T æquali 1, & $180\sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}$ evadet $180\sqrt{\frac{35645}{35345}}$, ſeu 180.7623, id eſt, 180 *gr.* 45 *m.* 44 *ſ.* Igitur corpus de apſide ſumma diſcedens, motu angulari 180 *gr.* 45 *m.* 44 *ſ.* perveniet ad apſidem imam, & hoc motu duplicato ad apſidem ſummam redibit: ideoque apſis ſumma ſingulis revolutionibus progrediendo conficiet 1 *gr.* 31 *m.* 28 *ſec.* Apſis lunæ eſt duplo velocior circiter.

Hactenus de motu corporum in orbibus quorum plana per centrum virium tranſeunt. Supereſt ut motus etiam determinemus in

planis

planis excentricis. Nam ſcriptores qui motum gravium tractant, conſiderare ſolent aſcenſus & deſcenſus ponderum, tam obliquos in planis quibuſcunque datis, quam perpendiculares: & pari jure motus corporum viribus quibuſcunque centra petentium, & planis excentricis innitentium hic conſiderandus venit. Plana autem ſupponimus eſſe politiſſima & abſolute lubrica ne corpora retardent. Quinimo, in his demonſtrationibus, vice planorum quibus corpora incumbunt quæque tangunt incumbendo, uſurpamus plana his parallela, in quibus centra corporum moventur & orbitas movendo deſcribunt. Et eadem lege motus corporum in ſuperficiebus curvis peractos ſubinde determinamus.

SECTIO X.

De motu corporum in ſuperficiebus datis, deque funipendulorum motu reciproco.

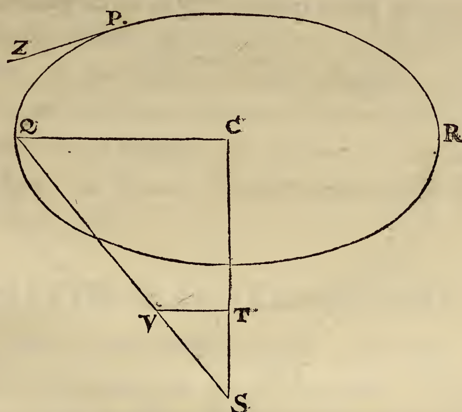
PROPOSITIO XLVI. PROBLEMA XXXII.

Poſita cujuſcunque generis vi centripeta, datoque tum virium centro tum plano quocunque in quo corpus revolvitur, & conceſſis figurarum curvilinearum quadraturis: requiritur motus corporis de loco dato, data cum velocitate, ſecundum rectam in plano illo datam egreſſi.

Sit S centrum virium, SC diſtantia minima centri hujus a plano dato, P corpus de loco P ſecundum rectam PZ egrediens, Q corpus idem in trajectoria ſua revolvens, & PQR trajectoria illa, in plano dato deſcripta, quam invenire oportet. Jungantur CQ, QS, & ſi in QS capiatur SV proportionalis vi centripetæ qua corpus trahitur verſus centrum S, & agatur VT quæ ſit parallela CQ & occurrat SC in T: Vis SV reſolvetur (per legum corol 2.) in vires ST, TV; quarum ST trahendo corpus ſecundum lineam plano perpendicularem, nil mutat motum ejus in hoc plano. Vis autem altera TV, agendo ſecundum poſitionem plani, trahit corpus directe verſus

punctum

punctum C in plano datum, ideoque efficit, ut corpus illud in hoc plano perinde moveatur, ac si vis ST tolleretur, & corpus vi sola TV revolveretur circa centrum C in spatio libero. Data autem vi centripeta TV qua corpus Q in spatio libero circa centrum datum



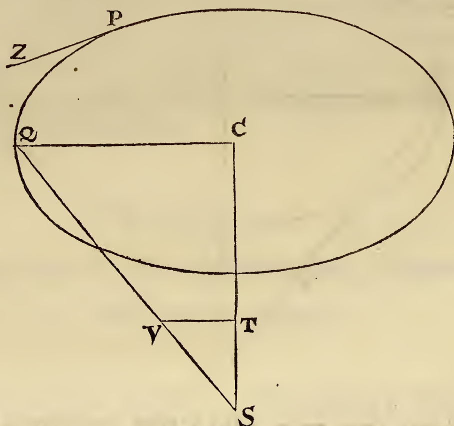
C revolvitur, datur (per prop. XLII.) tum trajectoria PQR, quam corpus describit, tum locus Q, in quo corpus ad datum quodvis tempus versabitur, tum denique velocitas corporis in loco illo Q; & contra. *Q. E. I.*

PROPOSITIO XLVII. THEOREMA. XV.

Posito quod vis centripeta proportionalis sit distantiæ corporis a centro; corpora omnia in planis quibuscunque revolventia describent ellipses, & revolutiones temporibus æqualibus peragent; quæque moventur in lineis rectis, ultro citroque discurrendo, singulas eundi & redeundi periodos iisdem temporibus absolvent.

Nam, stantibus quæ in superiore propositione, vis SV, qua corpus Q in plano quovis PQR revolvens trahitur versus centrum S, est ut distantia SQ; atque ideo ob proportionales SV & SQ, TV & CQ, vis TV, qua corpus trahitur versus punctum C in orbis plano datum,

datum, eſt ut diſtantia *CQ*. Vires igitur, quibus corpora in plano *PQR* verſantia trahuntur verſus punctum *C*, ſunt pro ratione diſtantiarum æquales viribus quibus corpora undiquaque trahuntur verſus centrum *S*; & propterea corpora movebuntur iiſdem temporibus, in iiſdem figuris, in plano quovis *PQR* circa punctum *C*, atque in



ſpatiis liberis circa centrum *S*; ideoque (per corol. 2. prop. x. & corol. 2. prop. xxxviii.) temporibus ſemper æqualibus, vel deſcribent ellipſes in plano illo circa centrum *C*, vel periodos movendi ultro citroque in lineis rectis, per centrum *C* in plano illo ductis, complebunt. *Q. E. D.*

Scholium.

His affines ſunt aſcenſus ac deſcenſus corporum in ſuperficiebus curvis. Concipe lineas curvas in plano deſcribi, dein circum axes quoſvis datos per centrum virium tranſeuntes revolvi, & ea revolutione ſuperficies curvas deſcribere; tum corpora ita moveri ut eorum centra in his ſuperficiebus perpetuo reperiantur. Si corpora illa oblique aſcendendo & deſcendend ocurrant ultro citroque; peragentur eorum motus in planis per axem tranſeuntibus, atque ideo in lineis curvis, quarum revolutione curvæ illæ ſuperficies genitæ ſunt. Iſtis igitur in caſibus ſufficit motum in his lineis curvis conſiderare.

PROPO-

PROPOSITIO XLVIII. THEOREMA XVI.

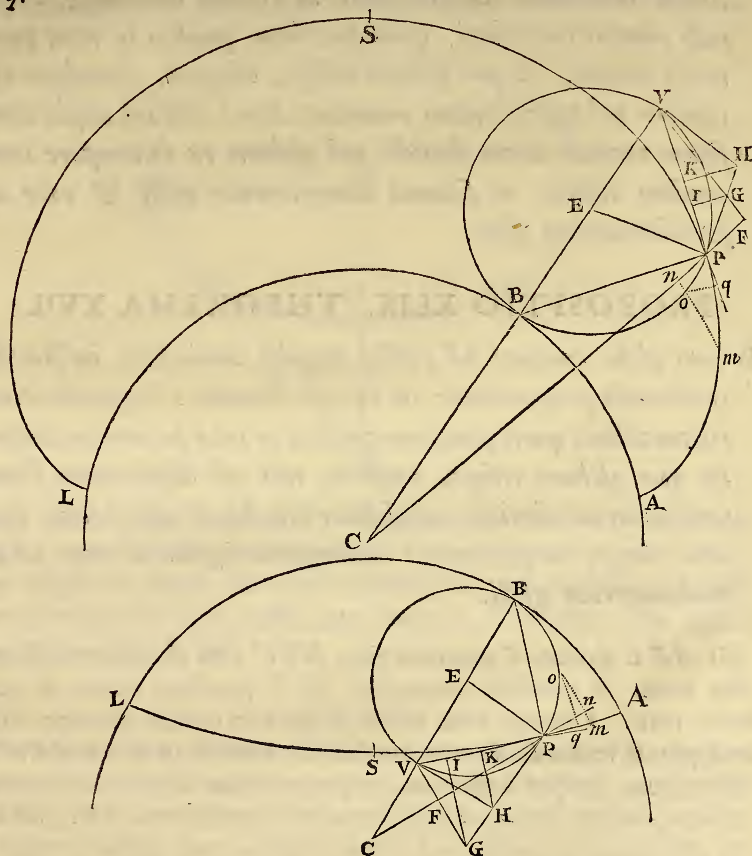
Si rota globo extrinsecus ad angulos rectos insistat, & more rotarum revolvendo progrediatur in circulo maximo; longitudo itineris curvilinei, quod punctum quodvis in rotæ perimetro datum, ex quo globum tetigit, confecit, (quodque cycloidem vel epicycloidem nominare licet) erit ad duplicatum sinum versum arcus dimidii qui globum ex eo tempore inter eundum tetigit, ut summa diametrorum globi & rotæ ad semidiametrum globi.

PROPOSITIO XLIX. THEOREMA XVII.

Si rota globo concavo ad rectos angulos intrinsecus insistat & revolvendo progrediatur in circulo maximo; longitudo itineris curvilinei quod punctum quodvis in rotæ perimetro datum, ex quo globum tetigit, confecit, erit ad duplicatum sinum versum arcus dimidii qui globum toto hoc tempore inter eundem tetigit, ut differentia diametrorum globi & rotæ ad semidiametrum globi.

Sit *ABL* globus, *C* centrum ejus, *BPV* rota ei insistens, *E* centrum rotæ, *B* punctum contactus, & *P* punctum datum in perimetro rotæ. Concipe hanc rotam pergere in circulo maximo *ABL* ab *A* per *B* versus *L*, & inter eundum ita revolvi ut arcus *AB*, *PB* sibi invicem semper æquentur, atque punctum illud *P* in perimetro rotæ datum interea describere viam curvilineam *AP*. Sit autem *AP* via tota curvilinea descripta ex quo rota globum tetigit in *A*, & erit viæ hujus longitudo *AP* ad duplum sinum versum arcus $\frac{1}{2}PB$, ut $2\,CE$ ad *CB*. Nam recta *CE* (si opus est producta) occurrat rotæ in *V*, junganturque *CP*, *BP*, *EP*, *VP*, & in *CP* productam demittatur normalis *VF*. Tangant *PH*, *VH* circulum in *P* & *V* concurrentes in *H*, secetque *PH* ipsam *VF* in *G*, & ad

ad *VP* demittantur normales *GI*, *HK*. Centro item *C* & intervallo quovis deſcribatur circulus *nom* ſecans rectam *CP* in *n*, rotæ perimetrum *BP* in *o*, & viam curvilineam *AP* in *m*; centroque *V* & intervallo *Vo* deſcribatur circulus ſecans *VP* productam in *q*.



Quoniam rota eundo ſemper revolvitur circa punctum contactus *B*, manifeſtum eſt quod recta *BP* perpendicularis eſt ad lineam illam curvam *AP* quam rotæ punctum *P* deſcribit, atque ideo quod recta *VP* tanget hanc curvam in puncto *P*. Circuli *nom* radius ſenſim auctus vel diminutus æquetur tandem diſtantiæ *CP*; &, ob

ob similitudinem figuræ evanescentis *Pnomq* & figuræ *PFGVI*, ratio ultima lineolarum evanescentium *Pm*, *Pn*, *Po*, *Pq*, id est, ratio mutationum momentanearum curvæ *AP*, rectæ *CP*, arcus circularis *BP*, ac rectæ *VP*, eadem erit quæ linearum *PV*, *PF*, *PG*, *PI* respective. Cum autem *VF* ad *CF* & *VH* ad *CV* perpendiculares sint, angulique *HVG*, *VCF* propterea æquales; & angulus *VHG* (ob angulos quadrilateri *HVEP* ad *V* & *P* rectos) angulo *CEP* æqualis est, similia erunt triangula *VHG*, *CEP*; & inde fiet ut *EP* ad *CE* ita *HG* ad *HV* seu *HP* & ita *KI* ad *KP*, & composite vel divisim ut *CB* ad *CE* ita *PI* ad *PK*, & duplicatis consequentibus ut *CB* ad 2 *CE* ita *PI* ad *PV*, atque ita *Pq* ad *Pm*. Est igitur decrementum lineæ *VP*, id est, incrementum lineæ *BV*—*VP* ad incrementum lineæ curvæ *AP* in data ratione *CB* ad 2 *CE*, & propterea (per corol. lem. IV.) longitudines *BV*—*VP* & *AP*, incrementis illis genitæ, sunt in eadem ratione. Sed, existente *BV* radio, est *VP* co-sinus anguli *BVP* seu $\frac{1}{2}$ *BEP*, ideoque *BV*—*VP* sinus versus est ejusdem anguli; & propterea in hac rota, cujus radius est $\frac{1}{2}$ *BV*, erit *BV*—*VP* duplus sinus versus arcus $\frac{1}{2}$ *BP*. Ergo *AP* est ad duplum sinum versum arcus $\frac{1}{2}$ *BP* ut 2 *CE* ad *CB*. *Q. E. D.*

Lineam autem *AP* in propositione priore cycloidem extra globum, alteram in posteriore cycloidem intra globum distinctionis gratia nominabimus.

Corol. 1. Hinc si describatur cyclois integra *ASL* & bisecetur ea in *S*, erit longitudo partis *PS* ad longitudinem *VP* (quæ duplus est sinus anguli *VBP*, existente *EB* radio) ut 2 *CE* ad *CB*, atque ideo in ratione data.

Corol. 2. Et longitudo semiperimetri cycloidis *AS* æquabitur lineæ rectæ, quæ est ad rotæ diametrum *BV* ut 2 *CE* ad *CB*.

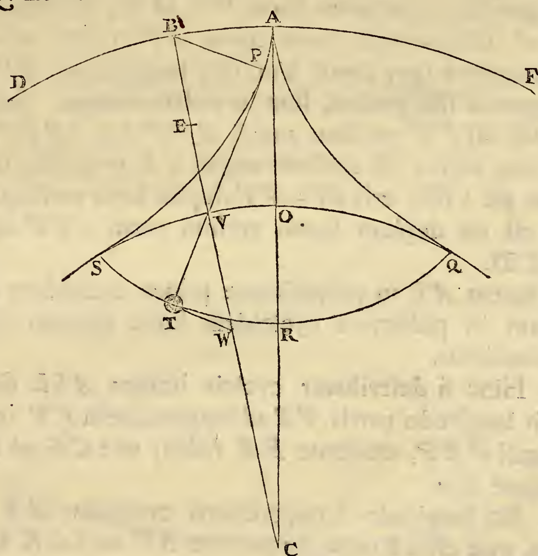
PROPOSITIO L. PROBLEMA XXXIII.

Facere ut corpus pendulum oscilletur in cycloide data.

Intra globum *QVS*, centro *C* descriptum, detur cyclois *QRS* bisecta in *R* & punctis suis extremis *Q* & *S* superficiei globi hinc inde occurrens. Agatur *CR* bisecans arcum *QS* in *O*, & producatur ea ad *A*, ut sit *CA* ad *CO* ut *CO* ad *CR*. Centro *C* inter-

 vallo

vallo *CA* describatur globus exterior *DAF*, & intra hunc globum a rota, cujus diameter sit *AO*, describantur duæ semicycloides *AQ*, *AS*, quæ globum interiorem tangant in *Q* & *S* & globo exteriori occurrant in *A*. A puncto illo *A*, filo *APT* longitudinem *AR* æquante, pendeat corpus *T*, & ita intra semicycloides *AQ*, *AS* oscilletur, ut quoties pendulum digreditur a perpendiculo *AR*, filum parte sui superiore *AP* applicetur ad semicycloidem illam *APS* versus quam peragitur motus, & circum eam ceu obstaculum flectatur, parteque reliqua *PT* cui semicyclois nondum objicitur, protendatur in lineam rectam; & pondus *T* oscillabitur in cycloide data *QRS*. *Q. E. F.*



Occurrat enim filum *PT* tum cycloidi *QRS* in *T*, tum circulo *QOS* in *V*, agaturque *CV*; & ad fili partem rectam *PT*, e punctis extremis *P* ac *T*, erigantur perpendicula *BP*, *TW*, occurrentia rectæ *CV* in *B* & *W*. Patet, ex constructione & genesi similium figurarum *AS*, *SR*, perpendicula illa *PB*, *TW* abscindere de *CV* longitudines *VB*, *VW* rotarum diametris *OA*, *OR* æquales. Est igitur *TP* ad *VP* (duplum sinum anguli *VBP* existente $\frac{1}{2}BV$ radio) ut *BW* ad *BV*, seu $AO+OR$ ad *AO*, id est (cum sint *CA* ad

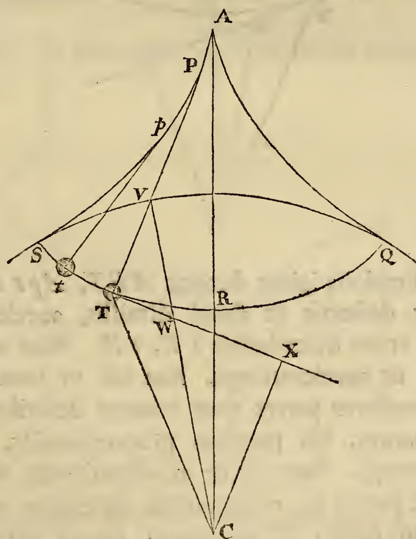
ad *CO*, *CO* ad *CR* & divisim *AO* ad *OR* proportionales) ut *CA*+*CO* ad *CA*, vel, si bisecetur *BV* in *E*, ut 2 *CE* ad *CB*. Proinde (per corol 1. prop. XLIX.) longitudo partis rectæ fili *PT* æquatur semper cycloidis arcui *PS*, & filum totum *APT* æquatur semper cycloidis arcui dimidio *APS*, hoc est (per corol. 2. prop. XLIX.) longitudini *AR*. Et propterea vicissim si filum manet semper æquale longitudini *AR* movebitur punctum *T* in cycloide data *QRS*. *Q. E. D.*

Corol. Filum *AR* æquatur semicycloidi *AS*, ideoque ad globi exterioris semidiametrum *AC* eandem habet rationem quam similis illi semicyclois *SR* habet ad globi interioris semidiametrum *CO*.

PROPOSITIO LI. THEOREMA XVIII.

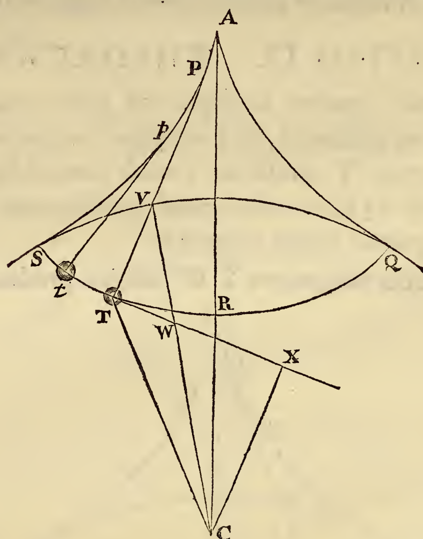
Si vis centripeta tendens undique ad globi centrum C *sit in locis singulis ut distantia loci cujusque a centro, & hac sola vi agente corpus* T *oscilletur (modo jam descripto) in perimetro cycloidis* QRS: *dico quod oscillationum utcunque inæqualium æqualia erunt tempora.*

Nam in cycloidis tangentem *TW* infinite productam cadat per-



pendiculum *CX* & jungatur *CT*. Quoniam vis centripeta qua corpus

pus *T* impellitur versus *C* est ut distantia *CT*, atque hæc (per legum corol. 2.) resolvitur in partes *CX*, *TX*, quarum *CX* impellendo corpus directe a *P* distendit filum *PT* & per ejus resistentiam tota cessat, nullum alium edens effectum; pars autem altera *TX*, urgendo corpus transversim seu versus *X*, directe accelerat motum ejus in cycloide; manifestum est quod corporis acceleratio, huic vi acceleratrici proportionalis, sit singulis momentis ut longitudo *TX*, id est, ob datas *CV*, *WV* iisque proportionales *TX*, *TW*, ut longitudo *TW*, hoc est (per corol. 1. prop. XLIX.) ut longitudo arcus



cycloidis *TR*. Pendulis igitur duobus *APT*, *Apt* de perpendiculo *AR* inæqualiter deductis & simul dimissis, accelerationes eorum semper erunt ut arcus describendi *TR*, *tR*. Sunt autem partes sub initio descriptæ ut accelerationes, hoc est, ut totæ sub initio describendæ, & propterea partes quæ manent describendæ & accelerationes subsequentes, his partibus proportionales, sunt etiam ut totæ; & sic deinceps. Sunt igitur accelerationes, atque ideo velocitates genitæ & partes his velocitatibus descriptæ partesque describendæ, semper ut totæ; & propterea partes describendæ datam servantes

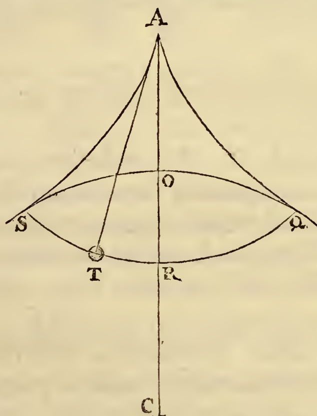
ſervantes rationem ad invicem ſimul evaneſcent, id eſt, corpora duo oſcillantia ſimul pervenient ad perpendiculum *AR*. Cumque viciſſim aſcenſus perpendiculorum de loco infimo *R*, per eoſdem arcus cycloidales motu retrogrado facti, retardentur in locis ſingulis a viribus iiſdem a quibus deſcenſus accelerabantur, patet velocitates aſcenſuum ac deſcenſuum per eoſdem arcus factorum æquales eſſe, atque ideo temporibus æqualibus fieri; & propterea, cum cycloidis partes duæ *RS* & *RQ* ad utrumque perpendiculi latus jacentes ſint ſimiles & æquales, pendula duo oſcillationes ſuas tam totas quam dimidias iiſdem temporibus ſemper peragent. *Q. E. D.*

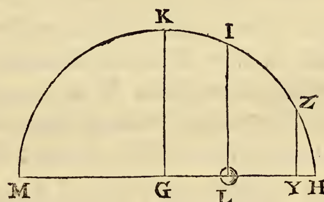
Corol. Vis qua corpus *T* in loco quovis *T* acceleratur vel retardatur in cycloide, eſt ad totum corporis ejuſdem pondus in loco altiſſimo *S* vel *Q*, ut cycloidis arcus *TR* ad ejuſdem arcum *SR* vel *QR*.

PROPOSITIO LII. PROBLEMA XXXIV.

Definire & velocitates pendulorum in locis ſingulis, & tempora quibus tum oſcillationes totæ, tum ſingulæ oſcillationum partes peraguntur.

Centro quovis *G*, intervallo *GH* cycloidis arcum *RS* æquante,

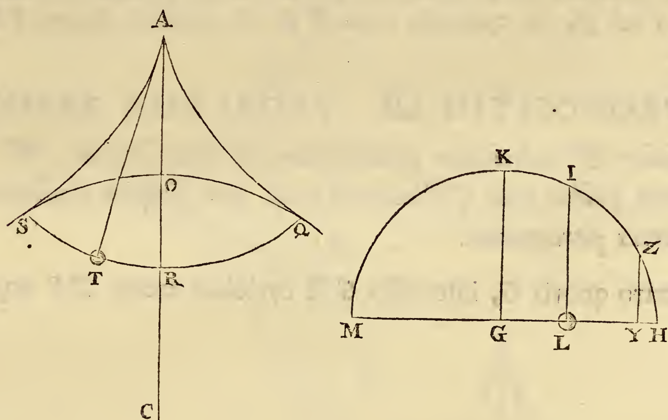




deſcribe ſemicirculum *HKM* ſemidiametro *GK* biſectum. Et ſi vis centripeta, diſtantiis locorum a centro proportionalis, tendat ad

centrum

centrum *G*, sitque ea in perimetro *HIK* æqualis vi centripetæ in perimetro globi *QOS* ad ipsius centrum tendenti; & eodem tempore quo pendulum *T* dimittitur e loco supremo *S*, cadat corpus aliquod *L* ab *H* ad *G*: quoniam vires quibus corpora urgentur sunt æquales sub initio & spatiis describendis *TR*, *LG* semper proportionales, atque ideo, si æquantur *TR* & *LG*, æquales in locis *T* & *L*; patet corpora illa describere spatia *ST*, *HL* æqualia sub initio, ideoque subinde pergere æqualiter urgeri, & æqualia spatia describere. Quare (per prop. XXXVIII.) tempus quo corpus describit arcum *ST* est ad tempus oscillationis unius, ut arcus *HI*, tempus quo corpus *H* perveniet ad *L*, ad semiperipheriam *HKM*,



tempus quo corpus *H* perveniet ad *M*. Et velocitas corporis penduli in loco *T* est ad velocitatem ipsius in loco infimo *R*, (hoc est, velocitas corporis *H* in loco *L* ad velocitatem ejus in loco *G*, seu incrementum momentaneum lineæ *HL* ad incrementum momentaneum lineæ *HG*, arcubus *HI*, *HK* æquabili fluxu crescentibus) ut ordinatim applicata *LI* ad radium *GK*, sive ut $\sqrt{SRq. - TRq.}$ ad *SR*. Unde cum, in oscillationibus inæqualibus, describantur æqualibus temporibus arcus totis oscillationum arcubus proportionales; habentur, ex datis temporibus, & velocitates & arcus descripti in oscillationibus universis. Quæ erant primo invenienda.

Oscil-

Oscillentur jam funipendula corpora in cycloidibus diversis intra globos diversos, quorum diversæ sunt etiam vires absolutæ, descriptis: &, si vis absoluta globi cujusvis QOS dicatur V, vis acceleratrix qua pendulum urgetur in circumferentia hujus globi, ubi incipit directe versus centrum ejus moveri, erit ut distantia corporis penduli a centro illo & vis absoluta globi conjunctim, hoc est, ut $CO \times$ V. Itaque lineola HY, quæ sit ut hæc vis acceleratrix $CO \times$ V, describetur dato tempore; &, si erigatur normalis YZ circumferentiæ occurrens in Z, arcus nascens HZ denotabit datum illud tempus. Est autem arcus hic nascens HZ in subduplicata ratione rectanguli GHY, ideoque ut $\sqrt{GH \times CO \times \mathrm{V}}$. Unde tempus oscillationis integræ in cycloide QRS (cum sit ut semiperipheria HKM, quæ oscillationem illam integram denotat, directe; utque arcus HZ, qui datum tempus similiter denotat, inverse) fiet ut GH directe & $\sqrt{GH \times CO \times \mathrm{V}}$ inverse, hoc est, ob æquales GH & SR, ut $\sqrt{\frac{SR}{CO \times \mathrm{V}}}$, sive (per corol. prop. L.) ut $\sqrt{\frac{AR}{AC \times \mathrm{V}}}$. Itaque oscillationes in globis & cycloidibus omnibus, quibuscunque cum viribus absolutis factæ, sunt in ratione quæ componitur ex subduplicata ratione longitudinis fili directe, & subduplicata ratione distantiæ inter punctum suspensionis & centrum globi inverse, & subduplicata ratione vis absolutæ globi etiam inverse. *Q. E. I.*

Corol. 1. Hinc etiam oscillantium, cadentium & revolventium corporum tempora possunt inter se conferri. Nam si rotæ, qua cyclois intra globum describitur, diameter constituatur æqualis semidiametro globi cyclois evadet linea recta per centrum globi transiens, & oscillatio jam erit descensus & subsequens ascensus in hac recta. Unde datur tum tempus descensus de loco quovis ad centrum, tum tempus huic æquale quo corpus uniformiter circa centrum globi ad distantiam quamvis revolvendo arcum quadrantalem describit. Est enim hoc tempus (per casum secundum) ad tempus semioscillationis in cycloide quavis QRS ut 1 ad $\sqrt{\frac{AR}{AC}}$.

Corol. 2. Hinc etiam consectantur quæ *Wrennus* & *Hugenius* de cycloide vulgari adinvenerunt. Nam si globi diameter augeatur in infinitum: mutabitur ejus superficies sphærica in planum, visque centripeta aget uniformiter secundum lineas huic plano perpendiculares,

culares, & cyclois noſtra abibit in cycloidem vulgi. Iſto autem in caſu longitudo arcus cycloidis, inter planum illud & punctum deſcribens, æqualis evadet quadruplicato ſinui verſo dimidii arcus rotæ inter idem planum & punctum deſcribens; ut invenit *Wrennus*: Et pendulum inter duas ejuſmodi cycloides in ſimili & æquali cycloide temporibus æqualibus oſcillabitur, ut demonſtravit *Hugenius*. Sed & deſcenſus gravium, tempore oſcillationis unius, is erit quem *Hugenius* indicavit.

Aptantur autem propoſitiones a nobis demonſtratæ ad veram conſtitutionem terræ, quatenus rotæ eundo in ejus circulis maximis deſcribunt motu clavorum, perimetris ſuis infixorum, cycloides extra globum; & pendula inferius in fodinis & cavernis terræ ſuſpenſa, in cycloidibus intra globos oſcillari debent, ut oſcillationes omnes evadant iſochronæ. Nam gravitas (ut in libro tertio docebitur) decreſcit in progreſſu a ſuperficie terræ, ſurſum quidem in duplicata ratione diſtantiarum a centro ejus, deorſum vero in ratione ſimplici.

PROPOSITIO LIII. PROBLEMA XXXV.

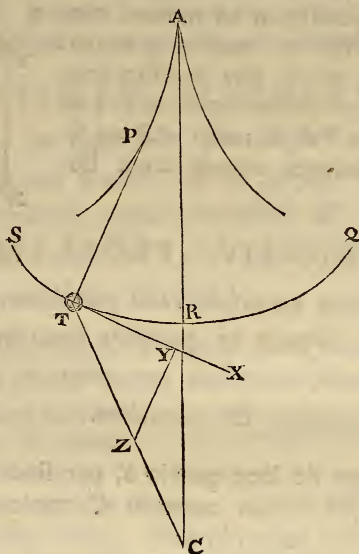
Conceſſis figurarum curvilinearum quadraturis, invenire vires quibus corpora in datis curvis lineis oſcillationes ſemper iſochronas peragent.

Oſcilletur corpus T in curva quavis linea $STRQ$, cujus axis ſit AR tranſiens per virium centrum C. Agatur TX quæ curvam illam in corporis loco quovis T contingat, inque hac tangente TX capiatur TY æqualis arcui TR. Nam longitudo arcus illius ex figurarum quadraturis, per methodos vulgares, innoteſcit. De puncto Y educatur recta YZ tangenti perpendicularis. Agatur CT perpendiculari illi occurrens in Z, & erit vis centripeta proportionalis rectæ TZ. *Q. E. I.*

Nam ſi vis, qua corpus trahitur de T verſus C, exponatur per rectam TZ captam ipſi proportionalem, reſolvetur hæc in vires TY, YZ; quarum YZ trahendo corpus ſecundum longitudinem fili PT, motum ejus nil mutat, vis autem altera TY motum ejus in curva $STRQ$ directe accelerat vel directe retardat. Proinde cum hæc

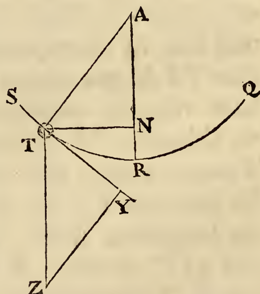
ſit

ſit ut via deſcribenda *TR*, accelerationes corporis vel retardationes in oſcillationum duarum (majoris & minoris) partibus proportionalibus deſcribendis, erunt ſemper ut partes illæ, & propterea fa-



cient ut partes illæ ſimul deſcribantur. Corpora autem quæ partes totis ſemper proportionales ſimul deſcribunt, ſimul deſcribent totas. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc ſi corpus *T*, filo rectilineo *AT* a centro *A* pendens, deſcribat arcum circularem *STRQ*, & interea urgeatur ſecundum lineas parallelas deorſum a vi aliqua, quæ ſit ad vim uniformem gravitatis, ut arcus *TR* ad ejus ſinum *TN*: æqualia erunt oſcillationum ſingularum tempora. Etenim ob parallelas *TZ*, *AR*, ſimilia erunt triangula *ATN*, *ZTY*; & propterea *TZ* erit ad *AT* ut *TY* ad *TN*; hoc eſt, ſi gravitatis vis uniformis exponatur per longitudinem datam *AT*; vis



 TZ, qua

TZ, qua oscillationes evadent isochronæ, erit ad vim gravitatis *AT*, ut arcus *TR* ipsi *TY* æqualis ad arcus illius sinum *TN*.

Corol. 2. Et propterea in horologiis, si vires a machina in pendulum ad motum conservandum impressæ ita cum vi gravitatis componi possint, ut vis tota deorsum semper sit ut linea quæ oritur applicando rectangulum sub arcu *TR* & radio *AR* ad sinum *TN*, oscillationes omnes erunt isochronæ.

PROPOSITIO LIV. PROBLEMA XXXVI.

Concessis figurarum curvilinearum quadraturis, invenire tempora, quibus corpora vi qualibet centripeta in lineis quibuscunque curvis, in plano per centrum virium transeunte descriptis, descendent & ascendent.

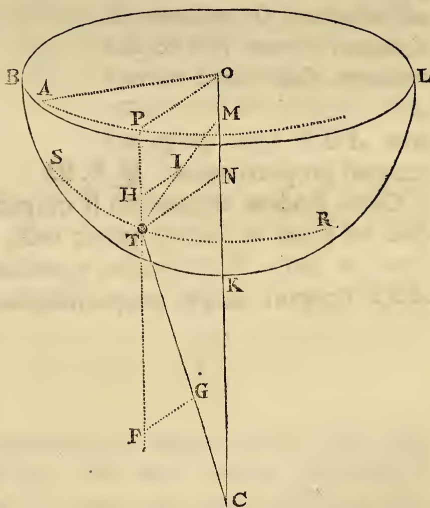
Descendat corpus de loco quovis *S*, per lineam quamvis curvam *STtR* in plano per virium centrum *C* transeunte datam. Jungatur *CS* & dividatur eadem in partes innumeras æquales, sitque *Dd* partium illarum aliqua. Centro *C* intervallis *CD*, *Cd* describantur circuli *DT*, *dt*, lineæ curvæ *STtR* occurrentes in *T* & *t*. Et ex data tum lege vis centripetæ, tum altitudine *CS* de qua corpus cecidit; dabitur velocitas corporis in alia quavis altitudine *CT* (per prop. XXXIX.) Tempus autem, quo corpus describit lineolam *Tt*, est ut lineolæ hujus longitudo, id est, ut secans anguli *tTC* directe; & velocitas inverse. Tempori huic proportionalis sit ordinatim applicata *DN* ad rectam *CS* per punctum *D* perpendicularis,

pendicularis, & ob datam *Dd* erit rectangulum *Dd* x *DN*, hoc est area *DNnd*, eidem tempori proportionale. Ergo si *PNn* sit curva illa linea quam punctum *N* perpetuo tangit, ejusque asymptotos sit recta *SQ* rectæ *CS* perpendiculariter insistens: erit area *SQPND* proportionalis tempori quo corpus descendendo descripsit lineam *ST*; proindeque ex inventa illa area dabitur tempus. *Q.E.I.*

PROPOSITIO LV. THEOREMA XIX.

Si corpus movetur in superficie quacunque curva, cujus axis per centrum virium transit, & a corpore in axem demittatur perpendicularis, eique parallela & æqualis ab axis puncto quovis dato ducatur: dico quod parallela illa aream tempori proportionalem describet.

Sit *BKL* superficies curva, *T* corpus in ea revolvens, *STR* trajectoria, quam corpus in eadem describit, *S* initium trajectoriæ, *OMK* axis superficiei curvæ, *TN* recta a corpore in axem perpendicularis, *OP* huic parallela & æqualis a puncto *O*, quod in axe datur, educta; *AP* vestigium trajectoriæ a puncto *P* in lineæ volubilis *OP* plano *AOP* descriptum; *A* vestigii initium puncto *S* respondens; *TC* recta a corpore ad centrum ducta; *TG* pars ejus vi centripetæ, qua corpus urgetur in centrum *C*, proportionalis; *TM* recta ad superficiem curvam perpendicularis; *TI* pars ejus vi pressionis, qua corpus urget superficiem vicissimque urgetur versus *M* a superficie, proportionalis; *PTF* recta axi parallela per corpus transiens, & *GF*, *IH* rectæ a punctis *G* & *I*



G & I in parallelam illam PHTF perpendiculariter demissæ. Dico jam, quod area AOP, radio OP ab initio motus descripta, sit tempori proportionalis. Nam vis TG (per legum corol. 2.) resolvitur in vires TF, FG; & vis TI in vires TH, HI: Vires autem TF, TH agendo secundum lineam PF plano AOP perpendicularem mutant solummodo motum corporis quatenus huic plano perpendicularem. Ideoque motus ejus quatenus secundum positionem plani factus; hoc est, motus puncti P, quo trajectoriæ vestigium AP in hoc plano describitur, idem est ac si vires TF, TH tollerentur, & corpus solis viribus FG, HI agitaretur; hoc est, idem ac si corpus in plano AOP, vi centripeta ad centrum O tendente & summam virium FG & HI æquante, describeret curvam AP. Sed vi tali describitur area AOP (per prop. 1.) tempori proportionalis. Q. E. D.

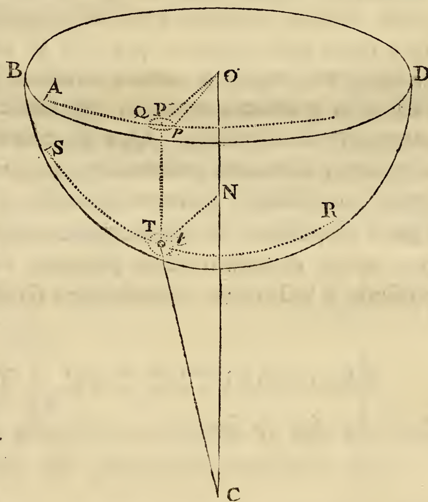
Corol. Eodem argumento si corpus, a viribus agitatum ad centra duo vel plura in eadem quavis recta CO data tendentibus, describeret in spatio libero lineam quamcunque curvam ST; foret area AOP tempori semper proportionalis.

PROPO-

PROPOSITIO LVI. PROBLEMA XXXVII.

Concessis figurarum curvilinearum quadraturis, datisque tum lege vis centripetæ ad centrum datum tendentis, tum superficie curva cujus axis per centrum illud transit; invenienda est trajectoria quam corpus in eadem superficie describet, de loco dato, data cum velocitate, versus plagam in superficie illa datam egressum.

Stantibus quæ in superiore propositione constructa sunt, exeat corpus *T* de loco dato *S* secundum rectam positione datam in trajectoriam inveniendam *STR*, cujus vestigium in plano *BLO* sit *AP*. Et ex data corporis velocitate in altitudine *SC*, dabitur ejus velocitas in alia quavis altitudine *TC*. Ea cum velocitate dato tempore quam minimo describat corpus trajectoriæ suæ particulam *Tt*, sitque *Pp* vestigium ejus in plano *AOP* descriptum. Jungatur *Op*, & circelli centro *T* intervallo *Tt* in superficie curva descripti vestigium in plano *AOP* sit ellipsis *pQ*. Et ob datum magnitudine circellum *Tt*, datamque ejus ab axe *CO* distantiam *TN* vel *PO*, dabitur ellipsis illa *pQ* specie & magnitudine, ut & positione ad rectam *PO*. Cumque area *POp* sit tempori proportionalis, atque ideo ex dato tempore detur, dabitur angulus *POp*. Et inde dabitur ellipseos & rectæ *Op* intersectio communis *p*, una cum angulo *OPp* in quo trajectoriæ vestigium *APp* secat lineam *OP*. Inde vero (conferendo



rendo prop. XLI. cum corol. suo 2.) ratio determinandi curvam *APp* facile apparet. Tum ex singulis vestigii punctis *P*, erigendo ad planum *AOP* perpendicula *PT* superficiei curvæ occurrentia in *T*, dabuntur singula trajectoriæ puncta *T*. *Q. E. I.*

SECTIO XI.

De motu corporum viribus centripetis se mutuo petentium.

Hactenus exposui motus corporum attractorum ad centrum immobile, quale tamen vix extat in rerum natura. Attractiones enim fieri solent ad corpora; & corporum trahentium & attractorum actiones semper mutuæ sunt & æquales, per legem tertiam: adeo ut neque attrahens possit quiescere neque attractum, si duo sint corpora, sed ambo (per legum corollarium quartum) quasi attractione mutua, circum gravitatis centrum commune revolvantur: & si plura sint corpora, quæ vel ab unico attrahantur, & idem attrahant, vel omnia se mutuo attrahant; hæc ita inter se moveri debeant, ut gravitatis centrum commune vel quiescat, vel uniformiter moveatur in directum. Qua de causa jam pergo motum exponere corporum se mutuo trahentium, considerando vires centripetas tanquam attractiones, quamvis fortasse, si physice loquamur, verius dicantur impulsus. In mathematicis enim jam versamur; & propterea, missis disputationibus physicis, familiari utimur sermone, quo possimus a lectoribus mathematicis facilius intelligi.

PROPOSITIO LVII. THEOREMA XX.

Corpora duo se invicem trahentia describunt, & circum commune centrum gravitatis, & circum se mutuo, figuras similes.

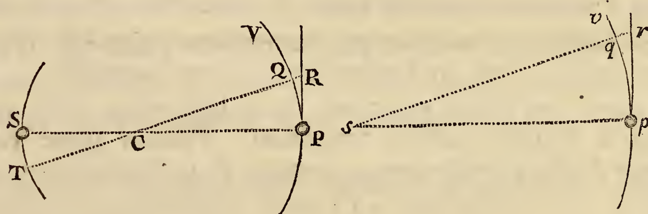
Sunt enim distantiæ corporum a communi gravitatis centro reciproce proportionales corporibus; atque ideo in data ratione ad invicem, & componendo in data ratione ad distantiam totam inter corpora. Feruntur autem hæ distantiæ circum terminum suum communem

communem æquali motu angulari, propterea quod in directum semper jacentes non mutant inclinationem ad se mutuo. Lineæ autem rectæ, quæ sunt in data ratione ad invicem, & æquali motu angulari circum terminos suos feruntur, figuras circum eosdem terminos in planis, quæ una cum his terminis vel quiescunt, vel motu quovis non angulari moventur, describunt omnino similes. Proinde similes sunt figuræ, quæ his distantiis circumactis describuntur. *Q. E. D.*

PROPOSITIO LVIII. THEOREMA XXI.

Si corpora duo viribus quibusvis se mutuo trahunt, & interea revolvuntur circa gravitatis centrum commune: dico quod figuris, quas corpora sic mota describunt circum se mutuo, potest figura similis & æqualis, circum corpus alterutrum immotum, viribus iisdem describi.

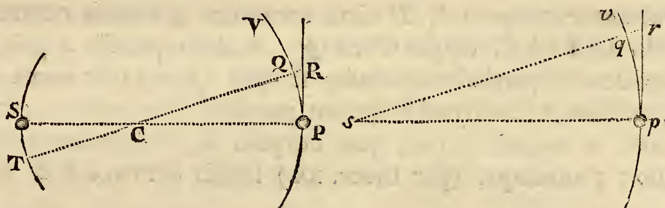
Revolvantur corpora *S*, *P* circa commune gravitatis centrum *C*, pergendo de *S* ad *T*, deque *P* ad *Q*. A dato puncto *s* ipsis *SP*, *TQ* æquales & parallelæ ducantur semper *sp*, *sq*; & curva *pqv*, quam punctum *p* revolvendo circum punctum immotum *s* describit, erit similis & æqualis curvis, quas corpora *S*, *P* describunt circum se mutuo: proindeque (per theor. xx.) similis curvis *ST* & *PQV*,



quas eadem corpora describunt circum commune gravitatis centrum *C*: idque quia proportiones linearum *SC*, *CP*, & *SP* vel *sp* ad invicem dantur.

Cas. 1. Commune illud gravitatis centrum *C*, per legum corollarium quartum, vel quiescit, vel movetur uniformiter in directum. Ponamus primo, quod id quiescit, inque *s* & *p* locentur corpora duo,

duo, immobile in *s*, mobile in *p*, corporibus *S* & *P* similia & æqualia. Dein tangant rectæ *PR* & *pr* curvas *PQ* & *pq* in *P* & *p*, & producantur *CQ* & *sq* ad *R* & *r*. Et ob similitudinem figurarum *CPRQ*, *sprq* erit *RQ* ad *rq* ut *CP* ad *sp*, ideoque in data ratione. Proinde si vis, qua corpus *P* versus corpus *S*, atque ideo versus centrum intermedium *C* attrahitur, esset ad vim, qua corpus *p* versus centrum *s* attrahitur, in eadem illa ratione data; hæ vires æqualibus temporibus attraherent semper corpora de tangentibus *PR*, *pr* ad arcus *PQ*, *pq* per intervalla ipsis proportionalia *RQ*, *rq*, ideoque vis posterior efficeret, ut corpus *p* gyraretur in curva *pqv*, quæ similis esset curvæ *PQV*, in qua vis prior efficit, ut corpus *P* gyretur; & revolutiones iisdem temporibus complerentur. At quoniam vires illæ non sunt ad invicem in ratione *CP* ad *sp*, sed (ob similitudinem & æqualitatem corporum *S* & *s*, *P* & *p*, & æqualitatem distantiarum *SP*, *sp*) sibi mutuo æquales; corpora æqualibus temporibus æqualiter trahentur de tangentibus: & propterea, ut



corpus posterius *p* trahatur per intervallum majus *rq*, requiritur tempus majus, idque in subduplicata ratione intervallorum; propterea quod (per lemma decimum) spatia ipso motus initio descripta sunt in duplicata ratione temporum. Ponatur igitur velocitas corporis *p* esse ad velocitatem corporis *P* in subduplicata ratione distantiæ *sp* ad distantiam *CP*, eo ut temporibus, quæ sint in eadem subduplicata ratione, describantur arcus *pq*, *PQ*, qui sunt in ratione integra: Et corpora *P*, *p* viribus æqualibus semper attracta describent circum centra quiescentia *C* & *s* figuras similes *PQV*, *pqv*, quarum posterior *pqv* similis est & æqualis figuræ, quam corpus *P* circum corpus mobile *S* describit. *Q. E. D.*

Cas. 2. Ponamus jam quod commune gravitatis centrum, una cum spatio in quo corpora moventur inter se, progreditur uniformiter

miter

miter in directum; & (per legum corollarium fextum) motus omnes in hoc fpatio peragentur ut prius, ideoque corpora defcribent circum fe mutuo figuras eafdem ac prius, & propterea figuræ *p q v* fimiles & æquales. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc corpora duo viribus diftantiæ fuæ proportionalibus fe mutuo trahentia, defcribunt (per prop. x.) & circum commune gravitatis centrum, & circum fe mutuo, ellipfes concentricas; & vice verfa, fi tales figuræ defcribuntur, funt vires diftantiæ proportionales.

Corol. 2. Et corpora duo, viribus quadrato diftantiæ fuæ reciproce proportionalibus, defcribunt (per prop. xi. xii. xiii.) & circum commune gravitatis centrum, & circum fe mutuo, fectiones conicas umbilicum habentes in centro, circum quod figuræ defcribuntur. Et vice verfa, fi tales figuræ defcribuntur, vires centripetæ funt quadrato diftantiæ reciproce proportionales.

Corol. 3. Corpora duo quævis circum gravitatis centrum commune gyrantia, radiis & ad centrum illud & ad fe mutuo ductis, defcribunt areas temporibus proportionales.

PROPOSITIO LIX. THEOREMA XXII.

Corporum duorum S *&* P, *circa commune gravitatis centrum* C *revolventium, tempus periodicum effe ad tempus periodicum corporis alterutrius* P, *circa alterum immotum* S *gyrantis, & figuris, quæ corpora circum fe mutuo defcribunt, figuram fimilem & æqualem defcribentis, in fubduplicata ratione corporis alterius* S, *ad fummam corporum* S+P.

Namque, ex demonftratione fuperioris propofitionis, tempora, quibus arcus quivis fimiles *PQ* & *p q* defcribuntur, funt in fubduplicata ratione diftantiarum *CP* & *SP* vel *sp*, hoc eft, in fubduplicata ratione corporis *S* ad fummam corporum *S* + *P*. Et componendo, fummæ temporum quibus arcus omnes fimiles *PQ* & *pq* defcribuntur, hoc eft, tempora tota, quibus figuræ totæ fimiles defcribuntur, funt in eadem fubduplicata ratione. *Q. E. D.*

PROPOSITIO LX. THEOREMA XXIII.

Si corpora duo S *&* P, *viribus quadrato distantiæ suæ reciproce proportionalibus, se mutuo trahentia, revolvuntur circa gravitatis centrum commune: dico quod ellipseos, quam corpus alterutrum* P *hoc motu circa alterum* S *describit, axis principalis erit ad axem principalem ellipseos, quam corpus idem* P *circa alterum quiescens* S *eodem tempore periodico describere posset, ut summa corporum duorum* S+P *ad primum duorum medie proportionalium inter hanc summam & corpus illud alterum* S.

Nam si descriptæ ellipses essent sibi invicem æquales, tempora periodica (per theorema superius) forent in subduplicata ratione corporis S ad summam corporum $S+P$. Minuatur in hac ratione tempus periodicum in ellipsi posteriore, & tempora periodica evadent æqualia; ellipseos autem axis principalis (per prop. xv.) minuetur in ratione, cujus hæc est sesquiplicata, id est in ratione, cujus ratio S ad $S+P$ est triplicata; ideoque erit ad axem principalem ellipseos alterius, ut primum duorum medie proportionalium inter $S+P$ & S ad $S+P$. Et inverse, axis principalis ellipseos circa corpus mobile descriptæ erit ad axem principalem descriptæ circa immobile, ut $S+P$ ad primum duorum medie proportionalium inter $S+P$ & S. *Q. E. D.*

PROPOSITIO LXI. THEOREMA XXIV.

Si corpora duo viribus quibusvis se mutuo trahentia, neque alias agitata vel impedita, quomodocunque moveantur; motus eorum perinde se habebunt, ac si non traherent se mutuo, sed utrumque a corpore tertio in communi gravitatis centro constituto viribus iisdem traheretur: Et virium trahentium eadem erit lex respectu distantiæ corporum a centro illo communi atque respectu distantiæ totius inter corpora.

Nam

Nam vires illæ, quibus corpora se mutuo trahunt, tendendo ad corpora, tendunt ad commune gravitatis centrum intermedium; ideoque eædem sunt, ac si a corpore intermedio manarent. *Q.E.D.*

Et quoniam datur ratio distantiæ corporis utriusvis a centro illo communi ad distantiam inter corpora, dabitur ratio cujusvis potestatis distantiæ unius ad eandem potestatem distantiæ alterius; ut & ratio quantitatis cujusvis, quæ ex una distantia & quantitatibus datis utcunque derivatur, ad quantitatem aliam, quæ ex altera distantia, & quantitatibus totidem datis, datamque illam distantiarum rationem ad priores habentibus similiter derivatur. Proinde si vis, qua corpus unum ab altero trahitur, sit directe vel inverse ut distantia corporum ab invicem; vel ut quælibet hujus distantiæ potestas; vel denique ut quantitas quævis ex hac distantia & quantitatibus datis quomodocunque derivata: erit eadem vis, qua corpus idem ad commune gravitatis centrum trahitur, directe itidem vel inverse ut corporis attracti distantia a centro illo communi, vel ut eadem distantiæ hujus potestas, vel denique ut quantitas ex hac distantia & analogis quantitatibus datis similiter derivata. Hoc est, vis trahentis eadem erit lex respectu distantiæ utriusque. *Q. E. D.*

PROPOSITIO LXII. PROBLEMA XXXVIII.

Corporum duorum, quæ viribus quadrato distantiæ suæ reciproce proportionalibus se mutuo trahunt, ac de locis datis demittuntur, determinare motus.

Corpora (per theorema novissimum) perinde movebuntur, ac si a corpore tertio in communi gravitatis centro constituto traherentur; & centrum illud ipso motus initio quiescet per hypothesin; & propterea (per legum corol. 4.) semper quiescet. Determinandi sunt igitur motus corporum (per prob. xxv.) perinde ac si a viribus ad centrum illud tendentibus urgerentur, & habebuntur motus corporum se mutuo trahentium. *Q. E. I.*

PROPO-

PROPOSITIO LXIII. PROBLEMA XXXIX.

Corporum duorum quæ viribus quadrato distantiæ suæ reciproce proportionalibus se mutuo trahunt, deque locis datis, secundum datas rectas, datis cum velocitatibus exeunt, determinare motus.

Ex datis corporum motibus sub initio, datur uniformis motus centri communis gravitatis, ut & motus spatii, quod una cum hoc centro movetur uniformiter in directum, nec non corporum motus initiales respectu hujus spatii. Motus autem subsequentes (per legum corollarium quintum, & theorema novissimum) perinde fiunt in hoc spatio, ac si spatium ipsum una cum communi illo gravitatis centro quiesceret, & corpora non traherent se mutuo, sed a corpore tertio sito in centro illo traherentur. Corporis igitur alterutrius in hoc spatio mobili, de loco dato, secundum datam rectam, data cum velocitate exeuntis, & vi centripeta ad centrum illud tendente correpti, determinandus est motus per problema nonum & vicesimum sextum: & habebitur simul motus corporis alterius circum idem centrum. Cum hoc motu componendus est uniformis ille systematis spatii & corporum in eo gyrantium motus progressivus supra inventus, & habebitur motus absolutus corporum in spatio immobili. *Q. E. I.*

PROPOSITIO LXIV. PROBLEMA XL.

Viribus quibus corpora se mutuo trahunt crescentibus in simplici ratione distantiarum a centris: requiruntur motus plurium corporum inter se.

Ponantur primo corpora duo T & L commune habentia gravitatis centrum D. Describent hæc (per corollarium primum theorematis XXI.) ellipses centra habentes in D, quarum magnitudo ex problemate V. innotescit.

Trahat jam corpus tertium S priora duo T & L viribus acceleratricibus ST, SL, & ab ipsis vicissim trahatur. Vis ST (per legum corol.

corol. 2.) reſolvitur in vires *SD*, *DT*; & vis *SL* in vires *SD*, *DL*. Vires autem *DT*, *DL*, quæ ſunt ut ipſarum ſumma *TL*, atque ideo ut vires acceleratrices quibus corpora *T* & *L* ſe mutuo trahunt, additæ his viribus corporum *T* & *L*, prior priori & poſterior poſteriori, componunt vires diſtantiis *DT* ac *DL* proportionales, ut prius, ſed viribus prioribus majores; ideoque (per corol. 1. prop. x. & corol. 1. & 8. prop. iv.) efficiunt ut corpora illa deſcribant ellipſes ut prius, ſed motu celeriore. Vires reliquæ acceleratrices *SD* & *SD*, actionibus motricibus *SD* x *T* & *SD* x *L*, quæ ſunt ut corpora, trahendo corpora illa æqualiter & ſecundum lineas *TI*, *LK*, ipſi *DS* parallellas, nil mutant ſitus eorum ad invicem, ſed faciunt ut ipſa æqualiter accedant ad lineam *IK*; quam ductam concipe per medium corporis *S*, & lineæ *DS* perpendicularem. Impedietur autem iſte ad lineam *IK* acceſſus faciendo ut ſyſtema corporum *T* & *L* ex una parte, & corpus *S* ex altera, juſtis cum velocitatibus, gyrentur circa commune gravitatis centrum *C*. Tali motu corpus *S*, eo quod ſumma virium motricium *SD* x *T* & *SD* x *L*, diſtantiæ *CS* proportionalium, tendit verſus centrum *C*, deſcribit ellipſin circa idem *C*; & punctum *D*, ob proportionales *CS*, *CD*, deſcribet ellipſin conſimilem e regione. Corpora autem *T* & *L* viribus motricibus *SD* x *T* & *SD* x *L*, prius priore, poſterius poſteriore, æqualiter & ſecundum lineas parallelas *TI* & *LK*, ut dictum eſt, attracta, pergent (per legum corollarium quintum & ſextum) circa centrum mobile *D* ellipſes ſuas deſcribere, ut prius. *Q. E. I.*

Addatur jam corpus quartum *V*, & ſimili argumento concludetur hoc & punctum *C* ellipſes circa omnium commune centrum gravitatis *B* deſcribere; manentibus motibus priorum corporum *T*, *L* & *S* circa centra *D* & *C*, ſed acceleratis. Et eadem methodo corpora plura adjungere licebit. *Q. E. I.*

Hæc ita ſe habent, etſi corpora *T* & *L* trahunt ſe mutuo viribus acceleratricibus majoribus vel minoribus quam quibus trahunt corpora reliqua pro ratione diſtantiarum. Sunto mutuæ omnium attractiones

nes

nes acceleratrices ad invicem ut diſtantiæ ductæ in corpora trahentia, & ex præcedentibus facile deducetur quod corpora omnia æqualibus temporibus periodicis ellipſes varias, circa omnium commune gravitatis centrum *B*, in plano immobili deſcribunt. *Q. E. I.*

PROPOSITIO LXV. THEOREMA XXV.

Corpora plura, quorum vires decreſcunt in duplicata ratione diſtantiarum ab eorundem centris, moveri poſſe inter ſe in ellipſibus; & radiis ad umbilicos ductis areas deſcribere temporibus proportionales quam proxime.

In propoſitione ſuperiore demonſtratus eſt caſus ubi motus plures peraguntur in ellipſibus accurate. Quo magis recedit lex virium a lege ibi poſita, eo magis corpora perturbabunt mutuos motus; neque fieri poteſt, ut corpora, ſecundum legem hic poſitam ſe mutuo trahentia, moveantur in ellipſibus accurate, niſi ſervando certam proportionem diſtantiarum ab invicem. In ſequentibus autem caſibus non multum ab ellipſibus errabitur.

Caſ. 1. Pone corpora plura minora circa maximum aliquod ad varias ab eo diſtantias revolvi, tendantque ad ſingula vires abſolutæ proportionales iiſdem corporibus. Et quoniam omnium commune gravitatis centrum (per legum corol. quartum) vel quieſcit vel movetur uniformiter in directum, fingamus corpora minora tam parva eſſe, ut corpus maximum nunquam diſtet ſenſibiliter ab hoc centro: & maximum illud vel quieſcet, vel movebitur uniformiter in directum, ſine errore ſenſibili; minora autem revolventur circa hoc maximum in ellipſibus, atque radiis ad idem ductis deſcribent areas temporibus proportionales; niſi quatenus errores inducuntur, vel per errorem maximi a communi illo gravitatis centro, vel per actiones minorum corporum in ſe mutuo. Diminui autem poſſunt corpora minora, uſque donec error iſte, & actiones mutuæ ſint datis quibuſvis minores; atque ideo donec orbes cum ellipſibus quadrent, & areæ reſpondeant temporibus, ſine errore, qui non ſit minor quovis dato. *Q. E. O.*

Caſ.

Caſ. 2. Fingamus jam ſyſtema corporum minorum modo jam deſcripto circa maximum revolventium, aliudve quodvis duorum circum ſe mutuo revolventium corporum ſyſtema progredi uniformiter in directum, & interea vi corporis alterius longe maximi & ad magnam diſtantiam ſiti urgeri ad latus. Et quoniam æquales vires acceleratrices, quibus corpora ſecundum lineas parallelas urgentur, non mutant ſitus corporum ad invicem, ſed ut ſyſtema totum, ſervatis partium motibus inter ſe, ſimul transferatur, efficiunt: manifeſtum eſt quod, ex attractionibus in corpus maximum, nulla prorſus orietur mutatio motus attractorum inter ſe, niſi vel ex attractionum acceleratricum inæqualitate, vel ex inclinatione linearum ad invicem, ſecundum quas attractiones fiunt. Pone ergo attractiones omnes acceleratrices in corpus maximum eſſe inter ſe reciproce ut quadrata diſtantiarum; & augendo corporis maximi diſtantiam, donec rectarum ab hoc ad reliqua ductarum differentiæ reſpectu earum longitudinis, & inclinationes ad invicem minores ſint, quam datæ quævis; perſeverabunt motus partium ſyſtematis inter ſe ſine erroribus, qui non ſint quibuſvis datis minores. Et quoniam, ob exiguam partium illarum ab invicem diſtantiam, ſyſtema totum ad modum corporis unius attrahitur; movebitur idem hac attractione ad modum corporis unius; hoc eſt, centro ſuo gravitatis deſcribet circa corpus maximum ſectionem aliquam conicam (*viz.* Hyperbolam vel parabolam attractione languida, ellipſin fortiore) & radio ad maximum ducto deſcribet areas temporibus proportionales, ſine ullis erroribus, niſi quas partium diſtantiæ, perexiguæ ſane & pro lubitu minuendæ, valeant efficere. *Q. E. O.*

Simili argumento pergere licet ad caſus magis compoſitos in infinitum.

Corol. 1. In caſu ſecundo, quo propius accedit corpus omnium maximum ad ſyſtema duorum vel plurium, eo magis turbabuntur motus partium ſyſtematis inter ſe; propterea quod linearum a corpore maximo ad has ductarum jam major eſt inclinatio ad invicem, majorque proportionis inæqualitas.

Corol. 2. Maxime autem turbabuntur, ponendo quod attractiones acceleratrices partium ſyſtematis, verſus corpus omnium maximum, non ſint ad invicem reciproce ut quadrata diſtantiarum a corpore illo maximo; præſertim ſi proportionis hujus inæqualitas major ſit

quam inæqualitas proportionis distantiarum a corpore maximo. Nam si vis acceleratrix, æqualiter & secundum lineas parallelas agendo, nil perturbat motus inter se, necesse est, ut ex actionis inæqualitate perturbatio oriatur, majorque sit, vel minor pro majore, vel minore inæqualitate. Excessus impulsuum majorum, agendo in aliqua corpora & non agendo in alia, necessario mutabunt situm eorum inter se. Et hæc perturbatio addita perturbationi, quæ ex linearum inclinatione & inæqualitate oritur, majorem reddet perturbationem totam.

Corol. 3. Unde si systematis hujus partes in ellipsibus, vel circulis sine perturbatione insigni moveantur; manifestum est, quod eædem a viribus acceleratricibus, ad alia corpora tendentibus, aut non urgentur nisi levissime, aut urgentur æqualiter, & secundum lineas parallelas quamproxime.

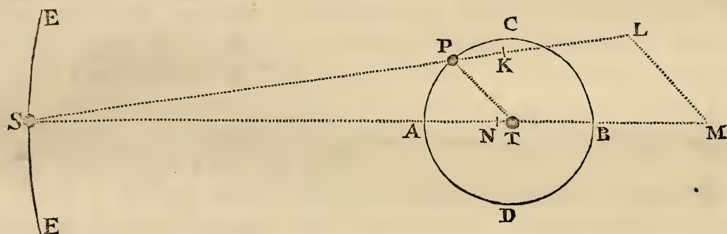
PROPOSITIO LXVI. THEOREMA XXVI.

Si corpora tria, quorum vires decrescunt in duplicata ratione distantiarum, se mutuo trahant; & attractiones acceleratrices binorum quorumcunque in tertium sint inter se reciproce ut quadrata distantiarum; minora autem circa maximum revolvantur: dico quod interius circa intimum & maximum, radiis ad ipsum ductis, describet areas temporibus magis proportionales, & figuram ad formam ellipseos umbilicum in concursu radiorum habentis magis accedentem; si corpus maximum his attractionibus agitetur; quam si maximum illud vel a minoribus non attractum quiescat, vel multo minus vel multo magis attractum, aut multo minus aut multo magis agitetur.

Liquet fere ex demonstratione corollarii secundi propositionis præcedentis; sed argumento magis distincto & latius cogente sic evincitur.

Cas. 1. Revolvantur corpora minora *P* & *S* in eodem plano circa maximum *T*, quorum *P* describat orbem interiorem *PAB*, & *S* exteriorem

teriorem *ESE*. Sit *SK* mediocris distantia corporum *P* & *S*; & corporis *P* versus *S* attractio acceleratrix, in mediocri illa distantia, exponatur per eandem. In duplicata ratione *SK* ad *SP* capiatur *SL* ad *SK*, & erit *SL* attractio acceleratrix corporis *P* versus *S* in distantia quavis *SP*. Junge *PT*, eique parallelam age *LM* occurrentem *ST* in *M*; & attractio *SL* resolvetur (per legum corol. 2.) in attractiones *SM*, *LM*. Et sic urgebitur corpus *P* vi acceleratrice triplici. Vis una tendit ad *T*, & oritur a mutua attractione corporum *T* & *P*. Hac vi sola corpus *P* circum corpus *T*, sive immotum, sive hac attractione agitatum, describere deberet & areas, radio *PT*, temporibus proportionales, & ellipsin cui umbilicus est in centro corporis *T*. Patet hoc per prop. XI. & corollaria 2. & 3. theor. XXI. Vis altera est attractionis *LM*, quæ quoniam tendit a *P* ad *T*, su-



peraddita vi priori coincidet cum ipsa, & sic faciet ut areæ etiamnum temporibus proportionales describantur per corol. 3. theor. XXI. At quoniam non est quadrato distantiæ *PT* reciproce proportionalis, componet ea cum vi priore vim ab hac proportione aberrantem, idque eo magis, quo major est proportio hujus vis ad vim priorem, cæteris paribus. Proinde cum (per prop. XI. & per corol. 2. theor. XXI.) vis, qua ellipsis circa umbilicum *T* describitur, tendere debeat ad umbilicum illum, & esse quadrato distantiæ *PT* reciproce proportionalis; vis illa composita, aberrando ab hac proportione, faciet ut orbis *PAB* aberret a forma ellipseos umbilicum habentis in *T*; idque eo magis, quo major est aberratio ab hac proportione; atque ideo etiam quo major est proportio vis secundæ *LM* ad vim primam, cæteris paribus. Jam vero vis tertia *SM*, trahendo corpus *P* secundum lineam ipsi *ST* parallelam, componet cum viribus prioribus vim, quæ non amplius dirigitur a *P* in *T*;

quæque ab hac determinatione tanto magis aberrat, quanto major eſt proportio hujus tertiæ vis ad vires priores, cæteris paribus: atque ideo quæ faciet ut corpus *P*, radio *TP*, areas non amplius temporibus proportionales deſcribat; atque ut aberratio ab hac proportionalitate tanto major ſit, quanto major eſt proportio vis hujus tertiæ ad vires cæteras. Orbis vero *PAB* aberrationem a forma elliptica præfata hæc vis tertia duplici de cauſa adaugebit, tum quod non dirigatur a *P* ad *T*, tum etiam quod non ſit reciproce proportionalis quadrato diſtantiæ *PT*. Quibus intellectis, manifeſtum eſt, quod areæ temporibus tum maxime fiunt proportionales, ubi vis tertia, manentibus viribus cæteris, ſit minima; & quod orbis *PAB* tum maxime accedit ad præfatam formam ellipticam, ubi vis tam ſecunda quam tertia, ſed præcipue vis tertia ſit minima, vi prima manente.

Exponatur corporis *T* attractio acceleratrix verſus *S* per lineam *SN*; & ſi attractiones acceleratrices *SM*, *SN* æquales eſſent; hæ, trahendo corpora *T* & *P* æqualiter & ſecundum lineas parallelas, nil mutarent ſitum eorum ad invicem. Iidem jam forent corporum illorum motus inter ſe (per legum corol. VI.) ac ſi hæ attractiones tollerentur. Et pari ratione ſi attractio *SN* minor eſſet attractione *SM*, tolleret ipſa attractionis *SM* partem *SN*, & maneret pars ſola *MN*, qua temporum & arearum proportionalitas & orbitæ forma illa elliptica perturbaretur. Et ſimiliter ſi attractio *SN* major eſſet attractione *SM*, oriretur ex differentia ſola *MN* perturbatio proportionalitatis & orbitæ. Sic per attractionem *SN* reducitur ſemper attractio tertia ſuperior *SM* ad attractionem *MN*, attractione prima & ſecunda manentibus prorſus immutatis: & propterea areæ ac tempora ad proportionalitatem, & orbita *PAB* ad formam præ-

fatam

fatam ellipticam tum maxime accedunt, ubi attractio *MN* vel nulla eſt, vel quam fieri poſſit minima; hoc eſt, ubi corporum *P* & *T* attractiones acceleratrices, factæ verſus corpus *S*, accedunt quantum fieri poteſt ad æqualitatem; id eſt, ubi attractio *SN* non eſt nulla, neque minor minima attractionum omnium *SM*, ſed inter attractionum omnium *SM* maximam & minimam quaſi mediocris, hoc eſt, non multo major neque multo minor attractione *SK*. *Q.E.D.*

Caſ. 2. Revolvantur jam corpora minora *P*, *S* circa maximum *T* in planis diverſis; & vis *LM*, agendo ſecundum lineam *PT* in plano orbitæ *PAB* ſitam, eundem habebit effectum ac prius, neque corpus *P* de plano orbitæ ſuæ deturbabit. At vis altera *NM*, agendo ſecundum lineam quæ ipſi *ST* parallela eſt (atque ideo, quando corpus *S* verſatur extra lineam nodorum, inclinatur ad planum orbitæ *PAB*) præter perturbationem motus in longitudinem jam ante expoſitam, inducet perturbationem motus in latitudinem, trahendo corpus *P* de plano ſuæ orbitæ. Et hæc perturbatio, in dato quovis corporum *P* & *T* ad invicem ſitu, erit ut vis illa generans *MN*, ideoque minima evadet ubi *MN* eſt minima, hoc eſt (uti jam expoſui) ubi attractio *SN* non eſt multo major, neque multo minor attractione *SK*. *Q. E. D.*

Corol. 1. Ex his facile colligitur, quod, ſi corpora plura minora *P*, *S*, *R*, &c. revolvantur circa maximum *T*, motus corporis intimi *P* minime perturbabitur attractionibus exteriorum, ubi corpus maximum *T* pariter a cæteris, pro ratione virium acceleratricum, attrahitur & agitatur, atque cætera a ſe mutuo.

Corol. 2. In ſyſtemate vero trium corporum *T*, *P*, *S*, ſi attractiones acceleratrices binorum quorumcunque in tertium ſint ad invicem reciproce ut quadrata diſtantiarum; corpus *P*, radio *PT*, aream circa corpus *T* velocius deſcribet prope conjunctionem *A* & oppoſitionem *B*, quam prope quadraturas *C*, *D*. Namque vis omnis qua corpus *P* urgetur & corpus *T* non urgetur, quæque non agit ſecundum lineam *PT* accelerat vel retardat deſcriptionem areæ, perinde ut ipſa in conſequentia vel in antecedentia dirigitur. Talis eſt vis *NM*. Hæc in tranſitu corporis *P* a *C* ad *A* tendit in conſequentia, motumque accelerat; dein uſque ad *D* in antecedentia, & motum retardat; tum in conſequentia uſque ad *B*, & ultimo in antecedentia tranſeundo a *B* ad *C*.

Corol.

Corol. 3. Et eodem argumento patet quod corpus *P*, cæteris paribus, velocius movetur in conjunctione & oppoſitione quam in quadraturis.

Corol. 4. Orbita corporis *P*, cæteris paribus, curvior eſt in quadraturis quam in conjunctione & oppoſitione. Nam corpora velociora minus deflectunt a recto tramite. Et præterea vis *KL*, vel *NM*, in conjunctione & oppoſitione contraria eſt vi, qua corpus *T* trahit corpus *P*; ideoque vim illam minuit; corpus autem *P* minus deflectet a recto tramite, ubi minus urgetur in corpus *T*.

Corol. 5. Unde corpus *P*, cæteris paribus, longius recedet a corpore *T* in quadraturis, quam in conjunctione & oppoſitione. Hæc ita ſe habent excluſo motu excentricitatis. Nam ſi orbita corporis *P* excentrica ſit, excentricitas ejus (ut mox in hujus corol. 9. oſtendetur) evadet maxima ubi apſides ſunt in ſyzygiis; indeque fieri poteſt ut corpus *P*, ad apſidem ſummam appellans, abſit longius a corpore *T* in ſyzygiis quam in quadraturis.

Corol. 6. Quoniam vis centripeta corporis centralis *T*, qua corpus *P* retinetur in orbe ſuo, augetur in quadraturis per additionem vis *LM*, ac diminuitur in ſyzygiis per ablationem vis *KL*, & ob magnitudinem vis *KL*, magis diminuitur quam augetur; eſt autem vis illa centripeta (per corol. 2. prop. IV.) in ratione compoſita ex ratione ſimplici radii *TP* directe & ratione duplicata temporis periodici inverſe: patet hanc rationem compoſitam diminui per actionem vis *KL*; ideoque tempus periodicum, ſi maneat orbis radius *TP*, augeri, idque in ſubduplicata ratione, qua vis illa centripeta diminuitur: auctoque ideo vel diminuto hoc radio, tempus periodicum augeri magis, vel diminui minus quam in radii hujus ratione ſeſqui-

ſeſquiplicata, (per corol. vi. prop. iv.) Si vis illa corporis centralis paulatim langueſceret, corpus *P* minus ſemper & minus attractum perpetuo recederet longius a centro *T*; & contra, ſi vis illa augeretur, accederet propius. Ergo ſi actio corporis longinqui *S*, qua vis illa diminuitur, augeatur ac diminuatur per vices: augebitur ſimul ac diminuetur radius *TP* per vices; & tempus periodicum augebitur ac diminuetur in ratione compoſita ex ratione ſeſquiplicata radii, & ratione ſubduplicata, qua vis illa centripeta corporis centralis *T*, per incrementum vel decrementum actionis corporis longinqui *S*, diminuitur vel augetur.

Corol. 7. Ex præmiſſis conſequitur etiam, quod ellipſeos a corpore *P* deſcriptæ axis, ſeu apſidum linea, quoad motum angularem, progreditur & regreditur per vices, ſed magis tamen progreditur, & per exceſſum progreſſionis fertur in conſequentia. Nam vis qua corpus *P* urgetur in corpus *T* in quadraturis, ubi vis *MN* evanuit, componitur ex vi *LM* & vi centripeta, qua corpus *T* trahit corpus *P*. Vis prior *LM*, ſi augeatur diſtantia *PT*, augetur in eadem fere ratione cum hac diſtantia, & vis poſterior decreſcit in duplicata illa ratione, ideoque ſumma harum virium decreſcit in minore quam duplicata ratione diſtantiæ *PT*, & propterea (per corol. i. prop. xlv.) efficit ut aux, ſeu apſis ſumma, regrediatur. In conjunctione vero & oppoſitione vis, qua corpus *P* urgetur in corpus *T*, differentia eſt inter vim, qua corpus *T* trahit corpus *P*, & vim *KL*; & differentia illa, propterea quod vis *KL* augetur quamproxime in ratione diſtantiæ *PT*, decreſcit in majore quam duplicata ratione diſtantiæ *PT*, ideoque (per corol i. prop. xlv.) efficit ut aux progrediatur. In locis inter ſyzygias & quadraturas pendet motus augis ex cauſa utraque conjunctim, adeo ut pro hujus vel alterius exceſſu progrediatur ipſa vel regrediatur. Unde cum vis *KL* in ſyzygiis ſit quaſi duplo major quam vis *LM* in quadraturis, exceſſus erit penes vim *KL*, transferetque augem in conſequentia. Veritas autem hujus & præcedentis corollarii facilius intelligetur concipiendo ſyſtema corporum duorum *T*, *P* corporibus pluribus *S*, *S*, *S*, &c. in orbe *ESE* conſiſtentibus, undique cingi. Namque horum actionibus actio ipſius *T* minuetur undique, decreſcetque in ratione pluſquam duplicata diſtantiæ.

Corol. 8. Cum autem pendeat apſidum progreſſus vel regreſſus a decremento vis centripetæ facto in majori vel minori quam duplicata ratione diſtantiæ *TP*, in tranſitu corporis ab apſide ima ad apſidem ſummam; ut & a ſimili incremento in reditu ad apſidem imam; atque ideo maximus ſit ubi proportio vis in apſide ſumma ad vim in apſide ima maxime recedit a duplicata ratione diſtantiarum inverſa: manifeſtum eſt quod apſides in ſyzygiis ſuis, per vim ablatitiam *KL* ſeu *NM* — *LM*, progredientur velocius, inque quadraturis ſuis tardius recedent per vim addititiam *LM*. Ob diuturnitatem vero temporis, quo velocitas progreſſus vel tarditas regreſſus continuatur, fit hæc inæqualitas longe maxima.

Corol. 9. Si corpus aliquod, vi reciproce proportionali quadrato diſtantiæ ſuæ a centro, revolveretur circa hoc centrum in ellipſi; & mox, in deſcenſu ab apſide ſumma ſeu auge ad apſidem imam, vis illa per acceſſum perpetuum vis novæ augeretur in ratione pluſquam duplicata diſtantiæ diminutæ: manifeſtum eſt quod corpus, perpetuo acceſſu vis illius novæ impulſum ſemper in centrum, magis vergeret in hoc centrum, quam ſi urgeretur vi ſola creſcente in duplicata ratione diſtantiæ diminutæ; ideoque orbem deſcriberet orbe elliptico interiorem, & in apſide ima propius accederet ad centrum quam prius. Orbis igitur, acceſſu hujus vis novæ, fiet magis excentricus. Si jam vis, in receſſu corporis ab apſide ima ad apſidem ſummam, decreſceret iiſdem gradibus quibus ante creverat, rediret corpus ad diſtantiam priorem, ideoque ſi vis decreſcat in majori ratione, corpus jam minus attractum aſcendet ad diſtantiam majorem & ſic orbis excentricitas adhuc magis augebitur. Quare ſi ratio incrementi & decrementi vis centripetæ ſingulis revolutionibus augeatur, augebitur ſemper excentricitas; & contra, dimi-

diminuetur eadem, si ratio illa decrescat. Jam vero in systemate corporum *T*, *P*, *S*, ubi apsides orbis *PAB* sunt in quadraturis, ratio illa incrementi ac decrementi minima est, & maxima fit ubi apsides sunt in syzygiis. Si apsides constituantur in quadraturis, ratio prope apsides minor est & prope syzygias major quam duplicata distantiarum, & ex ratione illa majori oritur augis motus directus, uti jam dictum est. At si consideretur ratio incrementi vel decrementi totius in progressu inter apsides, hæc minor est quam duplicata distantiarum. Vis in apside ima est ad vim in apside summa in minore quam duplicata ratione distantiæ apsidis summæ ab umbilico ellipseos ad distantiam apsidis imæ ab eodem umbilico: & contra, ubi apsides constituuntur in syzygiis, vis in apside ima est ad vim in apside summa in majore quam duplicata ratione distantiarum. Nam vires *LM* in quadraturis additæ viribus corporis *T* componunt vires in ratione minore, & vires *KL* in syzygiis subductæ a viribus corporis *T* relinquunt vires in ratione majore. Est igitur ratio decrementi & incrementi totius, in transitu inter apsides, minima in quadraturis, maxima in syzygiis: & propterea in transitu apsidum a quadraturis ad syzygias perpetuo augetur, augetque excentricitatem ellipseos; inque transitu a syzygiis ad quadraturas perpetuo diminuitur, & excentricitatem diminuit.

Corol. 10. Ut rationem ineamus errorum in latitudinem, fingamus planum orbis *EST* immobile manere; & ex errorum exposita causa manifestum est, quod ex viribus *NM*, *ML*, quæ sunt causa illa tota, vis *ML* agendo semper secundum planum orbis *PAB*, nunquam perturbat motus in latitudinem; quodque vis *NM*, ubi nodi sunt in syzygiis, agendo etiam secundum idem orbis planum, non perturbat hos motus; ubi vero sunt in quadraturis, eos maxime perturbat, corpusque *P* de plano orbis sui perpetuo trahendo, minuit inclinationem plani in transitu corporis a quadraturis ad syzygias, augetque vicissim eandem in transitu a syzygiis ad quadraturas. Unde fit ut corpore in syzygiis existente inclinatio evadat omnium minima, redeatque ad priorem magnitudinem circiter, ubi corpus ad nodum proximum accedit. At si nodi constituantur in octantibus post quadraturas, id est, inter *C* & *A*, *D* & *B*, intelligetur ex modo expositis, quod, in transitu corporis *P* a nodo alterutro ad gradum inde nonagesimum, inclinatio plani perpetuo minuitur; deinde in

tranſitu per proximos 45 gradus, uſque ad quadraturam proximam, inclinatio augetur, & poſtea denuo in tranſitu per alios 45 gradus, uſque ad nodum proximum, diminuitur. Magis itaque diminuitur inclinatio quam augetur, & propterea minor eſt ſemper in nodo ſubſequente quam in præcedente. Et ſimili ratiocinio, inclinatio magis augetur, quam diminuitur, ubi nodi ſunt in octantibus alteris inter *A* & *D*, *B* & *C*. Inclinatio igitur ubi nodi ſunt in ſyzygiis eſt omnium maxima. In tranſitu eorum a ſyzygiis ad quadraturas, in ſingulis corporis ad nodos appulſibus, diminuitur; fitque omnium minima, ubi nodi ſunt in quadraturis, & corpus in ſyzygiis: dein creſcit iiſdem gradibus, quibus antea decreverat; nodiſque ad ſyzygias proximas appulſis, ad magnitudinem primam revertitur.

Corol. 11. Quoniam corpus *P*, ubi nodi ſunt in quadraturis, perpetuo trahitur de plano orbis ſui, idque in partem verſus *S* in tranſitu ſuo a nodo *C* per conjunctionem *A* ad nodum *D*; & in contrariam partem in tranſitu a nodo *D* per oppoſitionem *B* ad nodum *C*: manifeſtum eſt, quod in motu ſuo a nodo *C* corpus perpetuo recedit ab orbis ſui plano primo *CD*, uſque dum perventum eſt ad nodum proximum; ideoque in hoc nodo, longiſſime diſtans a plano illo primo *CD*, tranſit per planum orbis *EST* non in plani illius nodo altero *D*, ſed in puncto quod inde vergit ad partes corporis *S*, quodque proinde novus eſt nodi locus in anteriora vergens. Et ſimili argumento pergent nodi recedere in tranſitu corporis de hoc nodo in nodum proximum. Nodi igitur in quadraturis conſtituti perpetuo recedunt; in ſyzygiis, ubi motus in latitudinem nil perturbatur, quieſcunt; in locis intermediis, conditionis utriuſque participes,

cipes, recedunt tardius: ideoque, ſemper vel retrogradi, vel ſtationarii ſingulis revolutionibus feruntur in antecedentia.

Corol. 12. Omnes illi in his corollariis deſcripti errores ſunt paulo majores in conjunctione corporum *P*, *S*, quam in eorum oppoſitione; idque ob majores vires generantes *NM* & *ML*.

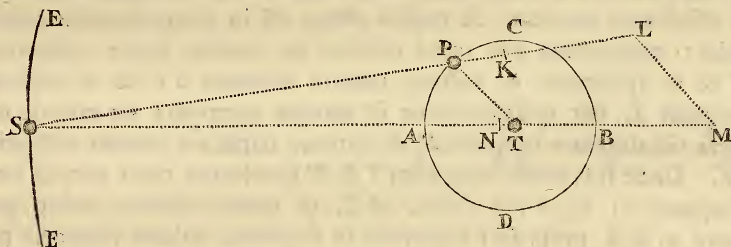
Corol. 13. Cumque rationes horum corollariorum non pendeant a magnitudine corporis *S*, obtinent præcedentia omnia, ubi corporis *S* tanta ſtatuitur magnitudo, ut circa ipſum revolvatur corporum duorum *T* & *P* ſyſtema. Et ex aucto corpore *S*, auctaque ideo ipſius vi centripeta, a qua errores corporis *P* oriuntur, evadent errores illi omnes, paribus diſtantiis, majores in hoc caſu quam in altero, ubi corpus *S* circum ſyſtema corporum *P* & *T* revolvitur.

Corol. 14. Cum autem vires *NM*, *ML*, ubi corpus *S* longinquum eſt, ſint quamproxime ut vis *SK* & ratio *PT* ad *ST* conjunctim, hoc eſt, ſi detur tum diſtantia *PT*, tum corporis *S* vis abſoluta, ut *ST cub.* reciproce; ſint autem vires illæ *NM*, *ML* cauſæ errorum & effectuum omnium, de quibus actum eſt in præcedentibus corollariis: manifeſtum eſt, quod effectus illi omnes, ſtante corporum *T* & *P* ſyſtemate, & mutatis tantum diſtantia *ST* & vi abſoluta corporis *S*, ſint quamproxime in ratione compoſita ex ratione directa vis abſolutæ corporis *S*, & ratione triplicata inverſa diſtantiæ *ST*. Unde ſi ſyſtema corporum *T* & *P* revolvatur circa corpus longinquum *S*; vires illæ *NM*, *ML*, & earum effectus erunt (per corol. 2. & 6. prop. IV.) reciproce in duplicata ratione temporis periodici. Et inde etiam, ſi magnitudo corporis *S* proportionalis ſit ipſius vi abſolutæ, erunt vires illæ *NM*, *ML*, & earum effectus directe ut cubus diametri apparentis longinqui corporis *S* e corpore *T* ſpectati, & vice verſa. Namque hæ rationes eædem ſunt, atque ratio ſuperior compoſita.

Corol. 15. Et quoniam ſi, manentibus orbium *ESE* & *PAB* forma, proportionibus & inclinatione ad invicem, mutetur eorum magnitudo, & ſi corporum *S* & *T* vel maneant, vel mutentur vires in data quavis ratione; hæ vires (hoc eſt, vis corporis *T*, qua corpus *P* de recto tramite in orbitam *PAB* deflectere, & vis corporis *S*, qua corpus idem *P* de orbita illa deviare cogitur) agunt ſemper eodem modo, & eadem proportione: neceſſe eſt ut ſimiles & proportionales ſint effectus omnes, & proportionalia effectuum tem-

pora; hoc eſt, ut errores omnes lineares ſint ut orbium diametri, angulares vero iidem, qui prius, & errorum linearium ſimilium, vel angularium æqualium tempora ut orbium tempora periodica.

Corol. 16. Unde, ſi dentur orbium formæ & inclinatio ad invicem, & mutentur utcunque corporum magnitudines, vires & diſtantiæ; ex datis erroribus & errorum temporibus in uno caſu, colligi poſſunt errores & errorum tempora in alio quovis, quam proxime: ſed brevius hac methodo. Vires *NM*, *ML*, cæteris ſtantibus, ſunt ut radius *TP*, & harum effectus periodici (per corol. 2. lem. x.) ut vires, & quadratum temporis periodici corporis *P* conjunctim. Hi ſunt errores lineares corporis *P*; & hinc errores angulares e centro *T* ſpectati (id eſt, tam motus augis & nodorum, quam omnes in longitudinem & latitudinem errores apparentes) ſunt, in qualibet revolutione corporis *P*, ut quadratum temporis revolutionis quam proxime. Conjungantur hæ rationes cum rationibus corollarii XIV.



& in quolibet corporum *T*, *P*, *S* ſyſtemate, ubi *P* circum *T* ſibi propinquum, & *T* circum *S* longinquum revolvitur, errores angulares corporis *P*, de centro *T* apparentes, erunt, in ſingulis revolutionibus corporis illius *P*, ut quadratum temporis periodici corporis *P* directe & quadratum temporis periodici corporis *T* inverſe. Et inde motus medius augis erit in data ratione ad motum medium nodorum; & motus uterque erit ut tempus periodicum corporis *P* directe & quadratum temporis periodici corporis *T* inverſe. Augendo vel minuendo excentricitatem & inclinationem orbis *PAB* non mutantur motus augis & nodorum ſenſibiliter, niſi ubi eædem ſunt nimis magnæ.

Corol.

Corol. 17. Cum autem linea *LM* nunc major ſit nunc minor quam radius *PT*, exponatur vis mediocris *LM* per radium illum *PT*; & erit hæc ad vim mediocrem *SK* vel *SN* (quam exponere licet per *ST*) ut longitudo *PT* ad longitudinem *ST*. Eſt autem vis mediocris *SN* vel *ST*, qua corpus *T* retinetur in orbe ſuo circum *S*, ad vim, qua corpus *P* retinetur in orbe ſuo circum *T*, in ratione compoſita ex ratione radii *ST* ad radium *PT*, & ratione duplicata temporis periodici corporis *P* circum *T* ad tempus periodicum corporis *T* circum *S*. Et ex æquo, vis mediocris *LN* ad vim, qua corpus *P* retinetur in orbe ſuo circum *T* (quave corpus idem *P*, eodem tempore periodico, circum punctum quodvis immobile *T* ad diſtantiam *PT* revolvi poſſet) eſt in ratione illa duplicata periodicorum temporum. Datis igitur temporibus periodicis una cum diſtantia *PT*, datur vis mediocris *LM*; & ea data, datur etiam vis *MN* quamproxime per analogiam linearum *PT*, *MN*.

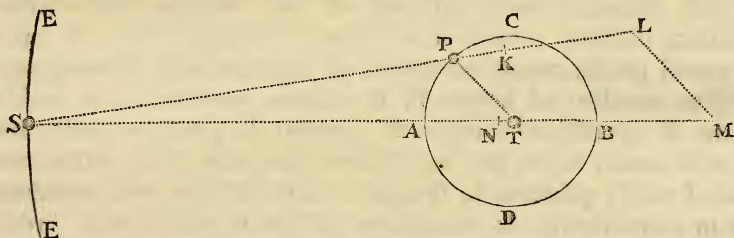
Corol. 18. Iiſdem legibus, quibus corpus *P* circum corpus *T* revolvitur, fingamus corpora plura fluida circum idem *T* ad æquales ab ipſo diſtantias moveri; deinde ex his contiguis factis conflari annulum fluidum, rotundum ac corpori *T* concentricum; & ſingulæ annuli partes, motus ſuos omnes ad legem corporis *P* peragendo, propius accedent ad corpus *T*, & celerius movebuntur in conjunctione & oppoſitione ipſarum & corporis *S*, quam in quadraturis. Et nodi annuli hujus, ſeu interſectiones ejus cum plano orbitæ corporis *S* vel *T*, quieſcent in ſyzygiis; extra ſyzygias vero movebuntur in antecedentia, & velociſſime quidem in quadraturis, tardius aliis in locis. Annuli quoque inclinatio variabitur, & axis ejus ſingulis revolutionibus oſcillabitur, completaque revolutione ad priſtinum ſitum redibit, niſi quatenus per præceſſionem nodorum circumfertur.

Corol. 19. Fingas jam globum corporis *T*, ex materia non fluida conſtantem, ampliari & extendi uſque ad hunc annulum, & alveo per circuitum excavato continere aquam, motuque eodem periodico circa axem ſuum uniformiter revolvi. Hic liquor per vices acceleratus & retardatus (ut in ſuperiore corollario) in ſyzygiis velocior erit, in quadraturis tardior quam ſuperficies globi, & ſic fluet in alveo refluetque ad modum maris. Aqua, revolvendo circa globi centrum quieſcens, ſi tollatur attractio corporis *S*, nullum acquiret

motum

motum fluxus & refluxus. Par est ratio globi uniformiter progredientis in directum, & interea revolventis circa centrum suum (per legum corol. v.) ut & globi de cursu rectilineo uniformiter tracti, (per legum corol. 6.) Accedat autem corpus *S*, & ab ipsius inæquabili attractione mox turbabitur aqua. Etenim major erit attractio aquæ propioris, minor ea remotioris. Vis autem *LM* trahet aquam deorsum in quadraturis, facietque ipsam descendere usque ad syzygias; & vis *KL* trahet eandem sursum in syzygiis, sistetque descensum ejus, & faciet ipsam ascendere usque ad quadraturas: nisi quatenus motus fluendi & refluendi ab alveo aquæ dirigatur, & per frictionem aliquatenus retardetur.

Corol. 20. Si annulus jam rigeat, & minuatur globus, cessabit motus fluendi & refluendi; sed oscillatorius ille inclinationis motus & præcessio nodorum manebunt. Habeat globus eundem axem cum annulo, gyrosque compleat iisdem temporibus, & superficie sua contingat ipsum interius, eique inhæreat; & participando motum ejus,



compages utriusque oscillabitur, & nodi regredientur. Nam globus, ut mox dicetur, ad suscipiendas impressiones omnes indifferens est. Annuli globo orbati maximus inclinationis angulus est, ubi nodi sunt in syzygiis. Inde in progressu nodorum ad quadraturas conatur is inclinationem suam minuere, & isto conatu motum imprimit globo toti. Retinet globus motum impressum, usque dum annulus conatu contrario motum hunc tollat, imprimatque motum novum in contrariam partem: Atque hac ratione maximus decrescentis inclinationis motus fit in quadraturis nodorum, & minimus inclinationis angulus in octantibus post quadraturas; dein maximus reclinationis motus in syzygiis, & maximus angulus in octantibus proximis. Et

eadem

eadem est ratio globi annulo nudati, qui in regionibus æquatoris vel altior est paulo quam juxta polos, vel constat ex materia paulo densiore. Supplet enim vicem annuli iste materiæ in æquatoris regionibus excessus. Et quanquam, aucta utcunque globi hujus vi centripeta, tendere supponantur omnes ejus partes deorsum, ad modum gravitantium partium telluris, tamen phænomena hujus & præcedentis corollarii vix inde mutabuntur; nisi quod loca maximarum & minimarum altitudinum aquæ diversa erunt. Aqua enim jam in orbe suo sustinetur & permanet, non per vim suam centrifugam, sed per alveum in quo fluit. Et præterea vis LM trahit aquam deorsum maxime in quadraturis, & vis KL seu $NM-LM$ trahit eandem sursum maxime in syzygiis. Et hæ vires conjunctæ desinunt trahere aquam deorsum & incipiunt trahere aquam sursum in octantibus ante syzygias, ac desinunt trahere aquam sursum incipiuntque trahere aquam deorsum in octantibus post syzygias. Et inde maxima aquæ altitudo evenire potest in octantibus post syzygias, & minima in octantibus post quadraturas circiter; nisi quatenus motus ascendendi vel descendendi ab his viribus impressus vel per vim insitam aquæ paulo diutius perseveret, vel per impedimenta alvei paulo citius sistatur.

Corol. 21. Eadem ratione, qua materia globi juxta æquatorem redundans efficit ut nodi regrediantur, atque ideo per hujus incrementum augetur iste regressus, per diminutionem vero diminuitur, & per ablationem tollitur; si materia plusquam redundans tollatur, hoc est, si globus juxta æquatorem vel depressior reddatur, vel rarior quam juxta polos, orietur motus nodorum in consequentia.

Corol. 22. Et inde vicissim, ex motu nodorum innotescit constitutio globi. Nimirum si globus polos eosdem constanter servat, & motus fit in antecedentia, materia juxta æquatorem redundat; si in consequentia, deficit. Pone globum uniformem & perfecte circinatum in spatiis liberis primo quiescere; dein impetu quocunque oblique in superficiem suam facto propelli, & motum inde concipere partim circularem, partim in directum. Quoniam globus iste ad axes omnes per centrum suum transeuntes indifferenter se habet, neque propensior est in unum axem, unumve axis situm, quam in alium quemvis; perspicuum est, quod is axem suum, axisque inclinationem vi propria nunquam mutabit. Impellatur jam globus obli-

que,

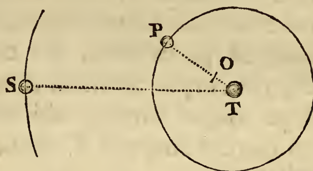
De Motu Corporum

que, in eadem illa superficiei parte, qua prius, impulsu quocunque novo; & cum citior vel serior impulsus effectum nil mutet, manifestum est, quod hi duo impulsus successive impressi eundem producent motum, ac si simul impressi fuissent, hoc est, eundem, ac si globus vi simplici ex utroque (per legum corol. 2.) composita impulsus fuisset, atque ideo simplicem, circa axem inclinatione datum. Et par est ratio impulsus secundi facti in locum alium quemvis in æquatore motus primi; ut & impulsus primi facti in locum quemvis in æquatore motus, quem impulsus secundus sine primo generaret; atque ideo impulsuum amborum factorum in loca quæcunque: generabunt hi eundem motum circularem ac si simul & semel in locum intersectionis æquatorum motuum illorum, quos seorsim generarent, fuissent impressi. Globus igitur homogeneus & perfectus non retinet motus plures distinctos, sed impressos omnes componit & ad unum reducit, & quatenus in se est, gyratur semper motu simplici & uniformi circa axem unicum, inclinatione semper invariabili datum. Sed nec vis centripeta inclinationem axis, aut rotationis velocitatem mutare potest. Si globus plano quocunque, per centrum suum & centrum in quod vis dirigitur transeunte, dividi intelligatur in duo hemisphæria; urgebit semper vis illa utrumque hemisphærium æqualiter, & propterea globum, quoad motum rotationis, nullam in partem inclinabit. Addatur vero alicubi inter polum & æquatorem materia nova in formam montis cumulata, & hæc, perpetuo conatu recedendi a centro sui motus, turbabit motum globi, facietque ut poli ejus errent per ipsius superficiem, & circulos circum se punctumque sibi oppositum perpetuo describant. Neque corrigetur ista vagationis enormitas, nisi locando montem illum vel in polo alterutro, quo in casu (per corol. XXI.) nodi æquatoris progredientur; vel in æquatore, qua ratione (per corol. XX.) nodi regredientur; vel denique ex altera axis parte addendo materiam novam, qua mons inter movendum libretur, & hoc pacto nodi vel progredientur, vel recedent, perinde ut mons & hæcce nova materia sunt vel polo vel æquatori propiores.

PROPO-

PROPOSITIO LXVII. THEOREMA XXVII.

Positis iisdem attractionum legibus, dico quod corpus exterius S, *circa interiorum* P, T *commune gravitatis centrum* O, *radiis ad centrum illud ductis, describit areas temporibus magis proportionales & orbem ad formam ellipseos umbilicum in centro eodem habentis magis accedentem, quam circa corpus intimum & maximum* T, *radiis ad ipsum ductis, describere potest.*



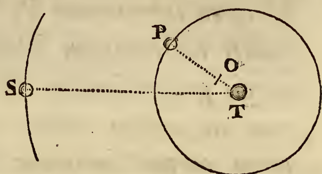
Nam corporis *S* attractiones versus *T* & *P* componunt ipsius attractionem absolutam, quæ magis dirigitur in corporum *T* & *P* commune gravitatis centrum *O*, quam in corpus maximum *T*, quæque quadrato distantiæ *SO* magis est proportionalis reciproce, quam quadrato distantiæ *ST*: ut rem perpendenti facile constabit.

PROPOSITIO LXVIII. THEOREMA XXVIII.

Positis iisdem attractionum legibus, dico quod corpus exterius S, *circa interiorum* P & T *commune gravitatis centrum* O, *radiis ad centrum illud ductis, describit areas temporibus magis proportionales, & orbem ad formam ellipseos umbilicum in centro eodem habentis magis accedentem, si corpus intimum & maximum his attractionibus perinde atque cætera agitetur, quam si id vel non attractum quiescat, vel multo magis aut multo minus attractum aut multo magis aut multo minus agitetur.*

Demonstratur eodem fere modo cum prop. LXVI. sed argumento prolixiore, quod ideo prætereo. Sufficeret rem sic æstimare. Ex demonstratione propositionis novissimæ liquet centrum, in quod

corpus *S* conjunctis viribus urgetur, proximum esse communi centro gravitatis duorum illorum. Si coincideret hoc centrum cum centro illo communi, & quiesceret commune centrum gravitatis corporum trium; describerent corpus *S* ex una parte, & commune centrum aliorum duorum ex altera parte, circa commune omnium centrum quiescens, ellipses accuratas. Liquet hoc per corollarium secundum propositionis LVIII. collatum cum demonstratis in prop. LXIV. & LXV. Perturbatur iste motus ellipticus aliquantulum per distantiam centri duorum a centro, in quod tertium *S* attrahitur. Detur præterea motus communi trium centro, & augebitur perturbatio. Proinde minima est perturbatio, ubi commune trium centrum quiescit; hoc est, ubi corpus intimum & maximum *T* lege cæterorum attrahitur: fitque major semper, ubi trium commune illud centrum, minuendo motum corporis *T*, moveri incipit, & magis deinceps magisque agitatur.



Corol. Et hinc, si corpora plura minora revolvantur circa maximum, colligere licet quod orbitæ descriptæ propius accedent ad ellipticas, & arearum descriptiones fient magis æquabiles, si corpora omnia viribus acceleratricibus, quæ sunt ut eorum vires absolutæ directe & quadrata distantiarum inverse, se mutuo trahant agitentque, & orbitæ cujusque umbilicus collocetur in communi centro gravitatis corporum omnium interiorum (nimirum umbilicus orbitæ primæ & intimæ in centro gravitatis corporis maximi & intimi; ille orbitæ secundæ, in communi centro gravitatis corporum duorum intimorum; iste tertiæ, in communi centro gravitatis trium interiorum; & sic deinceps) quam si corpus intimum quiescat & statuatur communis umbilicus orbitarum omnium.

PROPOSITIO LXIX. THEOREMA XXIX.

In systemate corporum plurium A, B, C, D, *&c. si corpus aliquod* A *trahit cætera omnia* B, C, D, *&c. viribus acceleratricibus quæ sunt reciproce ut quadrata distantiarum a tra-*

a trahente; & corpus aliud B *trahit etiam cætera* A, C, D, *&c. viribus quæ sunt reciproce ut quadrata distantiarum a trahente: erunt absolutæ corporum trahentium* A, B *vires ad invicem, ut sunt ipsa corpora* A, B, *quorum sunt vires.*

Nam attractiones acceleratrices corporum omnium *B*, *C*, *D* versus *A*, paribus distantiis, sibi invicem æquantur ex hypothesi; & similiter attractiones acceleratrices corporum omnium versus *B*, paribus distantiis, sibi invicem æquantur. Est autem absoluta vis attractiva corporis *A* ad vim absolutam attractivam corporis *B*, ut attractio acceleratrix corporum omnium versus *A* ad attractionem acceleratricem corporum omnium versus *B*, paribus distantiis; & ita est attractio acceleratrix corporis *B* versus *A*, ad attractionem acceleratricem corporis *A* versus *B*. Sed attractio acceleratrix corporis *B* versus *A* est ad attractionem acceleratricem corporis *A* versus *B*, ut massa corporis *A* ad massam corporis *B*; propterea quod vires motrices, quæ (per definitionem secundam, septimam & octavam) sunt ut vires acceleratrices & corpora attracta conjunctim, hic sunt (per motus legem tertiam) sibi invicem æquales. Ergo absoluta vis attractiva corporis *A* est ad absolutam vim attractivam corporis *B*, ut massa corporis *A* ad massam corporis *B*. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc si singula systematis corpora *A*, *B*, *C*, *D*, &c. seorsim spectata trahant cætera omnia viribus acceleratricibus, quæ sunt reciproce ut quadrata distantiarum a trahente; erunt corporum illorum omnium vires absolutæ ad invicem ut sunt ipsa corpora.

Corol. 2. Eodem argumento, si singula systematis corpora *A*, *B*, *C*, *D*, &c. seorsim spectata trahant cætera omnia viribus acceleratricibus, quæ sunt vel reciproce, vel directe in ratione dignitatis cujuscunque distantiarum a trahente, quæve secundum legem quamcunque communem ex distantiis ab unoquoque trahente definiuntur; constat quod corporum illorum vires absolutæ sunt ut corpora.

Corol. 3. In systemate corporum, quorum vires decrescunt in ratione duplicata distantiarum, si minora circa maximum in ellipsibus, umbilicum communem in maximi illius centro habentibus, quam fieri potest accuratissimis revolvantur; & radiis ad maximum illud

ductis describant areas temporibus quam maxime proportionales: erunt corporum illorum vires absolutæ ad invicem, aut accurate aut quamproxime, in ratione corporum; & contra. Patet per corol. prop. LXVIII. collatum cum hujus corol. 1.

Scholium.

His propositionibus manuducimur ad analogiam inter vires centripetas, & corpora centralia, ad quæ vires illæ dirigi solent. Rationi enim consentaneum est, ut vires, quæ ad corpora diriguntur, pendeant ab eorundem natura & quantitate, ut fit in magneticis. Et quoties hujusmodi casus incidunt, æstimandæ erunt corporum attractiones, assignando singulis eorum particulis vires proprias, & colligendo summas virium. Vocem attractionis hic generaliter usurpo pro corporum conatu quocunque accedendi ad invicem: sive conatus iste fiat ab actione corporum, vel se mutuo petentium, vel per spiritus emissos se invicem agitantium; sive is ab actione ætheris, aut aëris, mediive cujuscunque seu corporei seu incorporei oriatur corpora innatantia in se invicem utcunque impellentis. Eodem sensu generali usurpo vocem impulsus, non species virium & qualitates physicas, sed quantitates & proportiones mathematicas in hoc tractatu expendens, ut in definitionibus explicui. In mathesi investigandæ sunt virium quantitates & rationes illæ, quæ ex conditionibus quibuscunque positis consequentur: deinde, ubi in physicam descenditur, conferendæ sunt hæ rationes cum phænomenis; ut innotescat quænam virium conditiones singulis corporum attractivorum generibus competant. Et tum demum de virium speciebus, causis & rationibus physicis tutius disputare licebit. Videamus igitur quibus viribus corpora sphærica, ex particulis modo jam exposito attractivis constantia, debeant in se mutuo agere; & quales motus inde consequantur.

SECTIO

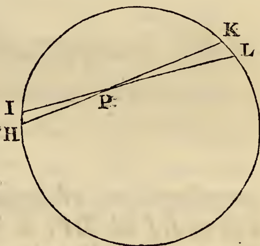
SECTIO XII.

De corporum sphæricorum viribus attractivis.

PROPOSITIO LXX. THEOREMA XXX.

Si ad sphæricæ superficiei puncta singula tendant vires æquales centripetæ decrescentes in duplicata ratione distantiarum a punctis: dico quod corpusculum intra superficiem constitutum his viribus nullam in partem attrahitur.

Sit *HIKL* superficies illa sphærica, & *P* corpusculum intus constitutum. Per *P* agantur ad hanc superficiem lineæ duæ *HK*, *IL*, arcus quam minimos *HI*, *KL* intercipientes; &, ob triangula *HPI*, *LPK* (per corol. 3. lem. VII.) similia, arcus illi erunt distantiis *HP*, *LP* proportionales; & superficiei sphæricæ particulæ quævis ad *HI* & *KL*, rectis per punctum *P* transeuntibus undique terminatæ, erunt in duplicata illa ratione. Ergo vires harum particularum in corpus *P* exercitæ sunt inter se æquales. Sunt enim ut particulæ directe, & quadrata distantiarum inverse. Et hæ duæ rationes componunt rationem æqualitatis. Attractiones igitur, in contrarias partes æqualiter factæ, se mutuo destruunt. Et simili argumento, attractiones omnes per totam sphæricam superficiem a contrariis attractionibus destruuntur. Proinde corpus *P* nullam in partem his attractionibus impellitur. *Q. E. D.*



PROPOSITIO LXXI. THEOREMA XXXI.

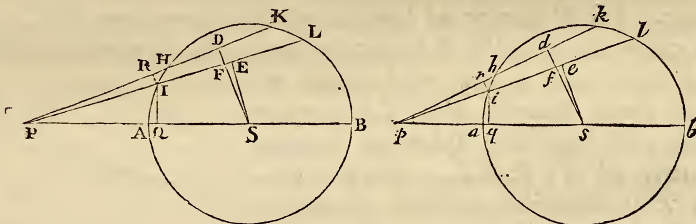
Iisdem positis, dico quod corpusculum extra sphæricam superficiem constitutum attrahitur ad centrum sphæræ, vi reci-

proce

DE MOTU CORPORUM

proce proportionali quadrato distantiæ suæ ab eodem centro.

Sint *AHKB*, *a h k b* æquales duæ superficies sphæricæ, centris *S*, *s*, diametris *AB*, *a b* descriptæ, & *P*, *p* corpuscula sita extrinsecus in diametris illis productis. Agantur a corpusculis lineæ *PHK*, *P I L*, *p h k*, *p i l*, auferentes a circulis maximis *AHB*, *ahb*, æquales arcus *HK*, *h k* & *I L*, *i l*: Et ad eas demittantur perpendicula *SD*, *s d*; *S E*, *se*; *IR*, *ir*; quorum *SD*, *sd* secent *PL*, *pl* in *F* & *f*: Demittantur etiam ad diametros perpendicula *IQ*, *iq*. Evanescant anguli *DPE*, *dpe*: & ob æquales *DS* & *ds*, *ES* & *es*, lineæ *PE*, *PF* & *p e*, *pf* & lineola *DF*, *df* pro æqualibus habeantur; quippe quarum ratio ultima, angulis illis *DPE*, *dp e* simul



evanescentibus, est æqualitatis. His itaque constitutis, erit *PI* ad *PF* ut *RI* ad *DF*, & *pf* ad *p i* ut *df* vel *DF* ad *r i*; & ex æquo *PI*×*pf* ad *PF*×*pi* ut *RI* ad *ri*, hoc est (per corol. 3. lem. VII.) ut arcus *I H* ad arcum *i h*. Rursus *PI* ad *PS* ut *IQ* ad *SE*, & *p s* ad *p i* ut *se* vel *SE* ad *iq*; & ex æquo *PI*×*ps* ad *PS*×*pi* ut *IQ* ad *iq*. Et conjunctis rationibus *PI quad.*×*pf*×*ps* ad *p i quad.* ×*PF*×*PS*, ut *IH*×*IQ* ad *ih*×*iq*; hoc est, ut superficies circularis, quam arcus *IH* convolutione semicirculi *AKB* circa diametrum *AB* describet, ad superficiem circularem, quam arcus *ih* convolutione semicirculi *akb* circa diametrum *ab* describet. Et vires, quibus hæ superficies secundum lineas ad se tendentes attrahunt corpuscula *P* & *p*, sunt (per hypothesin) ut ipsæ superficies directe, & quadrata distantiarum superficierum a corporibus inverse, hoc est, ut *pf*×*ps* ad *PF*×*PS*. Suntque hæ vires ad ipsarum partes obliquas,

quas, quæ (facta per legum corol 2. resolutione virium) secundum lineas *PS*, *ps* ad centra tendunt, ut *PI* ad *PQ*, & *pi* ad *pq*; id est (ob similia triangula *PIQ* & *PSF*, *piq* & *psf*) ut *PS* ad *PF* & *ps* ad *pf*. Unde, ex æquo, fit attractio corpusculi hujus *P* versus *S* ad attractionem corpusculi *p* versus *s*, ut $\frac{PF \times pf \times ps}{PS}$ ad $\frac{pf \times PF \times PS}{ps}$, hoc est, ut *ps quad.* ad *PS quad.* Et simili argumento vires, quibus superficies convolutione arcuum *KL*, *kl* descriptæ trahunt corpuscula, erunt ut *ps quad.* ad *PS quad.* inque eadem ratione erunt vires superficierum omnium circularium in quas utraque superficies sphærica, capiendo semper *sd* æqualem *SD* & *se* æqualem *SE*, distingui potest. Et, per compositionem, vires totarum superficierum sphæricarum in corpuscula exercitæ erunt in eadem ratione. *Q. E. D.*

PROPOSITIO LXXII. THEOREMA XXXII.

Si ad sphæræ cujusvis puncta singula tendant vires æquales centripetæ decrescentes in duplicata ratione distantiarum a punctis; ac detur tum sphæræ densitas, tum ratio diametri sphæræ ad distantiam corpusculi a centro ejus: dico quod vis, qua corpusculum attrahitur, proportionalis erit semidiametro sphæræ.

Nam concipe corpuscula duo seorsim a sphæris duabus attrahi, unum ab una & alterum ab altera, & distantias eorum a sphærarum centris proportionales esse diametris sphærarum respective, sphæras autem resolvi in particulas similes & similiter positas ad corpuscula. Et attractiones corpusculi unius, factæ versus singulas particulas sphæræ unius, erunt ad attractiones alterius versus analogas totidem particulas sphæræ alterius, in ratione composita ex ratione particularum directe & ratione duplicata distantiarum inverse. Sed particulæ sunt ut sphæræ, hoc est, in ratione triplicata diametrorum, & distantiæ sunt ut diametri; & ratio prior directe una cum ratione posteriore bis inverse est ratio diametri ad diametrum. *Q. E. D.*

Corol.

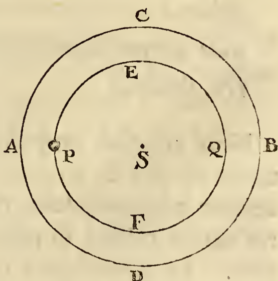
Corol. 1. Hinc si corpuscula in circulis, circa sphæras ex materia æqualiter attractiva constantes, revolvantur; sintque distantiæ a centris sphærarum proportionales earundem diametris: Tempora periodica erunt æqualia.

Corol. 2. Et vice versa, si tempora periodica sunt æqualia; distantiæ erunt proportionales diametris. Constant hæc duo per corol. 3. prop. IV.

Corol. 3. Si ad solidorum duorum quorumvis, similium & æqualiter densorum, puncta singula tendant vires æquales centripetæ, decrescentes in duplicata ratione distantiarum a punctis; vires, quibus corpuscula, ad solida illa duo similiter sita, attrahentur ab iisdem, erunt ad invicem ut diametri solidorum.

PROPOSITIO LXXIII. THEOREMA XXXIII.

Si ad sphæræ alicujus datæ puncta singula tendant æquales vires centripetæ decrescentes in duplicata ratione distantiarum a punctis: dico quod corpusculum intra sphæram constitutum attrahitur vi proportionali distantiæ suæ ab ipsius centro.



In sphæra *ABCD*, centro *S* descripta, locetur corpusculum *P*; & centro eodem *S*, intervallo *SP*, concipe sphæram interiorem *PEQF* describi. Manifestum est, (per prop. LXX.) quod sphæricæ superficies concentricæ, ex quibus sphærarum differentia *AEBF* componitur, attractionibus suis per attractiones contrarias destructis, nil agunt in corpus *P*. Restat sola attractio sphæræ interioris *PEQF*. Et (per prop. LXXII.) hæc est ut distantia *PS*. *Q. E. D.*

Scholium.

Superficies, ex quibus solida componuntur, hic non sunt pure mathematicæ, sed orbes adeo tenues, ut eorum crassitudo instar nihili

nihili ſit; nimirum orbes evaneſcentes, ex quibus ſphæra ultimo conſtat, ubi orbium illorum numerus augetur & craſſitudo minuitur in infinitum. Similiter per puncta, ex quibus lineæ, ſuperficies, & ſolida componi dicuntur, intelligendæ ſunt particulæ æquales magnitudinis contemnendæ. LIBER PRIMUS.

PROPOSITIO LXXIV. THEOREMA XXXIV.

Iiſdem poſitis, dico quod corpuſculum extra ſphæram conſtitutum attrahitur vi reciproce proportionali quadrato diſtantiæ ſuæ ab ipſius centro.

Nam diſtinguatur ſphæra in ſuperficies ſphæricas innumeras concentricas, & attractiones corpuſculi a ſingulis ſuperficiebus oriundæ erunt reciproce proportionales quadrato diſtantiæ corpuſculi a centro (per prop. LXXI.) Et componendo fiet ſumma attractionum, hoc eſt attractio corpuſculi in ſphæram totam, in eadem ratione. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc in æqualibus diſtantiis a centris homogenearum ſphærarum attractiones ſunt ut ſphæræ. Nam (per prop. LXXII.) ſi diſtantiæ ſunt proportionales diametris ſphærarum, vires erunt ut diametri. Minuatur diſtantia major in illa ratione; &, diſtantiis jam factis æqualibus, augebitur attractio in duplicata illa ratione; ideoque erit ad attractionem alteram in triplicata illa ratione, hoc eſt, in ratione ſphærarum.

Corol. 2. In diſtantiis quibuſvis attractiones ſunt ut ſphæræ applicatæ ad quadrata diſtantiarum.

Corol. 3. Si corpuſculum, extra ſphæram homogeneam poſitum, trahitur vi reciproce proportionali quadrato diſtantiæ ſuæ ab ipſius centro, conſtet autem ſphæra ex particulis attractivis; decreſcet vis particulæ cujuſque in duplicata ratione diſtantiæ a particula.

PROPOSITIO LXXV. THEOREMA XXXV.

Si ad ſphæræ datæ puncta ſingula tendant vires æquales centripetæ, decreſcentes in duplicata ratione diſtantiarum a

punctis; dico quod sphæra quævis alia similaris ab eadem attrahitur vi reciproce proportionali quadrato distantiæ centrorum.

Nam particulæ cujusvis attractio est reciproce ut quadratum distantiæ suæ a centro sphæræ trahentis, (per prop. LXXIV.) & propterea eadem est, ac si vis tota attrahens manaret de corpusculo unico sito in centro hujus sphæræ. Hæc autem attractio tanta est, quanta foret vicissim attractio corpusculi ejusdem, si modo illud a singulis sphæræ attractæ particulis eadem vi traheretur, qua ipsas attrahit. Foret autem illa corpusculi attractio (per prop. LXXIV.) reciproce proportionalis quadrato distantiæ suæ a centro sphæræ; ideoque huic æqualis attractio sphæræ est in eadem ratione. *Q.E.D.*

Corol. 1. Attractiones sphærarum, versus alias sphæras homogeneas, sunt ut sphæræ trahentes applicatæ ad quadrata distantiarum centrorum suorum a centris earum, quas attrahunt.

Corol. 2. Idem valet, ubi sphæra attracta etiam attrahit. Namque hujus puncta singula trahent singula alterius eadem vi, qua ab ipsis vicissim trahuntur; ideoque cum in omni attractione urgeatur (per legem 3.) tam punctum attrahens, quam punctum attractum, geminabitur vis attractionis mutuæ, conservatis proportionibus.

Corol. 3. Eadem omnia, quæ superius de motu corporum circa umbilicum conicarum sectionum demonstrata sunt, obtinent, ubi sphæra attrahens locatur in umbilico, & corpora moventur extra sphæram.

Corol. 4. Ea vero, quæ de motu corporum circa centrum conicarum sectionum demonstrantur, obtinent ubi motus peraguntur intra sphæram.

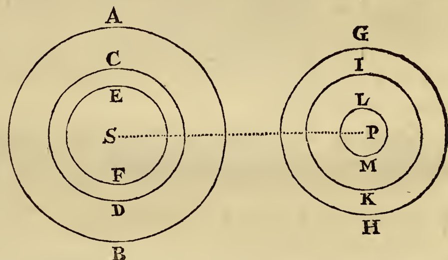
PROPOSITIO LXXVI. THEOREMA XXXVI.

Si sphæræ in progressu a centro ad circumferentiam (quoad materiæ densitatem & vim attractivam) utcunque dissimilares, in progressu vero per circuitum ad datam omnem a centro distantiam sunt undique similares; & vis attractiva puncti cujusque decrescit in duplicata ratione distantiæ corporis

poris

poris attracti: dico quod vis tota, qua hujusmodi sphæra una attrahit aliam, sit reciproce proportionalis quadrato distantiæ centrorum.

Sunto sphæræ quotcunque concentricæ similares *AB*, *CD*, *EF*, &c. quarum interiores additæ exterioribus componant materiam densiorem versus centrum, vel subductæ relinquant tenuiorem; & hæ (per prop. LXXV.) trahent sphæras alias quotcunque concentricas similares *GH*, *IK*, *LM*, &c. singulæ singulas, viribus reciproce proportionalibus quadrato distantiæ *SP*. Et componendo vel dividendo, summa virium illarum omnium, vel excessus aliquarum supra alias; hoc est, vis, qua sphæra tota, ex concentricis quibuscunque vel concentricarum differentiis composita *AB*, trahit totam ex concentricis quibuscunque vel concentricarum differentiis compositam *GH*; erit in eadem ratione. Augeatur numerus sphærarum concentricarum in infinitum sic, ut materiæ densitas una cum vi attractiva, in progressu a circumferentia ad centrum, secundum legem quamcunque crescat vel decrescat; &, addita materia non attractiva, compleatur ubivis densitas deficiens, eo ut sphæræ acquirant formam quamvis optatam; & vis, qua harum una attrahet alteram, erit etiamnum, per argumentum superius, in eadem illa distantiæ quadratæ ratione inversa. *Q. E. D.*



Corol. 1. Hinc si ejusmodi sphæræ complures, sibi invicem per omnia similes, se mutuo trahant; attractiones acceleratrices singularum in singulas erunt, in æqualibus quibusvis centrorum distantiis, ut sphæræ attrahentes.

Corol. 2. Inque distantiis quibusvis inæqualibus, ut sphæræ attrahentes applicatæ ad quadrata distantiarum inter centra.

Corol. 3. Attractiones vero motrices, seu pondera sphærarum in sphæras erunt, in æqualibus centrorum distantiis, ut sphæræ attra-

 hentes

hentes & attractæ conjunctim, id eſt, ut contenta ſub ſphæris per multiplicationem producta.

Corol. 4. Inque diſtantiis inæqualibus, ut contenta illa directe & quadrata diſtantiarum inter centra inverſe.

Corol. 5. Eadem valent, ubi attractio oritur a ſphæræ utriuſque virtute attractiva mutuo exercita in ſphæram alteram. Nam viribus ambabus geminatur attractio, proportione ſervata.

Corol. 6. Si hujuſmodi ſphæræ aliquæ circa alias quieſcentes revolvantur, ſingulæ circa ſingulas; ſintque diſtantiæ inter centra revolventium & quieſcentium proportionales quieſcentium diametris; æqualia erunt tempora periodica.

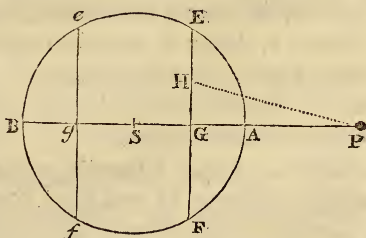
Corol. 7. Et viciſſim, ſi tempora periodica ſunt æqualia; diſtantiæ erunt proportionales diametris.

Corol. 8. Eadem omnia, quæ ſuperius de motu corporum circa umbilicos conicarum ſectionum demonſtrata ſunt, obtinent; ubi ſphæra attrahens, formæ & conditionis cujuſvis jam deſcriptæ, locatur in umbilico.

Corol. 9. Ut & ubi gyrantia ſunt etiam ſphæræ attrahentes, conditionis cujuſvis jam deſcriptæ.

PROPOSITIO LXXVII. THEOREMA XXXVII.

Si ad ſingula ſphærarum puncta tendant vires centripetæ proportionales diſtantiis punctorum a corporibus attractis: dico quod vis compoſita, qua ſphæræ duæ ſe mutuo trahent, eſt ut diſtantia inter centra ſphærarum.



Caſ. 1. Sit *AEBF* ſphæra; *S* centrum ejus; *P* corpuſculum attractum, *PASB* axis ſphæræ per centrum corpuſculi tranſiens; *EF*, *ef* plana duo, quibus ſphæra ſecatur, huic axi perpendicularia, & hinc inde æqualiter diſtantia a centro ſphæræ; *G*, *g* interſectiones planorum & axis; & *H* punctum quodvis in plano *EF*. Puncti *H* vis centripeta in corpuſculum *P*, ſecundum lineam *PH* exercita, eſt

eſt ut diſtantia *PH*; & (per legum corol. 2.) ſecundum lineam *PG*, ſeu verſus centrum *S*, ut longitudo *PG*. Igitur punctorum omnium in plano *EF*, hoc eſt plani totius vis, qua corpuſculum *P* trahitur verſus centrum *S*, eſt ut diſtantia *PG* multiplicata per numerum punctorum, id eſt, ut ſolidum quod continetur ſub plano ipſo *EF* & diſtantia illa *PG*. Et ſimiliter vis plani *ef*, qua corpuſculum *P* trahitur verſus centrum *S*, eſt ut planum illud ductum in diſtantiam ſuam *Pg*, ſive ut huic æquale planum *EF* ductum in diſtantiam illam *Pg*; & ſumma virium plani utriuſque ut planum *EF* ductum in ſummam diſtantiarum *PG*+*Pg*, id eſt, ut planum illud ductum in duplam centri & corpuſculi diſtantiam *PS*, hoc eſt, ut duplum planum *EF* ductum in diſtantiam *PS*, vel ut ſumma æqualium planorum *EF*+*ef* ducta in diſtantiam eandem. Et ſimili argumento, vires omnium planorum in ſphæra tota, hinc inde æqualiter a centro ſphæræ diſtantium, ſunt ut ſumma planorum ducta in diſtantiam *PS*, hoc eſt, ut ſphæra tota & ut diſtantia *PS* conjunctim. *Q. E. D.*

Caſ. 2. Trahat jam corpuſculum *P* ſphæram *AEBF*. Et eodem argumento probabitur quod vis, qua ſphæra illa trahitur, erit ut diſtantia *PS*. *Q. E. D.*

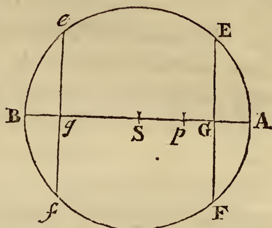
Caſ. 3. Componatur jam ſphæra altera ex corpuſculis innumeris *P*; & quoniam vis, qua corpuſculum unumquodque trahitur, eſt ut diſtantia corpuſculi a centro ſphæræ primæ & ut ſphæra eadem conjunctim, atque ideo eadem eſt, ac ſi prodiret tota de corpuſculo unico in centro ſphæræ; vis tota, qua corpuſcula omnia in ſphæra ſecunda trahuntur, hoc eſt, qua ſphæra illa tota trahitur, eadem erit, ac ſi ſphæra illa traheretur vi prodeunte de corpuſculo unico in centro ſphæræ primæ, & propterea proportionalis eſt diſtantiæ inter centra ſphærarum. *Q. E. D.*

Caſ. 4. Trahant ſphæræ ſe mutuo, & vis geminata proportionem priorem ſervabit. *Q. E. D.*

Caſ. 5. Locetur jam corpuſculum *p* intra ſphæram *AEBF*; & quoniam vis plani *ef* in corpuſculum eſt ut ſolidum contentum ſub plano illo & diſtantia *pg*; & vis contraria plani *EF* ut ſolidum contentum ſub plano illo & diſtantia *pG*; erit vis ex utraque compoſita ut differentia ſolidorum, hoc eſt, ut ſumma æqualium planorum ducta in ſemiſſem differentiæ diſtantiarum, id eſt,

ut

ut ſumma illa ducta in $p\,S$ diſtantiam corpuſculi a centro ſphæræ. Et ſimili argumento, attractio planorum omnium $E\,F$, $e\,f$ in ſphæra tota, hoc eſt, attractio ſphæræ totius, eſt conjunctim ut ſumma planorum omnium, ſeu ſphæra tota, & ut $p\,S$ diſtantia corpuſculi a centro ſphæræ. *Q. E. D.*



Caſ. 6. Et ſi ex corpuſculis innumeris p componatur ſphæra nova, intra ſphæram priorem $A\,E\,B\,F$ ſita; probabitur ut prius quod attractio, ſive ſimplex ſphæræ unius in alteram, ſive mutua utriuſque in ſe invicem, erit ut diſtantia centrorum $p\,S$. *Q. E. D.*

PROPOSITIO LXXVIII. THEOREMA XXXVIII.

Si ſphæræ in progreſſu a centro ad circumferentiam ſint utcunque diſſimilares & inæquabiles in progreſſu vero per circuitum ad datam omnem a centro diſtantiam ſint undique ſimilares; & vis attractiva puncti cujuſque ſit ut diſtantia corporis attracti: dico quod vis tota qua hujuſmodi ſphæræ duæ ſe mutuo trahunt ſit proportionalis diſtantiæ inter centra ſphærarum.

Demonſtratur ex propoſitione præcedente eodem modo, quo propoſitio LXXVI. ex propoſitione LXXV. demonſtrata fuit.

Corol. Quæ ſuperius in propoſitionibus X. & LXIV. de motu corporum circa centra conicarum ſectionum demonſtrata ſunt, valent ubi attractiones omnes fiunt vi corporum ſphæricorum conditionis jam deſcriptæ, & attracta corpora ſunt ſphæræ conditionis ejuſdem.

Scholium.

Attractionum caſus duos inſigniores jam dedi expoſitos; nimirum ubi vires centripetæ decreſcunt in duplicata diſtantiarum ratione, vel creſcunt in diſtantiarum ratione ſimplici; efficientes in utroque caſu ut corpora gyrentur in conicis ſectionibus, & componentes corporum ſphæricorum vires centripetas eadem lege, in receſſu

recessu a centro, decrescentes vel crescentes cum seipsis: Quod est notatu dignum. Casus cæteros, qui conclusiones minus elegantes exhibent, sigillatim percurrere longum esset. Malim cunctos methodo generali simul comprehendere ac determinare, ut sequitur.

LEMMA XXIX.

Si describantur centro S *circulus quilibet* AEB, & *centro* P *circuli duo* EF, ef, *secantes priorem in* E, e, *lineamque* PS *in* F, f; & *ad* PS *demittantur perpendicula* ED, ed: *dico quod, si distantia arcuum* EF, ef *in infinitum minui intelligatur, ratio ultima lineæ evanescentis* Dd *ad lineam evanescentem* Ff *ea sit, quæ lineæ* PE *ad lineam* PS.

Nam si linea *Pe* secet arcum *EF* in *q*; & recta *Ee*, quæ cum arcu evanescente *Ee* coincidit, producta occurrat rectæ *PS* in *T*; & ab *S* demittatur in *PE* normalis *SG*: ob similia triangula *DTE*, *dTe*, *DES*; erit *Dd* ad *Ee*, ut *DT* ad *TE*, seu *DE* ad *ES*;

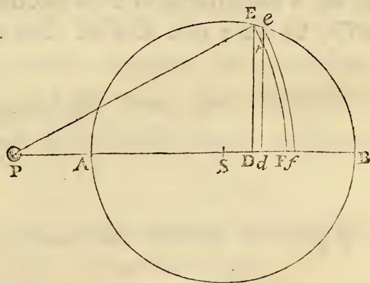
& ob triangula *Eeq*, *ESG* (per lem. VIII. & corol. 3. lem. VII.) similia, erit *Ee* ad *eq* seu *Ff* ut *ES* ad *SG*; & ex æquo, *Dd* ad *Ff* ut *DE* ad *SG*; hoc est (ob similia triangula *PDE*, *PGS*) ut *PE* ad *PS*. *Q. E. D.*

PROPO-

PROPOSITIO LXXIX. THEOREMA XXXIX.

Si superficies ob latitudinem infinite diminutam jamjam evanescens E F f e, *convolutione sui circa axem* P S, *describat solidum sphæricum concavo-convexum, ad cujus particulas singulas æquales tendant æquales vires centripetæ: dico quod vis, qua solidum illud trahit corpusculum situm in* P, *est in ratione composita ex ratione solidi* $DEq \times Ff$, *& ratione vis qua particula data in loco* F f *traheret idem corpusculum.*

Nam si primo consideremus vim superficiei sphæricæ *FE*, quæ convolutione arcus *FE* generatur, & a linea *de* ubivis secatur in *r*; erit superficiei pars annularis, convolutione arcus *rE* genita, ut lineola *Dd*, manente sphæræ radio *PE* (uti demonstravit *Archimedes* in lib. de *Sphæra* & *Cylindro*.) Et hujus vis, secundum lineas *PE* vel *Pr* undique in superficie conica sitas exercita, ut hæc ipsa superficiei pars annularis; hoc est, ut lineola *Dd*, vel, quod perinde est, ut rectangulum sub dato sphæræ radio *PE* & lineola illa *Dd*: at secundum lineam *PS* ad centrum *S* tendentem minor in ratione *PD* ad *PE*, ideoque ut $PD \times Dd$. Dividi jam intelligatur linea *DF* in particulas innumeras æquales, quæ singulæ nominentur *Dd*; & superficies *FE* dividetur in totidem æquales annulos, quorum vires erunt ut summa omnium $PD \times Dd$, hoc est, ut $\frac{1}{2} PFq - \frac{1}{2} PDq$, ideoque ut *DE quad.* Ducatur jam superficies *FE* in altitudinem *Ff*; & fiet solidi *EFfe* vis exercita in corpusculum *P* ut $DEq \times Ff$: puta si detur vis quam particula aliqua data *Ff* in distantia *PF* exercet in corpusculum *P*. At si vis illa non detur, fiet vis solidi *EFfe* ut solidum $DEq \times Ff$ & vis illa non data conjunctim. *Q. E. D.*

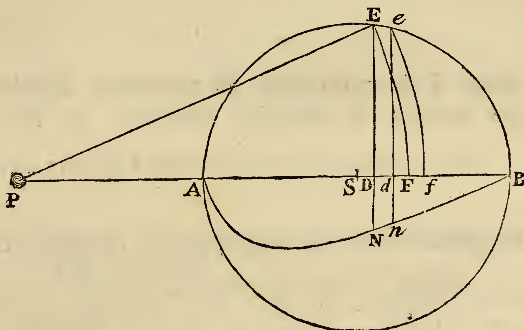


PROPO-

PROPOSITIO LXXX. THEOREMA XL.

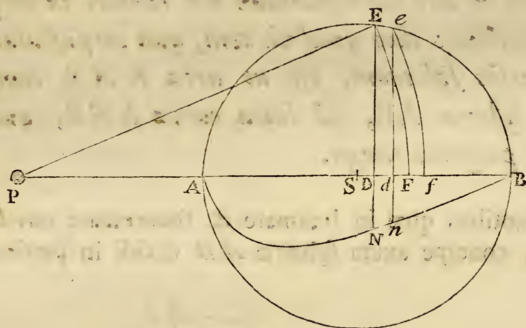
Si ad ſphæræ alicujus ABE, *centro* S *deſcriptæ, particulas ſingulas æquales tendant æquales vires centripetæ, & ad ſphæræ axem* AB, *in quo corpuſculum aliquod* P *locatur, erigantur de punctis ſingulis* D *perpendicula* DE, *ſphæræ occurrentia in* E, *& in ipſis capiantur longitudines* DN, *quæ ſint ut quantitas* $\frac{DEq \times PS}{PE}$ *& vis, quam ſphæræ particula ſita in axe ad diſtantiam* PE *exercet in corpuſculum* P, *conjunctim: dico quod vis tota, qua corpuſculum* P *trahitur verſus ſphæram, eſt ut area* ANB *comprehenſa ſub axe ſphæræ* AB, *& linea curva* ANB, *quam punctum* N *perpetuo tangit.*

Etenim ſtantibus quæ in lemmate & theoremate noviſſimo conſtructa ſunt, concipe axem ſphæræ *AB* dividi in particulas innu-



meras æquales *Dd*, & ſphæram totam dividi in totidem laminas ſphæricas concavo-convexas *EFfe*; & erigatur perpendiculum *dn*. Per theorema ſuperius vis, qua lamina *EFfe* trahit corpuſculum *P*, eſt ut $\frac{DEq \times Ff}{Dd}$ & vis particulæ unius ad diſtantiam *PE* vel *PF* exercita

exercita conjunctim. Est autem (per lemma novissimum) Dd ad Ff ut PE ad PS, & inde Ff æqualis $\frac{PS \times Dd}{PE}$; & $DEq \times Ff$ æquale Dd in $\frac{DEq \times PS}{PE}$, & propterea vis laminæ $EFfe$ est ut Dd in $\frac{DEq \times PS}{PE}$ & vis particulæ ad distantiam PF exercita conjunctim, hoc est (ex hypothesi) ut $DN \times Dd$, seu area evanescens $DNnd$. Sunt igitur laminarum omnium vires, in corpus P exercitæ, ut areæ omnes $DNnd$, hoc est, sphæræ vis tota ut area tota ANB. *Q. E. D.*



Corol. 1. Hinc si vis centripeta, ad particulas singulas tendens, eadem semper maneat in omnibus distantiis, & fiat DN ut $\frac{DEq \times PS}{PE}$; erit vis tota, qua corpusculum a sphæra attrahitur, ut area ANB.

Corol. 2. Si particularum vis centripeta sit reciproce ut distantia corpusculi a se attracti, & fiat DN ut $\frac{DEq \times PS}{PEq}$; erit vis, qua corpusculum P a sphæra tota attrahitur, ut area ANB.

Corol. 3. Si particularum vis centripeta sit reciproce ut cubus distantiæ corpusculi a se attracti, & fiat DN ut $\frac{DEq \times PS}{PEqq}$; erit vis, qua corpusculum a tota sphæra attrahitur, ut area ANB.

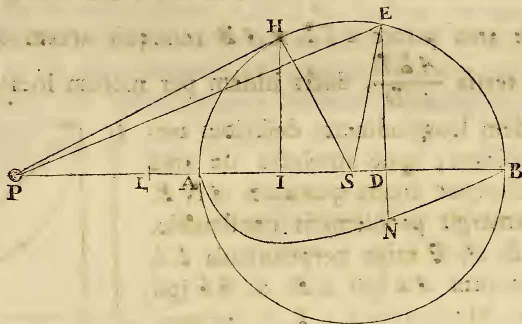
Corol.

Corol. 4. Et universaliter si vis centripeta ad singulas sphæræ particulas tendens ponatur esse reciproce ut quantitas V, fiat autem DN ut $\frac{DEq \times PS}{PE \times V}$; erit vis, qua corpusculum a sphæra tota attrahitur, ut area ANB.

PROPOSITIO LXXXI. PROBLEMA XLI.

Stantibus jam positis, mensuranda est area ANB.

A puncto P ducatur recta PH sphæram tangens in H, & ad axem PAB demissa normali HI, bisecetur PI in L; & erit (per prop. XII. lib. 2. elem.) PEq æquale $PSq + SEq + 2PSD$. Est autem SEq seu SHq (ob similitudinem triangulorum SPH, SHI) æquale rectangulo PSI. Ergo PEq æquale est contento sub PS & $PS + SI + 2SD$, hoc est, sub PS & $2LS + 2SD$, id est, sub PS & $2LD$. Porro DE *quad.* æquale est $SEq - SDq$, seu $SEq =$

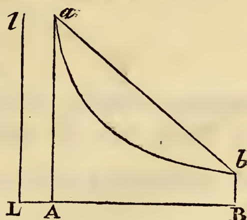


$LSq + 2SLD - LDq$, id est, $2SLD - LDq - ALB$. Nam $LSq - SEq$ seu $LSq - SAq$ (per prop. VI. lib. 2. elem.) æquatur rectangulo ALB. Scribatur itaque $2SLD - LDq - ALB$ pro DEq; & quantitas $\frac{DEq \times PS}{PE \times V}$, quæ secundum corollarium quartum propositionis præcedentis est ut longitudo ordinatim applicatæ DN, resolvet sese in tres partes $\frac{2SLD \times PS}{PE \times V} -$

 LDq

$\frac{LDq \times PS}{PE \times V} - \frac{ALB \times PS}{PE \times V}$: ubi si pro V scribatur ratio inversa vis centripetæ, & pro PE medium proportionale inter PS & $2LD$; tres illæ partes evadent ordinatim applicatæ linearum totidem curvarum, quarum areæ per methodos vulgatas innotescunt. *Q. E. F.*

Exempl. 1. Si vis centripeta ad singulas sphæræ particulas tendens sit reciproce ut distantia; pro V scribe distantiam PE; dein $2PS \times LD$ pro PEq, & fiet DN ut $SL - \frac{1}{2}LD - \frac{ALB}{2LD}$. Pone DN æqualem ejus duplo $2SL - LD - \frac{ALB}{LD}$: & ordinatæ pars data $2SL$ ducta in longitudinem AB describet aream rectangulam $2SL \times AB$; & pars indefinita LD ducta normaliter in eandem longitudinem per motum continuum, ea lege ut inter movendum crescendo vel decrescendo æquetur semper longitudini LD, describet aream $\frac{LBq - LAq}{2}$, id est, aream $SL \times AB$; quæ subducta de area priore $2SL \times AB$ relinquit aream $SL \times AB$. Pars autem tertia $\frac{ALB}{LD}$, ducta itidem per motum localem normaliter in eandem longitudinem, describet aream hyperbolicam; quæ subducta de area $SL \times AB$ relinquet aream quæsitam ANB. Unde talis emergit problematis constructio. Ad puncta L, A, B erige perpendicula Ll, Aa, Bb, quorum Aa ipsi LB, & Bb ipsi LA æquetur. Asymptotis Ll, LB, per puncta a b describatur hyperbola ab. Et acta chorda ba claudet aream aba areæ quæsitæ ANB æqualem.



Exempl. 2. Si vis centripeta ad singulas sphæræ particulas tendens sit reciproce ut cubus distantiæ, vel (quod perinde est) ut cubus ille applicatus ad planum quodvis datum; scribe $\frac{PE\,cub.}{2ASq}$ pro V, dein $2PS \times LD$ pro PEq; & fiet DN ut $\frac{SL \times ASq}{PS \times LD} - \frac{ASq}{2PS}$

—ALB

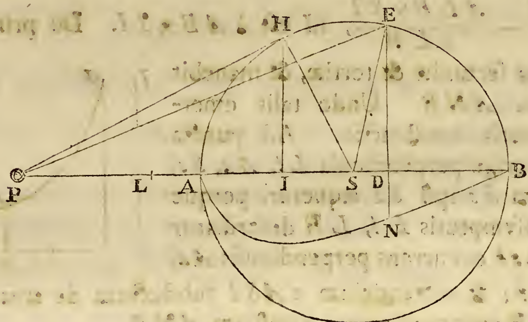
$= \frac{ALB \times ASq}{2PS \times LDq}$, id eſt (ob continue proportionales PS, AS, SI) ut $\frac{LSI}{LD} - \frac{1}{2}SI - \frac{ALB \times SI}{2LDq}$. Si ducantur hujus partes tres in longitudinem AB, prima $\frac{LSI}{LD}$ generabit aream hyperbolicam; ſecunda $\frac{1}{2}SI$ aream $\frac{1}{2}AB \times SI$; tertia $\frac{ALB \times SI}{2LDq}$ aream $\frac{ALB \times SI}{2LA} - \frac{ALB \times SI}{2LB}$, id eſt $\frac{1}{2}AB \times SI$. De prima ſubducatur ſumma ſecundæ & tertiæ, & manebit area quæſita ANB. Unde talis emergit problematis conſtructio. Ad puncta L, A, S, B erige perpendicula Ll, Aa, Ss, Bb, quorum Ss ipſi SI æquetur, perque punctum s aſymptotis Ll, LB deſcribatur hyperbola asb occurrens perpendiculis Aa, Bb in a & b; & rectangulum $2ASI$ ſubductum de area hyperbolica $AasbB$ relinquet aream quæſitam ANB.

Exempl. 3. Si vis centripeta, ad ſingulas ſphæræ particulas tendens, decreſcit in quadruplicata ratione diſtantiæ a particulis; ſcribe $\frac{PEqq}{2AS\,cub.}$ pro V, dein $\sqrt{2PS \times LD}$ pro PE, & fiet DN ut

$$\frac{SIq \times SL}{\sqrt{2SI}} \times \frac{1}{\sqrt{LDc}} - \frac{SIq}{2\sqrt{2SI}} \times \frac{1}{\sqrt{LD}} - \frac{SIq \times ALB}{2\sqrt{2SI}} \times \frac{1}{\sqrt{LDqc}}.$$

Cujus

Cujus tres partes ductæ in longitudinem AB, producunt areas totidem, *viz.* $\frac{2SIq \times SL}{\sqrt{2SI}}$ in $\overline{\frac{1}{\sqrt{LA}} - \frac{1}{\sqrt{LB}}}$; $\frac{SIq}{\sqrt{2SI}}$ in $\overline{\sqrt{LB} - \sqrt{LA}}$; & $\frac{SIq \times ALB}{3\sqrt{2SI}}$ in $\overline{\frac{1}{\sqrt{LA\,cub.}} - \frac{1}{\sqrt{LB\,cub.}}}$. Et hæ post debitam reductionem fiunt $\frac{2SIq \times SL}{LI}$, SIq, & $SIq + \frac{2SI\,cub.}{3LI}$. Hæ vero,



subductis posterioribus de priore, evadunt $\frac{4SI\,cub.}{3LI}$. Proinde vis tota, qua corpusculum P in sphæræ centrum trahitur, est ut $\frac{SI\,cub.}{PI}$, id est, reciproce ut $PS\,cub. \times PI$. *Q. E. I.*

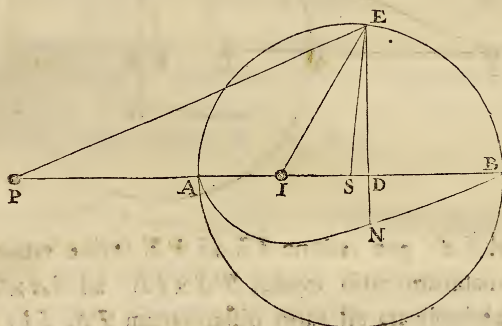
Eadem methodo determinari potest attractio corpusculi siti intra sphæram, sed expeditius per theorema sequens.

PROPOSITIO LXXXII. THEOREMA XLI.

In sphæra centro S *intervallo* SA *descripta, si capiantur* SI, SA, SP *continue proportionales: dico quod corpusculi intra sphæram, in loco quovis* I, *attractio est ad attractionem ipsius extra sphæram, in loco* P, *in ratione composita ex subduplicata ratione distantiarum a centro* IS, PS, *&* *subduplicata ratione virium centripetarum, in locis illis* P *&* I, *ad centrum tendentium.*

Ut,

Ut, si vires centripetæ particularum sphæræ sint reciproce ut distantiæ corpusculi a se attracti; vis, qua corpusculum situm in I trahitur a sphæra tota, erit ad vim, qua trahitur in P, in ratione composita ex subduplicata ratione distantiæ SI ad distantiam SP, & ratione subduplicata vis centripetæ in loco I, a particula aliqua in centro oriundæ, ad vim centripetam in loco P ab eadem in centro particula oriundam, id est, ratione subduplicata distantiarum SI, SP ad invicem reciproce. Hæ duæ rationes subduplicatæ componunt rationem æqualitatis, & propterea attractiones in I & P a sphæra tota factæ æquantur. Simili computo, si vires particularum sphæræ sunt reciproce in duplicata ratione distantiarum, colligetur quod attractio in I sit ad attractionem in P, ut distantia SP ad sphæræ semidiametrum SA: Si vires illæ sunt reciproce in tripli-



cata ratione distantiarum, attractiones in I & P erunt ad invicem ut SP *quad.* ad SA *quad.*: Si in quadruplicata, ut SP *cub.* ad SA *cub.* Unde cum attractio in P, in hoc ultimo casu, inventa fuit reciproce ut PS *cub.* $\times PI$, attractio in I erit reciproce ut SA *cub.* $\times PI$, id est (ob datum SA *cub.*) reciproce ut PI. Et similis est progressus in infinitum. Theorema vero sic demonstratur.

Stantibus jam ante constructis, & existente corpusculo in loco quovis P, ordinatim applicata DN inventa fuit ut $\frac{DEq \times PS}{PE \times V}$. Ergo si agatur IE, ordinata illa pro alio quovis corpusculi loco I, mutatis mutandis, evadet ut $\frac{DEq \times IS}{IE \times V}$. Pone vires centripetas, e

sphæræ

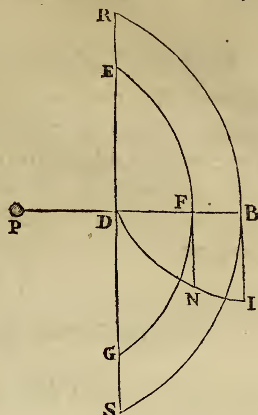
ſphæræ puncto quovis E manantes, eſſe ad invicem in diſtantiis IE, PE, ut PE^n ad IE^n (ubi numerus n deſignet indicem poteſtatum PE & IE) & ordinatæ illæ fient ut $\frac{DEq \times PS}{PE \times PE^n}$ & $\frac{DEq \times IS}{IE \times IE^n}$, quarum ratio ad invicem eſt ut $PS \times IE \times IE^n$ ad $IS \times PE \times PE^n$. Quoniam ob continue proportionales SI, SE, SP, ſimilia ſunt triangula SPE, SEI, & inde fit IE ad PE ut IS ad SE vel SA; pro ratione IE ad PE ſcribe rationem IS ad SA; & ordinatarum ratio evadet $PS \times IE^n$ ad $SA \times PE^n$. Sed PS ad SA ſubduplicata eſt ratio diſtantiarum PS, SI; & IE^n ad PE^n (ob proportionales IE ad PE ut IS ad SA) ſubduplicata eſt ratio virium in diſtantiis PS, IS. Ergo ordinatæ, & propterea areæ quas ordinatæ deſcribunt, hiſque proportionales attractiones, ſunt in ratione compoſita ex ſubduplicatis illis rationibus. *Q. E. D.*

PROPOSITIO LXXXIII. PROBLEMA XLII.

Invenire vim qua corpuſculum in centro ſphæræ locatum ad ejus ſegmentum quodcunque attrahitur.

Sit P corpus in centro ſphæræ, & $RBSD$ ſegmentum ejus plano RDS & ſuperficie ſphærica RBS contentum. Superficie ſphærica EFG centro P deſcripta ſecetur DB in F, ac diſtinguatur

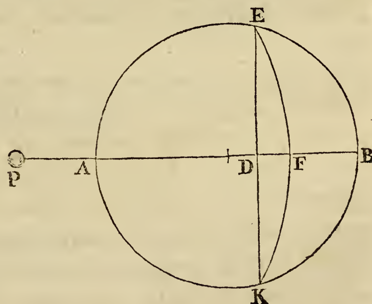
guatur segmentum in partes *BREFGS*, *FEDG*. Sit autem superficies illa non pure mathematica, sed physica, profunditatem habens quam minimam. Nominetur ista profunditas O, & erit hæc superficies (per demonstrata *Archimedis*) ut $PF \times DF \times O$. Ponamus præterea vires attractivas particularum sphæræ esse reciproce ut distantiarum dignitas illa, cujus index est n; & vis, qua superficies *EFG* trahit corpus *P*, erit (per prop. LXXIX.) ut $\frac{DEq \times O}{PF^n}$, id est, ut $\frac{2DF \times O}{PF^{n-1}} - \frac{DFq \times O}{PF^n}$. Huic proportionale sit perpendiculum *FN* ductum in O; & area curvilinea *BDI*, quam ordinatim applicata *FN* in longitudinem *DB* per motum continuum ducta describit, erit ut vis tota qua segmentum totum *RBSD* trahit corpus *P*. *Q. E. I.*



PROPOSITIO LXXXIV. PROBLEMA XLIII.

Invenire vim, qua corpusculum, extra centrum sphæræ in axe segmenti cujusvis locatum, attrahitur ab eodem segmento.

A segmento *EBK* trahatur corpus *P* in ejus axe *ADB* locatum. Centro *P* intervallo *PE* describatur superficies sphærica *EFK*, qua distinguatur segmentum in partes duas *EBKFE* & *EFKDE*. Quæratur vis partis prioris per prop. LXXXI. & vis partis posterioris per prop. LXXXIII; & summa virium erit vis segmenti totius *EBKDE*. *Q. E. I.*



Scholium.

Explicatis attractionibus corporum sphæricorum, jam pergere liceret ad leges attractionum aliorum quorundam ex particulis attractivis similiter constantium corporum; sed ista particulatim tractare minus ad institutum spectat. Suffecerit propositiones quasdam generaliores de viribus hujusmodi corporum, deque motibus inde oriundis, ob earum in rebus philosophicis aliqualem usum, subjungere.

SECTIO XIII.

De corporum non sphæricorum viribus attractivis.

PROPOSITIO LXXXV. THEOREMA XLII.

Si corporis attracti, ubi attrahenti contiguum est, attractio longe fortior sit, quam cum vel minimo intervallo separantur ab invicem: vires particularum trahentis, in recessu corporis attracti, decrescunt in ratione plusquam duplicata distantiarum a particulis.

Nam si vires decrescunt in ratione duplicata distantiarum a particulis; attractio versus corpus sphæricum, propterea quod (per prop. LXXIV.) sit reciproce ut quadratum distantiæ attracti corporis a centro sphæræ, haud sensibiliter augebitur ex contactu; atque adhuc minus augebitur ex contactu, si attractio in recessu corporis attracti decrescat in ratione minore. Patet igitur propositio de sphæris attractivis. Et par est ratio orbium sphæricorum concavorum corpora externa trahentium. Et multo magis res constat in orbibus corpora interius constituta trahentibus, cum attractiones passim per orbium cavitates ab attractionibus contrariis (per prop. LXX) tollantur, ideoque vel in ipso contactu nullæ sunt. Quod si sphæris hisce orbibusque sphæricis partes quælibet a loco contactus remotæ auferantur, & partes novæ ubivis addantur: mutari possunt figuræ horum corporum attractivorum pro lubitu, nec tamen partes additæ vel subductæ, cum sint a loco contactus remotæ, augebunt notabiliter attractionis excessum, qui ex contactu oritur. Constat igitur propositio de corporibus figurarum omnium. *Q. E. D.*

PROPO-

PROPOSITIO LXXXVI. THEOREMA XLIII.

Si particularum, ex quibus corpus attractivum componitur, vires in recessu corporis attracti decrescunt in triplicata vel plusquam triplicata ratione distantiarum a particulis: attractio longe fortior erit in contactu, quam cum attrahens & attractum intervallo vel minimo separantur ab invicem.

Nam attractionem in accessu attracti corpusculi ad hujusmodi sphæram trahentem augeri in infinitum, constat per solutionem problematis XLI. in exemplo secundo ac tertio exhibitam. Idem, per exempla illa & theorema XLI. inter se collata, facile colligitur de attractionibus corporum versus orbes concavo-convexos, sive corpora attracta collocentur extra orbes, sive intra in eorum cavitatibus. Sed & addendo vel auferendo his sphæris & orbibus ubivis extra locum contactus materiam quamlibet attractivam, eo ut corpora attractiva induant figuram quamvis assignatam, constabit propositio de corporibus universis. *Q. E. D.*

PROPOSITIO LXXXVII. THEOREMA XLIV.

Si corpora duo sibi invicem similia, & ex materia æqualiter attractiva constantia, seorsim attrahant corpuscula sibi ipsis proportionalia & ad se similiter posita: attractiones acceleratrices corpusculorum in corpora tota erunt ut attractiones acceleratrices corpusculorum in eorum particulas totis proportionales, & in totis similiter positas.

Nam si corpora distinguantur in particulas, quæ sint totis proportionales, & in totis similiter sitæ; erit, ut attractio in particulam quamlibet unius corporis ad attractionem in particulam correspondentem in corpore altero, ita attractiones in particulas singulas primi corporis ad attractiones in alterius particulas singulas correspondentes; & componendo, ita attractio in totum primum corpus ad attractionem in totum secundum. *Q. E. D.*

De Motu Corporum

Corol. 1. Ergo si vires attractivæ particularum, augendo distantias corpusculorum attractorum, decrescant in ratione dignitatis cujusvis distantiarum; attractiones acceleratrices in corpora tota erunt ut corpora directe, & distantiarum dignitates illæ inverse. Ut si vires particularum decrescant in ratione duplicata distantiarum a corpusculis attractis, corpora autem sint ut *A cub.* & *B cub.* ideoque tum corporum latera cubica, tum corpusculorum attractorum distantiæ a corporibus, ut *A* & *B*: attractiones acceleratrices in corpora erunt ut $\frac{A\,cub.}{A\,quad.}$ & $\frac{B\,cub.}{B\,quad.}$, id est, ut corporum latera illa cubica *A* & *B*. Si vires particularum decrescant in ratione triplicata distantiarum a corpusculis attractis; attractiones acceleratrices in corpora tota erunt ut $\frac{A\,cub.}{A\,cub.}$ & $\frac{B\,cub.}{B\,cub.}$, id est, æquales. Si vires decrescant in ratione quadruplicata; attractiones in corpora erunt ut $\frac{A\,cub.}{Aqq.}$ & $\frac{B\,cub.}{Bqq.}$, id est, reciproce ut latera cubica *A* & *B*. Et sic in cæteris.

Corol. 2. Unde vicissim, ex viribus, quibus corpora similia trahunt corpuscula ad se similiter posita, colligi potest ratio decrementi virium particularum attractivarum in recessu corpusculi attracti; si modo decrementum illud sit directe vel inverse in ratione aliqua distantiarum.

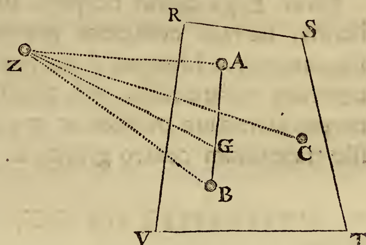
PROPOSITIO LXXXVIII. THEOREMA XLV.

Si particularum æqualium corporis cujuscunque vires attractivæ sint ut distantiæ locorum a particulis: vis corporis totius tendet ad ipsius centrum gravitatis; & eadem erit cum vi globi ex materia consimili & æquali constantis, & centrum habentis in ejus centro gravitatis.

Corporis *RSTV* particulæ *A*, *B* trahant corpusculum aliquod *Z* viribus, quæ, si particulæ æquantur inter se, sint ut distantiæ *AZ*, *BZ*; sin particulæ statuantur inæquales, sint ut hæ particulæ & ipsarum distantiæ *AZ*, *BZ* conjunctim, sive (si ita loquar) ut hæ particulæ in distantias suas *AZ*, *BZ* respective ductæ. Et exponantur

hæ

hæ vires per contenta illa $A \times AZ$ & $B \times BZ$. Jungatur AB, & ſecetur ea in G ut ſit AG ad BG ut particula B ad particulam A; & erit G commune centrum gravitatis particularum A & B. Vis $A \times AZ$ (per legum corol. 2.) reſolvitur in vires $A \times GZ$ & $A \times AG$ & vis $B \times BZ$ in vires $B \times GZ$ & $B \times BG$. Vires autem $A \times AG$ & $B \times BG$, ob proportionales A ad B & BG ad AG, æquantur; ideoque cum dirigantur in partes contrarias, ſe mutuo deſtruunt. Reſtant vires $A \times GZ$ & $B \times GZ$. Tendunt hæ ab Z verſus centrum G, & vim $\overline{A+B} \times GZ$ componunt; hoc eſt, vim eandem ac ſi particulæ attractivæ A & B conſiſterent in eorum communi gravitatis centro G, globum ibi componentes.



Eodem argumento, ſi adjungatur particula tertia C, & componatur hujus vis cum vi $\overline{A+B} \times GZ$ tendente ad centrum G; vis inde oriunda tendet ad commune centrum gravitatis globi illius in G & particulæ C; hoc eſt, ad commune centrum gravitatis trium particularum A, B, C; & eadem erit, ac ſi globus & particula C conſiſterent in centro illo communi, globum majorem ibi componentes. Et ſic pergitur in infinitum. Eadem eſt igitur vis tota particularum omnium corporis cujuſcunque $RSTV$, ac ſi corpus illud, ſervato gravitatis centro, figuram globi indueret. *Q. E. D.*

Corol. Hinc motus corporis attracti Z idem erit, ac ſi corpus attrahens $RSTV$ eſſet ſphæricum: & propterea ſi corpus illud attrahens vel quieſcat, vel progrediatur uniformiter in directum; corpus attractum movebitur in ellipſi centrum habente in attrahentis centro gravitatis.

PROPOSITIO LXXXIX. THEOREMA XLVI.

Si corpora ſint plura ex particulis æqualibus conſtantia, quarum vires ſunt ut diſtantiæ locorum a ſingulis: vis ex omnium viribus compoſita, qua corpuſculum quodcunque trahitur, tendet ad trahentium commune centrum gravitatis; & eadem

De Motu Corporum

dem erit, ac ſi trahentia illa, ſervato gravitatis centro communi, coirent & in globum formarentur.

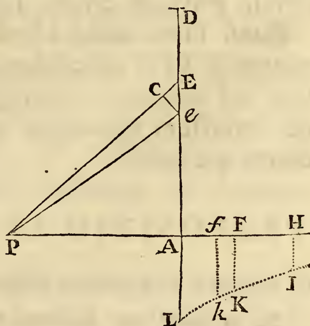
Demonſtratur eodem modo, atque propoſitio ſuperior.

Corol. Ergo motus corporis attracti idem erit, ac ſi corpora trahentia, ſervato communi gravitatis centro, coirent & in globum formarentur. Ideoque ſi corporum trahentium commune gravitatis centrum vel quieſcit, vel progreditur uniformiter in linea recta; corpus attractum movebitur in ellipſi, centrum habente in communi illo trahentium centro gravitatis.

PROPOSITIO XC. PROBLEMA XLIV.

Si ad ſingula circuli cujuſcunque puncta tendant vires æquales centripetæ, creſcentes vel decreſcentes in quacunque diſtantiarum ratione: invenire vim, qua corpuſculum attrahitur ubivis poſitum in recta, quæ plano circuli ad centrum ejus perpendiculariter inſiſtit.

Centro *A* intervallo quovis *AD*, in plano, cui recta *AP* perpendicularis eſt, deſcribi intelligatur circulus; & invenienda ſit vis, qua corpuſculum quodvis *P* in eundem attrahitur. A circuli puncto quovis *E* ad corpuſculum attractum *P* agatur recta *PE*. In recta *PA* capiatur *PF* ipſi *PE* æqualis, & erigatur normalis *FK*, quæ ſit ut vis qua punctum *E* trahit corpuſculum *P*. Sitque *IKL* curva linea quam punctum *K* perpetuo tangit. Occurrat eadem circuli plano in *L*. In *PA* capiatur *PH* æqualis *PD*, & erigatur perpendiculum *HI* curvæ prædictæ occurrens in *I*; & erit corpuſculi *P* attractio in circulum ut area *AHIL* ducta in altitudinem *AP*. *Q. E. I.*



Etenim in *AE* capiatur linea quam minima *Ee*. Jungatur *Pe*, & in *PE*, *PA* capiantur *PC*, *Pf* ipſi *Pe* æquales. Et quoniam vis,

vis, qua annuli centro A intervallo AE in plano prædicto descripti punctum quodvis E trahit ad se corpus P, ponitur esse ut FK, & inde vis, qua punctum illud trahit corpus P versus A, est ut $\frac{AP \times FK}{PE}$, & vis, qua annulus totus trahit corpus P versus A, ut annulus & $\frac{AP \times FK}{PE}$ conjunctim; annulus autem iste est ut rectangulum sub radio AE & latitudine Ee, & hoc rectangulum (ob proportionales PE & AE, Ee & CE) æquatur rectangulo $PE \times CE$ seu $PE \times Ff$; erit vis, qua annulus iste trahit corpus P versus A, ut $PE \times Ff$ & $\frac{AP \times FK}{PE}$ conjunctim, id est, ut contentum $Ff \times FK \times AP$, sive ut area $FKkf$ ducta in AP. Et propterea summa virium, quibus annuli omnes in circulo, qui centro A & intervallo AD describitur, trahunt corpus P versus A, est ut area tota $AHIKL$ ducta in AP. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc si vires punctorum decrescunt in duplicata distantiarum ratione, hoc est, si sit FK ut $\frac{1}{PF\ quad.}$, atque ideo area $AHIKL$ ut $\frac{1}{PA} - \frac{1}{PH}$; erit attractio corpusculi P in circulum ut $1 - \frac{PA}{PH}$, id est, ut $\frac{AH}{PH}$.

Corol. 2. Et universaliter, si vires punctorum ad distantias D sint reciproce ut distantiarum dignitas quælibet D^n, hoc est, si sit FK ut $\frac{1}{D^n}$, ideoque area $AHIKL$ ut $\frac{1}{PA^{n-1}} - \frac{1}{PH^{n-1}}$; erit attractio corpusculi P in circulum ut $\frac{1}{PA^{n-2}} - \frac{PA}{PH^{n-1}}$.

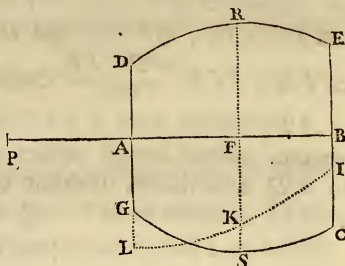
Corol. 3. Et si diameter circuli augeatur in infinitum, & numerus n sit unitate major; attractio corpusculi P in planum totum infinitum erit reciproce ut PA^{n-2}, propterea quod terminus alter $\frac{PA}{PH^{n-1}}$ evanescet.

PROPO-

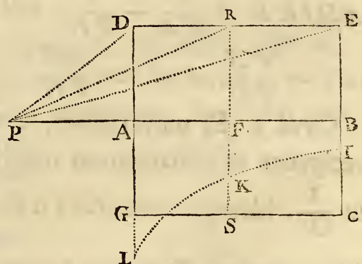
PROPOSITIO XCI. PROBLEMA XLV.

Invenire attractionem corpusculi siti in axe solidi rotundi, ad cujus puncta singula tendunt vires æquales centripetæ in quacunque distantiarum ratione decrescentes.

In solidum *DECG* trahatur corpusculum *P*, situm in ejus axe *AB*. Circulo quolibet *RFS* ad hunc axem perpendiculari secetur hoc solidum, & in ejus semidiametro *FS*, in plano aliquo *PALKB* per axem transeunte, capiatur (per prop. xc.) longitudo *FK* vi, qua corpusculum *P* in circulum illum attrahitur, proportionalis. Tangat autem punctum *K* curvam lineam *LKI*, planis extimorum circulorum *AL* & *BI* occurrentem in *L* & *I*; & erit attractio corpusculi *P* in solidum ut area *LABI*. *Q. E. I.*

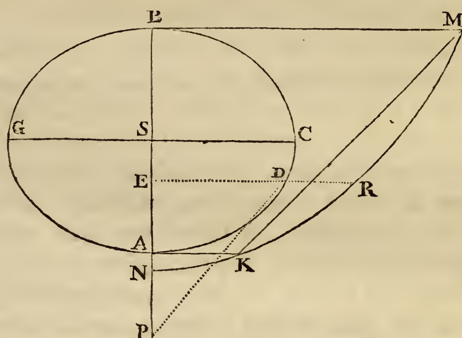


Corol. 1. Unde si solidum cylindrus sit, parallelogrammo *ADEB* circa axem *AB* revoluto descriptus, & vires centripetæ in singula ejus puncta tendentes sint reciproce ut quadrata distantiarum a punctis: erit attractio corpusculi *P* in hunc cylyndrum ut $AB - PE + PD$. Nam ordinatim applicata *FK* (per corol. 1. prop. xc.) erit ut $1 - \frac{PF}{PR}$. Hujus pars 1 ducta in longitudinem *AB*, describit aream $1 \times AB$: & pars altera $\frac{PF}{PR}$ ducta in longitudinem *PB*, describit aream 1 in $\overline{PE - AD}$, id quod ex curvæ *LKI* quadratura facile ostendi potest;) & similiter pars eadem ducta in longitudinem *PA* describit aream 1 in $\overline{PD - AD}$, ductaque in ipsarum *PB*, *PA* differentiam *AB* describit arearum differentiam 1 in $\overline{PE - PD}$. De contento primo $1 \times AB$ auferatur contentum



tentum postremum 1 in $\overline{PE - PD}$, & restabit area $LABI$ æqualis 1 in $\overline{AB - PE + PD}$. Ergo vis, huic areæ proportionalis, est ut $AB - PE + PD$.

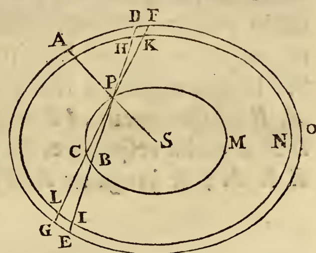
Corol. 2. Hinc etiam vis innotescit, qua sphærois $AGBC$ attrahit corpus quodvis P, exterius in axe suo AB situm. Sit $NKRM$ sectio conica cujus ordinatim applicata ER, ipsi PE perpendicularis, æquetur semper longitudini PD, quæ ducitur ad punctum illud D, in quo applicata ista sphæroidem secat. A sphæroidis verticibus A, B ad ejus axem AB erigantur perpendicula AK, BM ipsis AP, BP æqualia respective, & propterea sectioni conicæ occurrentia in K & M; & jungatur KM auferens ab eadem segmentum $KMRK$.



Sit autem sphæroidis centrum S & semidiameter maxima SC: & vis, qua sphærois trahit corpus P, erit ad vim, qua sphæra diametro AB descripta trahit idem corpus, ut $\frac{AS \times CSq - PS \times KMRK}{PSq + CSq - ASq}$ ad $\frac{AS\ cub.}{3PS\ quad.}$. Et eodem computandi fundamento invenire licet vires segmentorum sphæroidis.

Corol. 3. Quod si corpusculum intra sphæroidem in axe collocetur; attractio erit ut ipsius distantia a centro. Id quod facilius hoc argumento colligitur, sive particula in axe sit, sive in alia quavis diametro data. Sit $AGOF$ sphærois attrahens, S centrum ejus, & P corpus attractum. Per corpus illud P agantur tum semidiameter SPA, tum rectæ duæ quævis DE, FG sphæroidi hinc inde occur-

rentes in *D* & *E*, *F* & *G*; sintque *PCM*, *HLN* superficies sphæroidum duarum interiorum, exteriori similium & concentricarum, quarum prior transeat per corpus *P*, & secet rectas *DE* & *FG* in *B* & *C*, posterior secet easdem rectas in *H*, *I* & *K*, *L*. Habeant autem sphæroides omnes axem communem, & erunt rectarum partes hinc inde interceptæ *DP* & *BE*, *FP* & *CG*, *DH* & *IE*, *FK* & *LG* sibi mutuo æquales; propterea quod rectæ *DE*, *PB* & *HI* bisecantur in eodem puncto, ut & rectæ *FG*, *PC* & *KL*. Concipe jam *DPF*, *EPG* designare conos oppositos, angulis verticalibus *DPF*, *EPG* infinite parvis descriptos, & lineas etiam *DH*, *EI* infinite parvas esse; & conorum particulæ sphæroidum superficiebus abscissæ *DHKF*, *GLIE*, ob æqualitatem linearum *DH*, *EI*, erunt ad invicem ut quadrata distantiarum suarum a corpusculo *P*, & propterea corpusculum illud æqualiter trahent. Et pari ratione, si superficiebus sphæroidum innumerarum similium concentricarum & axem communem habentium dividantur spatia *DPF*, *EGCB* in particulas, hæ omnes utrinque æqualiter trahent corpus *P* in partes contrarias. Æquales igitur sunt vires coni *DPF* & segmenti conici *EGCB*, & per contrarietatem se mutuo destruunt. Et par est ratio virium materiæ omnis extra sphæroidem intimam *PCBM*. Trahitur igitur corpus *P* a sola sphæroide intima *PCBM*, & propterea (per corol. 3. prop. LXXII.) attractio ejus est ad vim, qua corpus *A* trahitur a sphæroide tota *AGOD*, ut distantia *PS* ad distantiam *AS*. *Q. E. D.*



PROPOSITIO XCII. PROBLEMA XLVI.

Dato corpore attractivo, invenire rationem decrementi virium centripetarum in ejus puncta singula tendentium.

E corpore dato formanda est sphæra vel cylindrus aliave figura regularis, cujus lex attractionis, cuivis decrementi rationi congruens (per prop. LXXX. LXXXI. & XCI.) inveniri potest. Dein factis experimentis invenienda est vis attractionis in diversis distantiis, & lex

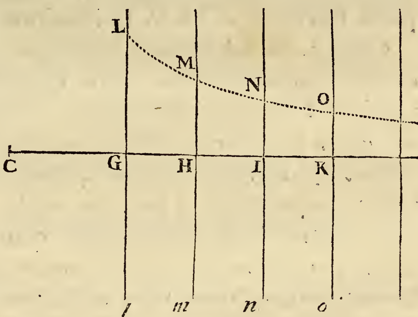
attractionis

attractionis in totum inde patefacta dabit rationem decrementi virium partium singularum, quam invenire oportuit.

PROPOSITIO XCIII. THEOREMA XLVII.

Si solidum ex una parte planum, ex reliquis autem partibus infinitum, constet ex particulis æqualibus æqualiter attractivis, quarum vires in recessu a solido decrescunt in ratione potestatis cujusvis distantiarum plusquam quadraticæ, & vi solidi totius corpusculum ad utramvis plani partem constitutum trahatur: dico quod solidi vis illa attractiva, in recessu ab ejus superficie plana, decrescet in ratione potestatis, cujus latus est distantia corpusculi a plano, & index ternario minor quam index potestatis distantiarum.

Cas. 1. Sit *LGl* planum quo solidum terminatur. Jaceat solidum autem ex parte plani hujus versus *I*, inque plana innumera *mHM*, *nIN*, *oKO*, &c. ipsi *GL* parallela resolvatur. Et primo collocetur corpus attractum *C* extra solidum. Agatur autem *CGHI* planis illis innumeris perpendicularis, & decrescant vires attractivæ punctorum solidi in ratione potestatis distantiarum, cujus index sit numerus *n* ternario non minor. Ergo (per corol. 3. prop. xc.) vis, qua

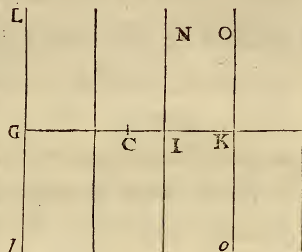


planum quodvis *mHM* trahit punctum *C*, est reciproce ut CH^{n-2}. In plano *mHM* capiatur longitudo *HM* ipsi CH^{n-2} reciproce proportionalis, & erit vis illa ut *HM*. Similiter in planis singulis *lGL*, *nIN*, *oKO*, &c. capiantur longitudines *GL*, *IN*, *KO*, &c. ipsis CG^{n-2}, CI^{n-2}, CK^{n-2}, &c. reciproce proportionales; & vires planorum eorundem erunt ut longitudines captæ, ideoque summa virium ut summa longitudinum, hoc est, vis solidi totius ut area

De Motu Corporum

GLOK in infinitum versus *OK* producta. Sed area illa (per notas quadraturarum methodos) est reciproce ut CG^{n-3}, & propterea vis solidi totius est reciproce ut CG^{n-3}. *Q. E. D.*

Cas. 2. Collocetur jam corpusculum *C* ex parte plani *lGL* intra solidum, & capiatur distantia *CK* æqualis distantiæ *CG*. Et solidi pars *LGloKO*, planis parallelis *lGL*, *oKO* terminata, corpusculum *C* in medio situm nullam in partem trahet, contrariis oppositorum punctorum actionibus se mutuo per æqualitatem tollentibus. Proinde corpusculum *C* sola vi solidi ultra planum *OK* siti trahitur. Hæc autem vis (per casum primum) est reciproce ut CK^{n-3}, hoc est (ob æquales *CG*, *CK*) reciproce ut CG^{n-3}. *Q. E. D.*



Corol. 1. Hinc si solidum *LGIN* planis duobus infinitis parallelis *LG*, *IN* utrinque terminetur; innotescit ejus vis attractiva, subducendo de vi attractiva solidi totius infiniti *LGKO* vim attractivam partis ulterioris *NIKO*, in infinitum versus *KO* productæ.

Corol. 2. Si solidi hujus infiniti pars ulterior, quando attractio ejus collata cum attractione partis citerioris nullius pene est momenti, rejiciatur: attractio partis illius citerioris augendo distantiam decrescet quam proxime in ratione potestatis CG^{n-3}.

Corol. 3. Et hinc si corpus quodvis finitum & ex una parte planum trahat corpusculum e regione medii illius plani, & distantia inter corpusculum & planum collata cum dimensionibus corporis attrahentis perexigua sit, constet autem corpus attrahens ex particulis homogeneis, quarum vires attractivæ decrescunt in ratione potestatis cujusvis plusquam quadruplicatæ distantiarum; vis attractiva corporis totius decrescet quamproxime in ratione potestatis, cujus latus sit distantia illa perexigua, & index ternario minor quam index potestatis prioris. De corpore ex particulis constante, quarum vires attractivæ decrescunt in ratione potestatis triplicatæ distantiarum, assertio non valet; propterea quod, in hoc casu, attractio partis illius ulterioris corporis infiniti in corollario secundo, semper est infinite major quam attractio partis citerioris.

Scholium.

Scholium.

Si corpus aliquod perpendiculariter versus planum datum trahatur, & ex data lege attractionis quæratur motus corporis: solvetur problema quærendo (per prop. XXXIX.) motum corporis recta descendentis ad hoc planum, & (per legum corol. 2.) componendo motum istum cum uniformi motu, secundum lineas eidem plano parallelas facto. Et contra, si quæratur lex attractionis in planum secundum lineas perpendiculares factæ, ea conditione ut corpus attractum in data quacunque curva linea moveatur, solvetur problema operando ad exemplum problematis tertii.

Operationes autem contrahi solent resolvendo ordinatim applicatas in series convergentes. Ut si ad basem A in angulo quovis dato ordinatim applicetur longitudo B, quæ sit ut basis dignitas quælibet $A^{\frac{m}{n}}$; & quæratur vis qua corpus, secundum positionem ordinatim applicatæ, vel in basem attractum vel a basi fugatum, moveri possit in curva linea, quam ordinatim applicata termino suo superiore semper attingit: Suppono basem augeri parte quam minima O, & ordinatim applicatam $\overline{A+O}|^{\frac{m}{n}}$ resolvo in seriem infinitam $A^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} OA^{\frac{m-n}{n}} + \frac{mm-mn}{2nn} OOA^{\frac{m-2n}{n}}$ &c. atque hujus termino in quo O duarum est dimensionum, id est, termino $\frac{mm-mn}{2nn} OOA^{\frac{m-2n}{n}}$ vim proportionalem esse suppono. Est igitur vis quæsita ut $\frac{mm-mn}{nn} A^{\frac{m-2n}{n}}$, vel quod perinde est, ut $\frac{mm-mn}{nn} B^{\frac{m-2n}{m}}$. Ut si ordinatim applicata parabolam attingat, existente $m=2$, & $n=1$: fiet vis ut data $2B^{0}$, ideoque dabitur. Data igitur vi corpus movebitur in parabola, quemadmodum *Galilæus* demonstravit. Quod si ordinatim applicata hyperbolam attingat, existente $m=0-1$, & $n=1$; fiet vis ut $2A^{-3}$ seu $2B^{3}$: ideoque vi, quæ sit ut cubus ordinatim applicatæ, corpus movebitur in hyper-

hyperbola. Sed missis hujusmodi propositionibus, pergo ad alias quasdam de motu, quas nondum attigi.

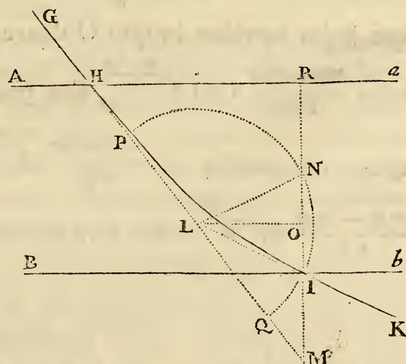
SECTIO XIV.

De motu corporum minimorum, quæ viribus centripetis ad singulas magni alicujus corporis partes tendentibus agitantur.

PROPOSITIO XCIV. THEOREMA XLVIII.

Si media duo similaria, spatio planis parallelis utrinque terminato, distinguantur ab invicem, & corpus in transitu per hoc spatium attrahatur vel impellatur perpendiculariter versus medium alterutrum, neque ulla alia vi agitetur vel impediatur; sit autem attractio, in æqualibus ab utroque plano distantiis ad eandem ipsius partem captis, ubique eadem: dico quod sinus incidentiæ in planum alterutrum erit ad sinum emergentiæ ex plano altero in ratione data.

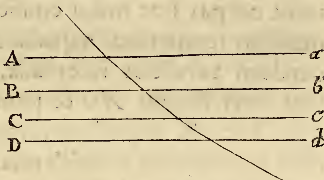
Cas. 1. Sunto Aa, Bb plana duo parallela. Incidat corpus in planum prius Aa secundum lineam GH, ac toto suo per spatium intermedium transitu attrahatur vel impellatur versus medium incidentiæ, eaque actione describat lineam curvam HI, & emergat secundum lineam IK. Ad planum emergentiæ Bb erigatur perpendiculum IM, occurrens tum lineæ incidentiæ GH productæ in M, tum plano incidentiæ Aa in R; & linea emergentiæ KI producta occurrat HM in L. Centro



L intervallo LI describatur circulus, secans tam HM in P & Q, quam MI productam in N; & primo si attractio vel impulsus ponatur

ponatur uniformis, erit (ex demonſtratis *Galilæi*) curva *HI* parabola, cujus hæc eſt proprietas, ut rectangulum ſub dato latere recto & linea *IM* æquale ſit *HM* quadrato; ſed & linea *HM* biſecabitur in *L*. Unde ſi ad *MI* demittatur perpendiculum *LO*, æquales erunt *MO*, *OR*; & additis æqualibus *ON*, *OI*, fient totæ æquales *MN*, *IR*. Proinde cum *IR* detur, datur etiam *MN*; eſtque rectangulum *NMI* ad rectangulum ſub latere recto & *IM*, hoc eſt, ad *HMq*, in data ratione. Sed rectangulum *NMI* æquale eſt rectangulo *PMQ*, id eſt, differentiæ quadratorum *MLq*, & *PLq* ſeu *LIq*; & *HMq* datam rationem habet ad ſui ipſius quartam partem *MLq*: ergo datur ratio *MLq*—*LIq* ad *MLq*, & convertendo ratio *LIq* ad *MLq*, & ratio dimidiata *LI* ad *ML*. Sed in omni triangulo *LMI*, ſinus angulorum ſunt proportionales lateribus oppoſitis. Ergo datur ratio ſinus anguli incidentiæ *LMR* ad ſinum anguli emergentiæ *LIR*. *Q. E. D.*

Caſ. 2. Tranſeat jam corpus ſucceſſive per ſpatia plura parallelis planis terminata, *AabB*, *BbcC*, &c. & agitetur vi quæ ſit in ſingulis ſeparatim uniformis, at in diverſis diverſa; & per jam demonſtrata, ſinus incidentiæ in planum primum *Aa* erit ad ſinum emergentiæ ex plano ſecundo *Bb*, in data ratione; & hic ſinus, qui eſt ſinus incidentiæ in planum ſecundum *Bb*, erit ad ſinum emergentiæ ex plano tertio *Cc*, in data ratione; & hic ſinus ad ſinum emergentiæ ex plano quarto *Dd*, in data ratione; & ſic in infinitum: & ex æquo, ſinus incidentiæ in planum primum ad ſinum emergentiæ ex plano ultimo in data ratione. Minuantur jam planorum intervalla & augeatur numerus in infinitum, eo ut attractionis vel impulſus actio, ſecundum legem quamcunque aſſignatam, continua reddatur; & ratio ſinus incidentiæ in planum primum ad ſinum emergentiæ ex plano ultimo, ſemper data exiſtens, etiamnum dabitur. *Q. E. D.*

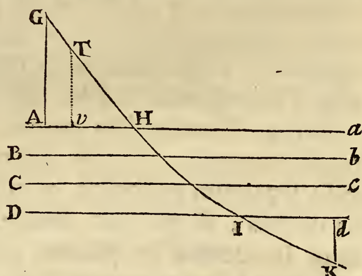


PROPO-

PROPOSITIO XCV. THEOREMA XLIX.

Iisdem positis; dico quod velocitas corporis ante incidentiam est ad ejus velocitatem post emergentiam, ut sinus emergentiæ ad sinum incidentiæ.

Capiantur *AH*, *Id* æquales, & erigantur perpendicula *AG*, *dK* occurrentia lineis incidentiæ & emergentiæ *GH*, *IK*, in *G* & *K*. In *GH* capiatur *TH* æqualis *IK*, & ad planum *Aa* demittatur normaliter *Tv*. Et (per legum. corol. 2.) distinguatur motus corporis in duos, unum planis *Aa*, *Bb*, *Cc*, &c. perpendicularem, alterum iisdem parallelum. Vis attractionis vel impulsus, agendo secundum lineas perpendiculares, nil mutat motum secundum parallelas, & propterea corpus hoc motu conficiet æqualibus temporibus æqualia illa secundum parallelas intervalla, quæ sunt inter lineam *AG* & punctum *H*, interque punctum *I* & lineam *dK*; hoc est, æqualibus temporibus describet lineas *GH*, *IK*. Proinde velocitas ante incidentiam est ad velocitatem post emergentiam, ut *GH* ad *IK* vel *TH*, id est, ut *AH* vel *Id* ad *vH*, hoc est (respectu radii *TH* vel *IK*) ut sinus emergentiæ ad sinum incidentiæ. *Q. E. D.*



PROPOSITIO XCVI. THEOREMA L.

Iisdem positis, & quod motus ante incidentiam velocior sit quam postea: dico quod corpus, inclinando lineam incidentiæ, reflectetur tandem, & angulus reflexionis fiet æqualis angulo incidentiæ.

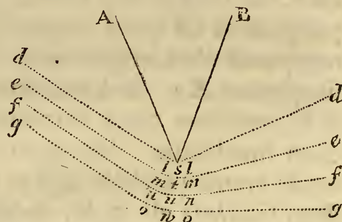
Nam concipe corpus inter parallela plana *Aa*, *Bb*, *Cc*, &c. describere arcus parabolicos, ut supra; sintque arcus illi *HP*, *PQ*, *QR*, &c. Et sit ea lineæ incidentiæ *GH* obliquitas ad planum primum

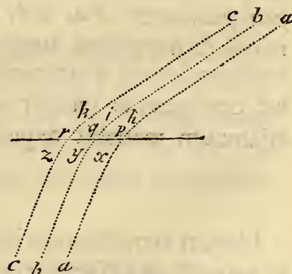
mum *Aa*, ut ſinus incidentiæ ſit ad radium circuli, cujus eſt ſinus, in ea ratione quam habet idem ſinus incidentiæ ad ſinum emergentiæ ex plano *Dd*, in ſpatium *DdeE*: & ob ſinum emergentiæ jam factum æqualem radio, angulus emergentiæ erit rectus, ideoque linea emergentiæ coincidet cum plano *Dd*. Perveniat corpus ad hoc planum in puncto *R*; & quoniam linea emergentiæ coincidit cum eodem plano, perſpicuum eſt quod corpus non poteſt ultra pergere verſus planum *Ee*. Sed nec poteſt idem pergere in linea emergentiæ *Rd*, propterea quod perpetuo attrahitur vel impellitur verſus medium incidentiæ. Revertetur itaque inter plana *Cc*, *Dd*, deſcribendo arcum parabolæ *QRq*, cujus vertex principalis (juxta demonſtrata *Galilæi*) eſt in *R*; ſecabit planum *Cc* in eodem angulo in *q*, ac prius in *Q*; dein pergendo in arcubus parabolicis *qp*, *ph*, &c. arcubus prioribus *QP*, *PH* ſimilibus & æqualibus, ſecabit reliqua plana in iiſdem angulis in *p*, *h*, &c. ac prius in *P*, *H*, &c. emerget-que tandem eadem obliquitate in *h*, qua incidit in *H*. Concipe jam planorum *Aa*, *Bb*, *Cc*, *Dd*, *Ee*, &c. intervalla in infinitum minui & numerum augeri, eo ut actio attractionis vel impulſus ſecundum legem quamcunque aſſignatam continua reddatur; & angulus emergentiæ ſemper angulo incidentiæ æqualis exiſtens, eidem etiamnum manebit æqualis. *Q. E. D.*

Scholium.

Harum attractionum haud multum diſſimiles ſunt lucis reflexiones & refractiones, factæ ſecundum datam ſecantium rationem, ut invenit *Snellius*, & per conſequens ſecundum datam ſinuum rationem, ut expoſuit *Carteſius*. Namque lucem ſucceſſive propagari & ſpatio quaſi ſeptem vel octo minutorum primorum a ſole ad terram venire, jam conſtat per phænomena ſatellitum *Jovis*, obſervationibus diverſorum aſtronomorum confirmata. Radii autem in aëre exiſtentes (uti dudum *Grimaldus*, luce per foramen in tenebroſum cubiculum admiſſa, invenit, & ipſe quoque expertus ſum) in tranſitu ſuo prope corporum vel opacorum vel perſpicuorum angulos (quales ſunt nummorum ex auro, argento & ære cuſorum termini

rectanguli circulares, & cultrorum, lapidum aut fractorum vitrorum acies) incurvantur circum corpora, quasi attracti in eadem; & ex his radiis, qui in transitu illo propius accedunt ad corpora incurvantur magis, quasi magis attracti, ut ipse etiam diligenter observavi. Et qui transeunt ad majores distantias minus incurvantur; & ad distantias adhuc majores incurvantur aliquantulum ad partes contrarias, & tres colorum fascias efformant. In figura designat *s* aciem cultri vel cunei cujusvis *AsB*; & *gowog*, *fnunf*, *emtme*, *dlsld* sunt radii, arcubus *owo*, *nun*, *mtm*, *lsl* versus cultrum incurvati; idque magis vel minus pro distantia eorum a cultro. Cum autem talis incurvatio radiorum fiat in aere extra cultrum, debebunt etiam radii, qui incidunt in cultrum, prius incurvari in aere quam cultrum attingunt. Et par est ratio incidentium in vitrum. Fit igitur refractio, non in puncto incidentiæ, sed paulatim per continuam incurvationem radiorum, factam partim in aere antequam attingunt vitrum, partim (ni fallor) in vitro, postquam illud ingressi sunt: uti in radiis *ckzc*, *biyb*, *ahxa* incidentibus ad *r*, *q*, *p*, & inter *k* & *z*, *i* & *y*, *h* & *x* incurvatis, delineatum est. Igitur ob analogiam quæ est inter propagationem radiorum lucis & progressum corporum, visum est propositiones sequentes in usus opticos subjungere; interea de natura radiorum (utrum sint corpora necne) nihil omnino disputans, sed trajectorias corporum trajectoriis radiorum persimiles solummodo determinans.



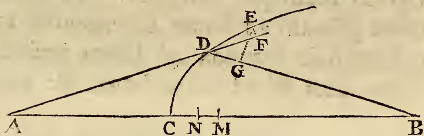


PROPO-

PROPOSITIO XCVII. PROBLEMA XLVII.

Posito quod sinus incidentiæ in superficiem aliquam sit ad sinum emergentiæ in data ratione; quodque incurvatio viæ corporum juxta superficiem illam fiat in spatio brevissimo, quod ut punctum considerari possit: determinare superficiem, quæ corpuscula omnia de loco dato successive manantia convergere faciat ad alium locum datum.

Sit *A* locus a quo corpuscula divergunt; *B* locus in quem convergere debent; *CDE* curva linea quæ circa axem *AB* revoluta describat superficiem quæsitam; *D*, *E* curvæ illius puncta duo quævis; & *EF*, *EG* perpendicula in corporis vias *AD*, *DB* demissa. Accedat punctum *D* ad punctum *E*; & lineæ *DF*, qua *AD* augetur, ad lineam *DG*, qua *DB* diminuitur, ratio ultima erit eadem, quæ sinus incidentiæ ad sinum emergentiæ. Datur ergo ratio incrementi lineæ *AD* ad decrementum lineæ *DB*; & propterea si in axe *AB* sumatur ubivis punctum *C*, per quod curva *CDE* transire debet, & capiatur ipsius *AC* incrementum *CM* ad ipsius *BC* decrementum *CN* in data illa ratione, centrisque *A*, *B*, & intervallis *AM*, *BN* describantur circuli duo se mutuo secantes in *D*; punctum illud *D* tanget curvam quæsitam *CDE*, eandemque ubivis tangendo determinabit. *Q. E. I.*

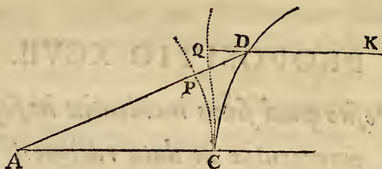


Corol. 1. Faciendo autem ut punctum *A* vel *B* nunc abeat in infinitum, nunc migret ad alteras partes puncti *C*, habebuntur figuræ illæ omnes, quas *Cartesius* in optica & geometria ad refractiones exposuit. Quarum inventionem cum *Cartesius* celaverit, visum fuit hac propositione exponere.

Corol. 2. Si corpus in superficiem quamvis *CD*, secundum lineam rectam *AD*, lege quavis ductam incidens, emergat secundum aliam quamvis rectam *DK*, & a puncto *C* duci intelligantur lineæ

De Motu Corporum

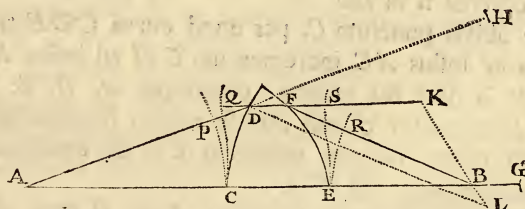
curvæ *CP*, *CQ* ipsis *AD*, *DK* semper perpendiculares: erunt incrementa linearum *PD*, *QD*, atque ideo lineæ ipsæ *PD*, *QD*, incrementis istis genitæ, ut sinus incidentiæ & emergentiæ ad invicem: & contra.



PROPOSITIO XCVIII. PROBLEMA XLVIII.

Iisdem positis, & circa axem AB *descripta superficie quacunque attractiva* CD, *regulari vel irregulari, per quam corpora de loco dato* A *exeuntia transire debent: invenire superficiem secundam attractivam* EF, *quæ corpora illa ad locum datum* B *convergere faciat.*

Juncta *AB* secet superficiem primam in *C* & secundam in *E*, puncto *D* utcunque assumpto. Et posito sinu incidentiæ in superficiem primam ad sinum emergentiæ ex eadem, & sinu emergentiæ e superficie secunda ad sinum incidentiæ in eandem, ut quantitas aliqua data M ad aliam datam N: produc tum *AB* ad *G*, ut sit *BG*



ad *CE* ut M—N ad N; tum *AD* ad *H*, ut sit *AH* æqualis *AG*; tum etiam *DF* ad *K*, ut sit *DK* ad *DH* ut N ad M. Junge *KB*, & centro *D* intervallo *DH* describe circulum occurrentem *KB* productæ in *L*, ipsique *DL* parallelam age *BF*: & punctum *F* tanget lineam *EF*, quæ circa axem *AB* revoluta describet superficiem quæsitam. *Q. E. F.*

Nam

Nam concipe lineas *CP*, *CQ* ipsis *AD*, *DF* respective, & lineas *ER*, *ES* ipsis *FB*, *FD* ubique perpendiculares esse, ideoque *QS* ipsi *CE* semper æqualem; & erit (per corol. 2. prop. XCVII.) *PD* ad *QD* ut M ad N, ideoque ut *DL* ad *DK* vel *FB* ad *FK*; & divisim ut *DL*—*FB* seu *PH*—*PD*—*FB* ad *FD* seu *FQ*—*QD*; & composite ut *PH*— *FB* ad *FQ*, id est (ob æquales *PH* & *CG*, *QS* & *CE*) *CE*+*BG*—*FR* ad *CE*—*FS*. Verum (ob proportionales *BG* ad *CE* & M—N ad N) est etiam *CE*+*BG* ad *CE* ut M ad N; ideoque divisim *FR* ad *FS* ut M ad N; & propterea (per corol. 2. prop. XCVII.) superficies *EF* cogit corpus, in ipsam secundum lineam *DF* incidens, pergere in linea *FR* ad locum *B*. *Q. E. D.*

Scholium.

Eadem methodo pergere liceret ad superficies tres vel plures. Ad usus autem opticos maxime accommodatæ sunt figuræ sphæricæ. Si perspicillorum vitra objectiva ex vitris duobus sphærice figuratis & aquam inter se claudentibus conflentur; fieri potest ut a refractionibus aquæ errores refractionum, quæ fiunt in vitrorum superficiebus extremis, satis accurate corrigantur. Talia autem vitra objectiva vitris ellipticis & hyperbolicis præferenda sunt, non solum quod facilius & accuratius formari possint, sed etiam quod penicillos radiorum extra axem vitri sitos accuratius refringant. Veruntamen diversa diversorum radiorum refrangibilitas impedimento est, quo minus optica per figuras vel sphæricas vel alias quascunque perfici possit. Nisi corrigi possint errores illinc oriundi, labor omnis in cæteris corrigendis imperite collocabitur.

DE
MOTU CORPORUM
LIBER SECUNDUS.

SECTIO I.

De motu corporum quibus resistitur in ratione velocitatis.

PROPOSITIO I. THEOREMA I.

Corporis, cui resistitur in ratione velocitatis, motus ex resistentia amissus est ut spatium movendo confectum.

NAM cum motus singulis temporis particulis æqualibus amissus sit ut velocitas, hoc est, ut itineris confecti particula: erit, componendo, motus toto tempore amissus ut iter totum. *Q. E. D.*

Corol. Quare si corpus, gravitate omni destitutum, in spatiis liberis sola vi insita moveatur; ac detur tum motus totus sub initio, tum etiam motus reliquus post spatium aliquod confectum: dabitur spatium totum quod corpus infinito tempore describere potest. Erit enim spatium illud ad spatium jam descriptum, ut motus totus sub initio ad motus illius partem amissam.

LEMMA I.

Quantitates differentiis suis proportionales sunt continue proportionales.

Sit A ad A − B ut B ad B − C & C ad C − D, &c. & convertendo fiet A ad B ut B ad C & C ad D, &c. *Q. E. D.*

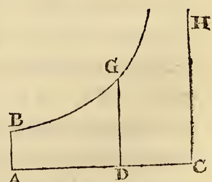
PROPO-

PROPOSITIO II. THEOREMA II.

Si corpori resistitur in ratione velocitatis, & idem sola vi insita per medium similare moveatur, sumantur autem tempora æqualia: velocitates in principiis singulorum temporum sunt in progressione geometrica, & spatia singulis temporibus descripta sunt ut velocitates.

Cas. 1. Dividatur tempus in particulas æquales; & si ipsis particularum initiis agat vis resistentiæ impulsu unico, quæ sit ut velocitas: erit decrementum velocitatis singulis temporis particulis ut eadem velocitas. Sunt ergo velocitates differentiis suis proportionales, & propterea (per lem. 1. lib. II.) continue proportionales. Proinde si ex æquali particularum numero componantur tempora quælibet æqualia, erunt velocitates ipsis temporum initiis, ut termini in progressione continua, qui per saltum capiuntur, omisso passim æquali terminorum intermediorum numero. Componuntur autem horum terminorum rationes ex rationibus inter se iisdem terminorum intermediorum æqualiter repetitis, & propterea eæ quoque rationes compositæ inter se eædem sunt. Igitur velocitates, his terminis proportionales, sunt in progressione geometrica. Minuantur jam æquales illæ temporum particulæ, & augeatur earum numerus in infinitum, eo ut resistentiæ impulsus reddatur continuus; & velocitates in principiis æqualium temporum, semper continue proportionales, erunt in hoc etiam casu continue proportionales. *Q. E. D.*

Cas. 2. Et divisim velocitatum differentiæ, hoc est, earum partes singulis temporibus amissæ, sunt ut totæ: spatia autem singulis temporibus descripta sunt ut velocitatum partes amissæ (per prop. 1. lib. II.) & propterea etiam ut totæ. *Q. E. D.*



Corol. Hinc si asymptotis rectangulis *AC*, *CH* describatur hyperbola *BG*, sintque *AB*, *DG* ad asymptoton *AC* perpendiculares, & exponatur tum corporis velocitas tum resistentia medii, ipso motus initio, per lineam quamvis datam *AC*, elapso autem tempore aliquo per lineam indefinitam *DC*: exponi potest tempus per aream *ABGD*, & spatium

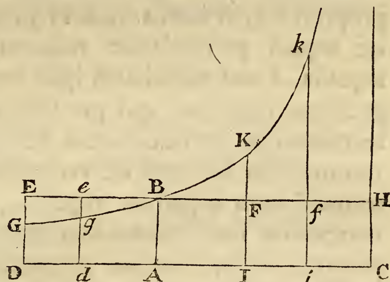
eo

eo tempore descriptum per lineam *AD*. Nam si area illa per motum puncti *D* augeatur uniformiter ad modum temporis, decrescet recta *DC* in ratione geometrica ad modum velocitatis, & partes rectæ *AC* æqualibus temporibus descriptæ decrescent in eadem ratione.

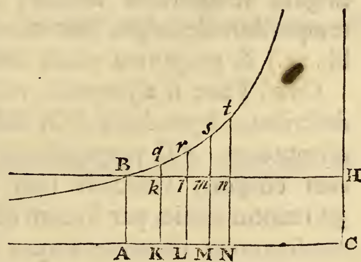
PROPOSITIO III. PROBLEMA I.

Corporis, cui, dum in medio similari recta ascendit vel descendit, resistitur in ratione velocitatis, quodque ab uniformi gravitate urgetur, definire motum.

Corpore ascendente, exponatur gravitas per datum quodvis rectangulum *BACH*, & resistentia medii initio ascensus per rectangulum *BADE* sumptum ad contrarias partes rectæ *AB*. Asymptotis rectangulis *AC*, *CH*, per punctum *B* describatur hyperbola secans perpendicula *DE*, *de* in *G*, *g*; & corpus ascendendo tempore *DGgd* describet spatium *EGge*, tempore *DGBA* spatium ascensus totius *EGB*; tempore *ABKI* spatium descensus *BFK*, atque tempore *IKki* spatium descensus *KFfk*; & velocitates corporis (resistentiæ medii proportionales) in horum temporum periodis erunt *ABED*, *ABed*, nulla, *ABFI*, *ABfi* respective; atque maxima velocitas, quam corpus descendendo potest acquirere, erit *BACH*.



Resolvatur enim rectangulum *BACH* in rectangula innumera *Ak*, *Kl*, *Lm*, *Mn*, &c. quæ sint ut incrementa velocitatum æqualibus totidem temporibus facta; & erunt nihil, *Ak*, *Al*, *Am*, *An*, &c. ut velocitates totæ, atque ideo (per hypothesin) ut resistentiæ medii principio singulorum temporum æquali-



um.

um. Fiat *AC* ad *AK* vel *ABHC* ad *ABkK* ut vis gravitatis ad resiſtentiam in principio temporis ſecundi, deque vi gravitatis ſubducantur reſiſtentiæ, & manebunt *ABHC*, *KkHC*, *LlHC*, *MmHC*, &c. ut vires abſolutæ quibus corpus in principio ſingulorum temporum urgetur, atque ideo (per motus legem II.) ut incrementa velocitatum, id eſt, ut rectangula *Ak*, *Kl*, *Lm*, *Mn*, &c. & propterea (per lem. I. lib. II.) in progreſſione geometrica. Quare ſi rectæ *Kk*, *Ll*, *Mm*, *Nn*, &c. productæ occurrant hyperbolæ in *q*, *r*, *s*, *t*, &c. erunt areæ *ABqK*, *KqrL*, *LrsM*, *MstN*, &c. æquales, ideoque tum temporibus tum viribus gravitatis ſemper æqualibus analogæ. Eſt autem area *ABqK* (per corol 3. lem. VII. & lem. VIII. lib. I.) ad aream *Bkq* ut *Kq* ad $\frac{1}{2}kq$ ſeu *AC* ad $\frac{1}{2}AK$, hoc eſt, ut vis gravitatis ad reſiſtentiam in medio temporis primi. Et ſimili argumento areæ *qKLr*, *rLMs*, *sMNt*, &c. ſunt ad areas *qklr*, *rlms*, *smnt*, &c. ut vires gravitatis ad reſiſtentias in medio temporis ſecundi, tertii, quarti, &c. Proinde cum areæ æquales *BAKq*, *qKLr*, *rLMs*, *sMNt*, &c. ſint viribus gravitatis analogæ, erunt areæ *Bkq*, *qklr*, *rlms*, *smnt*, &c. reſiſtentiis in mediis ſingulorum temporum, hoc eſt (per hypotheſin) velocitatibus, atque ideo deſcriptis ſpatiis analogæ. Sumantur analogarum ſummæ, & erunt areæ *Bkq*, *Blr*, *Bms*, *Bnt*, &c. ſpatiis totis deſcriptis analogæ; necnon areæ *ABqK*, *ABrL*, *ABsM*, *ABtN*, &c. temporibus. Corpus igitur inter deſcendendum, tempore quovis *ABrL*, deſcribit ſpatium *Blr*, & tempore *LrtN* ſpatium *rlnt*. *Q. E. D.* Et ſimilis eſt demonſtratio motus expoſiti in aſcenſu. *Q. E. D.*

Corol. 1. Igitur velocitas maxima, quam corpus cadendo poteſt acquirere, eſt ad velocitatem dato quovis tempore acquiſitam, ut vis data gravitatis, qua corpus illud perpetuo urgetur, ad vim reſiſtentiæ, qua in fine temporis illius impeditur.

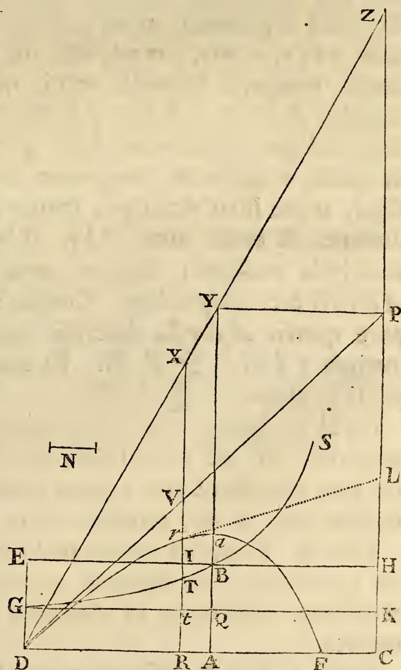
Corol. 2. Tempore autem aucto in progreſſione arithmetica, ſumma velocitatis illius maximæ ac velocitatis in aſcenſu, atque etiam earundem differentia in deſcenſu decreſcit in progreſſione geometrica.

Corol. 3. Sed & differentiæ ſpatiorum, quæ in æqualibus temporum differentiis deſcribuntur, decreſcunt in eadem progreſſione geometrica.

Corol. 4. Spatium vero a corpore descriptum differentia est duorum spatiorum, quorum alterum est ut tempus sumptum ab initio descensus, & alterum ut velocitas, quæ etiam ipso descensus initio æquantur inter se.

PROPOSITIO IV. PROBLEMA II.

Posito quod vis gravitatis in medio aliquo similari uniformis sit, ac tendat perpendiculariter ad planum horizontis; definire motum projectilis in eodem, resistentiam velocitati proportionalem patientis.



E loco quovis *D* egrediatur projectile secundum lineam quamvis rectam *DP*, & per longitudinem *DP* exponatur ejusdem velocitas sub initio motus. A puncto *P* ad lineam horizontalem *DC* demittatur perpendiculum *PC*, & secetur *DC* in *A*, ut sit *DA* ad *AC* ut resistentia medii, ex motu in altitudinem sub initio orta, ad vim gravitatis; vel (quod perinde est) ut sit rectangulum sub *DA* & *DP* ad rectangulum sub *AC* & *CP* ut resistentia tota sub initio motus ad vim gravitatis. Asymptotis *DC*, *CP* describatur hyperbola quævis *GTBS* secans perpendicula *DG*, *AB* in *G* & *B*; & compleatur parallelogrammum *DGKC*, cujus latus *GK* secet *AB* in *Q*. Capiatur linea N in ratione ad *QB* qua *DC* sit ad *CP*; & ad rectæ *DC* punctum quodvis *R* erecto perpendiculo *RT*, quod hyperbolæ in *T*, & rectis *EH*, *GK*, *DP* in *I*, *t* & *V* occurrat; in eo cape *Vr* æqualem

tGT,

$\frac{tGT}{\text{N}}$, vel quod perinde est, cape Rr æqualem $\frac{GTIE}{\text{N}}$; & projectile tempore $DRTG$ perveniet ad punctum r, describens curvam lineam $DraF$, quam punctum r semper tangit, perveniens autem ad maximam altitudinem a in perpendiculo AB, & postea semper appropinquans ad asymptoton PC. Estque velocitas ejus in puncto quovis r ut curvæ tangens rL. *Q. E. I.*

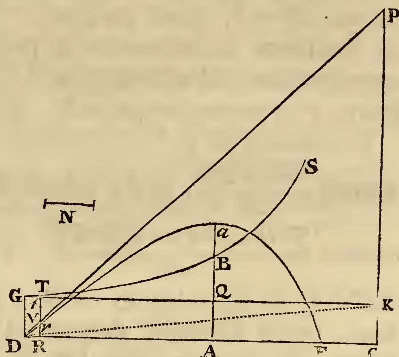
Est enim N ad QB ut DC ad CP seu DR ad RV, ideoque RV æqualis $\frac{DR \times QB}{\text{N}}$, & Rr (id est $RV - Vr$ seu $\frac{DR \times QB - tGT}{\text{N}}$) æqualis $\frac{DR \times AB - RDGT}{\text{N}}$. Exponatur jam tempus per aream $RDGT$, & (per legum corol. 2.) distinguatur motus corporis in duos, unum ascensus, alterum ad latus. Et cum resistentia sit ut motus, distinguetur etiam hæc in partes duas partibus motus proportionales & contrarias: ideoque longitudo, a motu ad latus descripta, erit (per prop. II. hujus) ut linea DR, altitudo vero (per prop. III. hujus) ut area $DR \times AB - RDGT$, hoc est, ut linea Rr. Ipso autem motus initio area $RDGT$ æqualis est rectangulo $DR \times AQ$, ideoque linea illa Rr (seu $\frac{DR \times AB - DR \times AQ}{\text{N}}$) tunc est ad DR ut $AB - AQ$ seu QB ad N, id est, ut CP ad DC; atque ideo ut motus in altitudinem ad motum in longitudinem sub initio. Cum igitur Rr semper sit ut altitudo, ac DR semper ut longitudo, atque Rr ad DR sub initio ut altitudo ad longitudinem: necesse est ut Rr semper sit ad DR ut altitudo ad longitudinem, & propterea ut corpus moveatur in linea $DraF$, quam punctum r perpetuo tangit. *Q. E. D.*

Corol. 1. Est igitur Rr æqualis $\frac{DR \times AB}{\text{N}} - \frac{RDGT}{\text{N}}$: ideoque si producatur RT ad X ut sit RX æqualis $\frac{DR \times AB}{\text{N}}$; id est, si compleatur parallelogrammum $ACPY$, jungatur DY secans CP in Z, & producatur RT donec occurrat DY in X; erit Xr æqualis $\frac{RDGT}{\text{N}}$, & propterea tempori proportionalis.

Corol. 2. Unde si capiantur innumeræ CR, vel, quod perinde est, innumeræ ZX in progressione geometrica; erunt totidem Xr in progres-

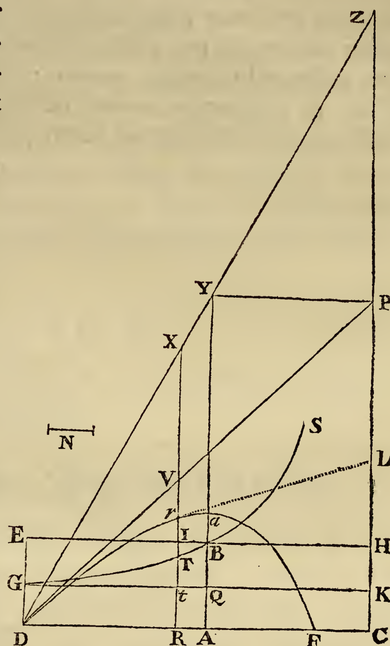
progreſſione arithmetica. Et hinc curva *DraF* per tabulam logarithmorum facile delineatur.

Corol. 3. Si vertice *D*, diametro *DG* deorſum producta, & latere recto quod ſit ad $2DP$ ut reſiſtentia tota ipſo motus initio ad vim gravitatis, parabola conſtruatur: velocitas quacum corpus exire debet de loco *D* ſecundum rectam *DP*, ut in medio uniformi reſiſtente deſcribat curvam *DraF*, ea ipſa erit quacum exire debet de eodem loco *D*, ſecundum eandem rectam *DP*, ut in ſpatio non reſiſtente deſcribat parabolam. Nam latus rectum parabolæ hujus, ipſo motus initio, eſt $\frac{DV\ quad.}{Vr}$; & Vr eſt $\frac{tGT}{N}$ ſeu $\frac{DR \times Tt}{2N}$. Recta autem quæ, ſi duceretur, hyperbolam *GTS* tangeret in *G*, parallela eſt ipſi *DK*, ideoque Tt eſt $\frac{CK \times DR}{DC}$, & N erat $\frac{QB \times DC}{CP}$. Et propterea Vr eſt $\frac{DRq \times CK \times CP}{2DCq \times QB}$, id eſt (ob proportionales *DR* & *DC*, *DV* & *DP*) $\frac{DVq \times CK \times CP}{2DPq \times QB}$, & latus rectum $\frac{DV\ quad.}{Vr}$ prodit $\frac{2DPq \times QB}{CK \times CP}$, id eſt (ob proportionales *QB* & *CK*, *DA* & *AC*) $\frac{2DPq \times DA}{AC \times CP}$, ideoque ad $2DP$, ut $DP \times DA$ ad $CP \times AC$; hoc eſt, ut reſiſtentia ad gravitatem. *Q. E. D.*



Corol. 4. Unde ſi corpus de loco quovis *D*, data cum velocitate, ſecundum rectam quamvis poſitione datam *DP* projiciatur; & reſiſtentia medii ipſo motus initio detur: inveniri poteſt curva *DraF*, quam corpus idem deſcribet. Nam ex data velocitate datur latus rectum parabolæ, ut notum eſt. Et ſumendo $2DP$ ad latus illud rectum, ut eſt vis gravitatis ad vim reſiſtentiæ, datur *DP*. Dein ſecando

secando *DC* in *A*, ut sit $CP \times AC$ ad $DP \times DA$ in eadem illa ratione gravitatis ad resistentiam, dabitur punctum *A*. Et inde datur curva *DraF*.



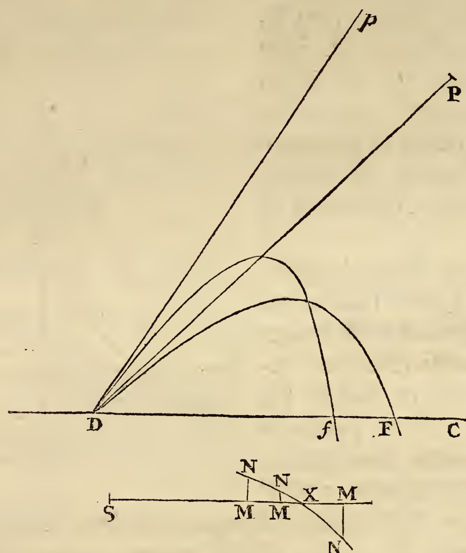
Corol. 5. Et contra, si datur curva *DraF*, dabitur & velocitas corporis & resistentia medii in locis singulis *r*. Nam ex data ratione $CP \times AC$ ad $DP \times DA$, datur tum resistentia medii sub initio motus, tum latus rectum parabolæ: & inde datur etiam velocitas sub initio motus. Deinde ex longitudine tangentis *rL*, datur & huic proportionalis velocitas, & velocitati proportionalis resistentia in loco quovis *r*.

Corol. 6. Cum autem longitudo $2DP$ sit ad latus rectum parabolæ ut gravitas ad resistentiam in *D*; & ex aucta velocitate augeatur resistentia in eadem ratione, at latus rectum parabolæ augeatur in ratione illa duplicata: patet longitudinem $2DP$ augeri in ratione illa simplici, ideoque velocitati semper proportionalem esse, neque ex angulo *CDP* mutato augeri vel minui, nisi mutetur quoque velocitas.

Corol. 7. Unde liquet methodus determinandi curvam *DraF* ex phænomenis quamproxime, & inde colligendi resistentiam & velocitatem quacum corpus projicitur. Projiciantur corpora duo similia & æqualia eadem cum velocitate, de loco *D*, secundum angulos diversos *CDP*, *CDp* & cognoscantur loca *F*, *f*, ubi incidunt in horizontale planum *DC*. Tum, assumpta quacunque longitudine pro *DP* vel *Dp*, fingatur quod resistentia in *D* sit ad gravitatem in ratione qualibet, & exponatur ratio illa per longitudinem quamvis *SM*.

Deinde

Deinde per computationem, ex longitudine illa aſſumpta $\mathcal{DP}$, inveniantur longitudines $\mathcal{D}F$, $\mathcal{D}f$, ac de ratione $\frac{Ff}{\mathcal{D}F}$ per calculum inventa, auferatur ratio eadem per experimentum inventa, & exponatur differentia per perpendiculum MN. Idem fac iterum ac tertio, aſſumendo ſemper novam reſiſtentiæ ad gravitatem rationem SM, & colligendo novam differentiam MN. Ducantur autem differentiæ affirmativæ ad unam partem rectæ SM, & negativæ ad



alteram; & per puncta N, N, N agatur curva regularis NNN ſecans rectam $SMMM$ in X, & erit SX vera ratio reſiſtentiæ ad gravitatem, quam invenire oportuit. Ex hac ratione colligenda eſt longitudo $\mathcal{D}F$ per calculum; & longitudo, quæ ſit ad aſſumptam longitudinem $\mathcal{DP}$, ut longitudo $\mathcal{D}F$ per experimentum cognita ad longitudinem $\mathcal{D}F$ modo inventam, erit vera longitudo $\mathcal{DP}$. Qua inventa, habetur tum curva linea $\mathcal{D}raF$ quam corpus deſcribit, tum corporis velocitas & reſiſtentia in locis ſingulis.

Scholium.

Scholium.

Cæterum, resistentiam corporum esse in ratione velocitatis, hypothesis est magis mathematica quam naturalis. In mediis, quæ rigore omni vacant, resistentiæ corporum sunt in duplicata ratione velocitatum. Etenim actione corporis velocioris communicatur eidem medii quantitati, tempore minore, motus major in ratione majoris velocitatis; ideoque tempore æquali, ob majorem medii quantitatem perturbatam, communicatur motus in duplicata ratione major; estque resistentia (per motus leg. II. & III.) ut motus communicatus. Videamus igitur quales oriantur motus ex hac lege resistentiæ.

SECTIO II.

De motu corporum quibus resistitur in duplicata ratione velocitatum.

PROPOSITIO V. THEOREMA III.

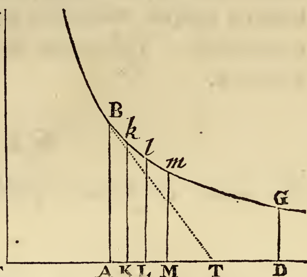
Si corpori resistitur in velocitatis ratione duplicata, & idem sola vi insita per medium similare movetur; tempora vero sumantur in progressione geometrica a minoribus terminis ad majores pergente: dico quod velocitates initio singulorum temporum sunt in eadem progressione geometrica inverse; & quod spatia sunt æqualia, quæ singulis temporibus describuntur.

Nam quoniam quadrato velocitatis proportionalis est resistentia medii, & resistentiæ proportionale est decrementum velocitatis; si tempus in particulas innumeras æquales dividatur, quadrata velocitatum singulis temporum initiis erunt velocitatum earundem differentiis proportionalia. Sunto temporis particulæ illæ AK, KL, LM, &c. in recta CD sumptæ, & erigantur perpendicula AB,

Kk,

De Motu Corporum

Kk, Ll, Mm, &c. hyperbolæ $BklmG$, centro C asymptotis rectangulis CD, CH descriptæ, occurrentia in B, k, l, m, &c. & erit AB ad Kk ut CK ad CA, & divisim $AB-Kk$ ad Kk ut AK ad CA, & vicissim $AB-Kk$ ad AK ut Kk ad CA, ideoque ut $AB \times Kk$ ad $AB \times CA$. Unde, cum AK & $AB \times CA$ dentur, erit $AB - Kk$ ut $AB \times Kk$; & ultimo, ubi coeunt AB & Kk, ut ABq. Et simili argumento erunt $Kk-Ll$, $Ll-Mm$, &c. ut $Kk\,quad.$ $Ll\,quad.$ &c. Linearum igitur AB, Kk, Ll, Mm quadrata sunt ut earundem differentiæ; & idcirco cum quadrata velocitatum fuerint etiam ut ipsarum differentiæ, similis erit ambarum progressio. Quo demonstrato, consequens est etiam ut areæ his lineis descriptæ sint in progressione consimili cum spatiis quæ velocitatibus describuntur. Ergo si velocitas initio primi temporis AK exponatur per lineam AB, & velocitas initio secundi KL per lineam Kk, & longitudo primo tempore descripta per aream $AKkB$; velocitates omnes subsequentes exponentur per lineas subsequentes Ll, Mm, &c. & longitudines descriptæ per areas Kl, Lm, &c. Et composite, si tempus totum exponatur per summam partium suarum AM, longitudo tota descripta exponetur per summam partium suarum $AMmB$. Concipe jam tempus AM ita dividi in partes AK, KL, LM, &c. ut sint CA, CK, CL, CM, &c. in progressione geometrica; & erunt partes illæ in eadem progressione, & velocitates AB, Kk, Ll, Mm, &c. in progressione eadem inversa, atque spatia descripta Ak, Kl, Lm, &c. æqualia. *Q. E. D.*



Corol. 1. Patet ergo quod, si tempus exponatur per asymptoti partem quamvis AD, & velocitas in principio temporis per ordinatim applicatam AB; velocitas in fine temporis exponetur per ordinatam DG, & spatium totum descriptum per aream hyperbolicam adjacentem $ABGD$; necnon spatium, quod corpus aliquod eodem tempore AD, velocitate prima AB, in medio non resistente describere posset, per rectangulum $AB \times AD$.

Corol. 2. Unde datur spatium in medio resistente descriptum, capiendo illud ad spatium quod velocitate uniformi AB in medio non

non resistente simul describi posset, ut est area hyperbolica *ABGD* ad rectangulum $AB \times AD$.

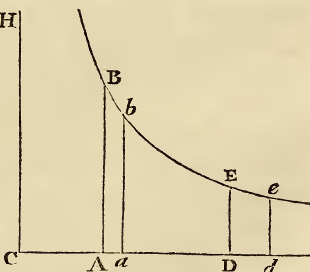
Corol. 3. Datur etiam resistentia medii, statuendo eam ipso motus initio æqualem esse vi uniformi centripetæ, quæ in cadente corpore, tempore *AC*, in medio non resistente, generare posset velocitatem *AB*. Nam si ducatur *BT* quæ tangat hyperbolam in *B*, & occurrat asymptoto in *T*; recta *AT* æqualis erit ipsi *AC*, & tempus exponet, quo resistentia prima uniformiter continuata tollere posset velocitatem totam *AB*.

Corol. 4. Et inde datur etiam proportio hujus resistentiæ ad vim gravitatis, aliamve quamvis datam vim centripetam.

Corol. 5. Et vice versa, si datur proportio resistentiæ ad datam quamvis vim centripetam; datur tempus *AC*, quo vis centripeta resistentiæ æqualis generare possit velocitatem quamvis *AB*: & inde datur punctum *B* per quod hyperbola, asymptotis *CH*, *CD*, describi debet; ut & spatium *ABGD*, quod corpus incipiendo motum suum cum velocitate illa *AB*, tempore quovis *AD*, in medio similari resistente describere potest.

PROPOSITIO VI. THEOREMA IV.

Corpora sphærica homogenea & æqualia, resistentiis in duplicata ratione velocitatum impedita, & solis viribus insitis incitata, temporibus, quæ sunt reciproce ut velocitates sub initio, describunt semper æqualia spatia, & amittunt partes velocitatum proportionales totis.



Asymptotis rectangulis *CD*, *CH* descripta hyperbola quavis *BbEe* secante perpendicula *AB*, *ab*, *DE*, *de*, in *B*, *b*, *E*, *e*, exponantur velocitates initiales per perpendicula *AB*, *DE*, & tempora per lineas *Aa*, *Dd*. Est ergo ut *Aa* ad *Dd* ita (per hypothesin) *DE* ad *AB*, & ita (ex natura hyperbolæ) *CA* ad *CD*; & componendo, ita *Ca* ad *Cd*. Ergo areæ *ABba*, *DEed*, hoc est, spatia descripta æquantur

tur inter se, & velocitates primæ *AB*, *DE* sunt ultimis *ab*, *de*, & propterea dividendo partibus etiam suis amissis *AB—ab*, *DE—de* proportionales. *Q. E. D.*

PROPOSITIO VII. THEOREMA V.

Corpora sphærica quibus resistitur in duplicata ratione velocitatum, temporibus, quæ sunt ut motus primi directe & resistentiæ primæ inverse, amittent partes motuum proportionales totis, & spatia describent temporibus istis & velocitatibus primis conjunctim proportionalia.

Namque motuum partes amissæ sunt ut resistentiæ & tempora conjunctim. Igitur ut partes illæ sint totis proportionales, debebit resistentia & tempus conjunctim esse ut motus. Proinde tempus erit ut motus directe & resistentia inverse. Quare temporum particulis in ea ratione sumptis, corpora amittent semper particulas motuum proportionales totis, ideoque retinebunt velocitates velocitatibus suis primis semper proportionales. Et ob datam velocitatum rationem, describent semper spatia, quæ sunt ut velocitates primæ & tempora conjunctim. *Q. E. D.*

Corol. 1. Igitur si æquivelocibus corporibus resistitur in duplicata ratione diametrorum: globi homogenei quibuscunque cum velocitatibus moti, describendo spatia diametris suis proportionalia, amittent partes motuum proportionales totis. Motus enim globi cujusque erit ut ejus velocitas & massa conjunctim, id est, ut velocitas & cubus diametri; resistentia (per hypothesin) erit ut quadratum diametri & quadratum velocitatis conjunctim; & tempus (per hanc propositionem) est in ratione priore directe & ratione posteriore inverse, id est, ut diameter directe & velocitas inverse; ideoque spatium, tempori & velocitati proportionale, est ut diameter.

Corol. 2. Si æquivelocibus corporibus resistitur in ratione sesquiplicata diametrorum: globi homogenei quibuscunque cum velocitatibus moti, describendo spatia in sesquiplicata ratione diametrorum, amittent partes motuum proportionales totis.

Corol. 3. Et universaliter, si æquivelocibus corporibus resistitur in ratione dignitatis cujuscunque diametrorum: spatia quibus globi homogenei, quibuscunque cum velocitatibus moti, amittent partes

motuum

motuum proportionales totis, erunt ut cubi diametrorum ad dignitatem illam applicati. Sunto diametri D & E; & si resistentiæ, ubi velocitates æquales ponuntur, sint ut D^n & E^n: spatia quibus globi, quibuscunque cum velocitatibus moti, amittent partes motuum proportionales totis, erunt ut D^{3-n} & E^{3-n}. Et propterea globi homogenei describendo spatia ipsis D^{3-n} & E^{3-n} proportionalia, retinebunt velocitates in eadem ratione ad invicem ac sub initio.

Corol. 4. Quod si globi non sint homogenei, spatium a globo densiore descriptum augeri debet in ratione densitatis. Motus enim, sub pari velocitate, major est in ratione densitatis, & tempus (per hanc propositionem) augetur in ratione motus directe, ac spatium descriptum in ratione temporis.

Corol. 5. Et si globi moveantur in mediis diversis; spatium in medio, quod cæteris paribus magis resistit, diminuendum erit in ratione majoris resistentiæ. Tempus enim (per hanc propositionem) diminuetur in ratione resistentiæ auctæ, & spatium in ratione temporis.

LEMMA II.

Momentum genitæ æquatur momentis laterum singulorum generantium in eorundem laterum indices dignitatum & coefficientia continue ductis.

Genitam voco quantitatem omnem, quæ ex lateribus vel terminis quibuscunque in arithmetica per multiplicationem, divisionem, & extractionem radicum; in geometria per inventionem vel contentorum & laterum, vel extremarum & mediarum proportionalium, sine additione & subductione generatur. Ejusmodi quantitates sunt facti, quoti, radices, rectangula, quadrata, cubi, latera quadrata, latera cubica, & similes. Has quantitates, ut indeterminatas & instabiles, & quasi motu fluxuve perpetuo crescentes vel decrescentes, hic considero; & earum incrementa vel decrementa momentanea sub nomine momentorum intelligo: ita ut incrementa pro momentis addititiis seu affirmativis, ac decrementa pro subductitiis seu negativis habeantur. Cave tamen intellexeris particulas finitas. Particulæ finitæ non sunt momenta, sed quantitates ipsæ ex momentis genitæ. Intelligenda sunt principia jamjam nascentia finitarum

rum magnitudinum. Neque enim ſpectatur in hoc lemmate magnitudo momentorum, ſed prima naſcentium proportio. Eodem recidit ſi loco momentorum uſurpentur vel velocitates incrementorum ac decrementorum (quas etiam motus, mutationes & fluxiones quantitatum nominare licet) vel finitæ quævis quantitates velocitatibus hiſce proportionales. Lateris autem cujuſque generantis coefficiens eſt quantitas, quæ oritur applicando genitam ad hoc latus.

Igitur ſenſus lemmatis eſt, ut, ſi quantitatum quarumcunque perpetuo motu creſcentium vel decreſcentium A, B, C, &c. momenta, vel his proportionales mutationum velocitates dicantur a, b, c, &c. momentum vel mutatio geniti rectanguli AB fuerit $aB + bA$, & geniti contenti ABC momentum fuerit $aBC + bAC + cAB$: & genitarum dignitatum A^2, A^3, A^4, $A^{\frac{1}{2}}$, $A^{\frac{3}{2}}$, $A^{\frac{1}{3}}$, $A^{\frac{2}{3}}$, A^{-1}, A^{-2}, & $A^{-\frac{1}{2}}$ momenta $2aA$, $3aA^2$, $4aA^3$, $\frac{1}{2}aA^{-\frac{1}{2}}$, $\frac{3}{2}aA^{\frac{1}{2}}$, $\frac{1}{3}aA^{-\frac{2}{3}}$, $\frac{2}{3}aA^{-\frac{1}{3}}$, $-aA^{-2}$, $-2aA^{-3}$, & $-\frac{1}{2}aA^{-\frac{3}{2}}$ reſpective. Et generaliter, ut dignitatis cujuſcunque $A^{\frac{n}{m}}$ momentum fuerit $\frac{n}{m}aA^{\frac{n-m}{m}}$. Item ut genitæ A^2B momentum fuerit $2aAB + bA^2$; & genitæ $A^3B^4C^2$ momentum $3aA^2B^4C^2 + 4bA^3B^3C^2 + 2cA^3B^4C$; & genitæ $\frac{A^3}{B^2}$ ſive A^3B^{-2} momentum $3aA^2B^{-2} - 2bA^3B^{-3}$: & ſic in cæteris. Demonſtratur vero lemma in hunc modum.

Caſ. 1. Rectangulum quodvis motu perpetuo auctum AB, ubi de lateribus A & B deerant momentorum dimidia $\frac{1}{2}a$ & $\frac{1}{2}b$, fuit $A - \frac{1}{2}a$ in $B - \frac{1}{2}b$, ſeu $AB - \frac{1}{2}aB - \frac{1}{2}bA + \frac{1}{4}ab$; & quam primum latera A & B alteris momentorum dimidiis aucta ſunt, evadit $A + \frac{1}{2}a$ in $B + \frac{1}{2}b$ ſeu $AB + \frac{1}{2}aB + \frac{1}{2}bA + \frac{1}{4}ab$. De hoc rectangulo ſubducatur rectangulum prius, & manebit exceſſus $aB + bA$. Igitur laterum incrementis totis a & b generatur rectanguli incrementum $aB + bA$. *Q. E. D.*

Caſ. 2. Ponatur AB ſemper æquale G, & contenti ABC ſeu GC momentum (per caſ. 1.) erit $gC + cG$, id eſt (ſi pro G & g ſcribantur AB & $aB + bA$) $aBC + bAC + cAB$. Et par eſt ratio contenti ſub lateribus quotcunque. *Q. E. D.*

Caſ.

Cas. 3. Ponantur latera A, B, C sibi mutuo semper æqualia; & ipsius A^2, id est rectanguli A B, momentum $aB + bA$ erit $2aA$, ipsius autem A^3, id est contenti A B C, momentum $aBC + bAC + cAB$ erit $3aA^2$. Et eodem argumento momentum dignitatis cujuscunque A^n est naA^{n-1}. *Q. E. D.*

Cas. 4. Unde cum $\frac{1}{A}$ in A sit 1, momentum ipsius $\frac{1}{A}$ ductum in A, una cum $\frac{1}{A}$ ducto in a erit momentum ipsius 1, id est, nihil. Proinde momentum ipsius $\frac{1}{A}$ seu ipsius A^{-1} est $\frac{-a}{A^2}$. Et generaliter cum $\frac{1}{A^n}$ in A^n sit 1, momentum ipsius $\frac{1}{A^n}$ ductum in A^n una cum $\frac{1}{A^n}$ in naA^{n-1} erit nihil. Et propterea momentum ipsius $\frac{1}{A^n}$ seu A^{-n} erit $-\frac{na}{A^{n+1}}$. *Q. E. D.*

Cas. 5. Et cum $A^{\frac{1}{2}}$ in $A^{\frac{1}{2}}$ sit A, momentum ipsius $A^{\frac{1}{2}}$ ductum in $2A^{\frac{1}{2}}$ erit a, per cas. 3: ideoque momentum ipsius $A^{\frac{1}{2}}$ erit $\frac{a}{2A^{\frac{1}{2}}}$ sive $\frac{1}{2}aA^{-\frac{1}{2}}$. Et generaliter si ponatur $A^{\frac{m}{n}}$ æquale B, erit A^m æquale B^n, ideoque maA^{m-1} æquale nbB^{n-1}, & maA^{-1} æquale nbB^{-1} seu $nbA^{-\frac{m}{n}}$, ideoque $\frac{m}{n}aA^{\frac{m-n}{n}}$ æquale b, id est, æquale momento ipsius $A^{\frac{m}{n}}$. *Q. E. D.*

Cas. 6. Igitur genitæ cujuscunque $A^m B^n$ momentum est momentum ipsius A^m ductum in B^n, una cum momento ipsius B^n ducto in A^m, id est $maA^{m-1}B^n + nbB^{n-1}A^m$; idque sive dignitatum indices m & n sint integri numeri vel fracti, sive affirmativi vel negativi. Et par est ratio contenti sub pluribus dignitatibus. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc in continue proportionalibus, si terminus unus datur, momenta terminorum reliquorum erunt ut iidem termini multipli-

cati

cati per numerum intervallorum inter ipsos & terminum datum. Sunto A, B, C, D, E, F continue proportionales; & si detur terminus C, momenta reliquorum terminorum erunt inter se ut — 2 A — B, D, 2 E, 3 F.

Corol. 2. Et si in quatuor proportionalibus duæ mediæ dentur, momenta extremarum erunt ut eædem extremæ. Idem intelligendum est de lateribus rectanguli cujuscunque dati.

Corol. 3. Et si summa vel differentia duorum quadratorum detur, momenta laterum erunt reciproce ut latera.

Scholium.

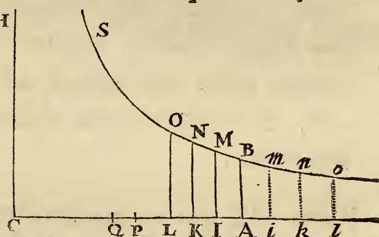
In epistola quadam ad D. *J. Collinium* nostratem 10 Decem. 1672 data, cum descripsissem methodum tangentium quam suspicabar eandem esse cum methodo *Slusii* tum nondum communicata; subjunxi: *Hoc est unum particulare vel corollarium potius methodi generalis, quæ extendit se citra molestum ullum calculum, non modo ad ducendum tangentes ad quasvis curvas sive geometricas sive mechanicas vel quomodocunque rectas lineas aliasve curvas respicientes, verum etiam ad resolvendum alia abstrusiora problematum genera de curvitatibus, areis, longitudinibus, centris gravitatis curvarum &c. neque (quemadmodum* Huddenii *methodus de maximis & minimis) ad solas restringitur æquationes illas quæ quantitatibus surdis sunt immunes. Hanc methodum intertexui alteri isti qua æquationum exegesin instituo reducendo eas ad series infinitas.* Hactenus epistola. Et hæc ultima verba spectant ad tractatum quem anno 1671 de his rebus scripseram. Methodi vero hujus generalis fundamentum continetur in lemmate præcedente.

PROPOSITIO VIII. THEOREMA VI.

Si corpus in medio uniformi, gravitate uniformiter agente, recta ascendat vel descendat, & spatium totum descriptum distinguatur in partes æquales, inque principiis singularum partium (addendo resistentiam medii ad vim gravitatis, quando corpus ascendit, vel subducendo ipsam quando corpus

pus descendit) investigentur vires absolutæ; dico quod vires illæ absolutæ sunt in progressione geometrica.

Exponatur enim vis gravitatis per datam lineam *AC*; resistentia per lineam indefinitam *AK*; vis absoluta in descensu corporis per differentiam *KC*; velocitas corporis per lineam *AP*, quæ sit media proportionalis inter *AK* & *AC*, ideoque in subduplicata ratione resistentiæ; incrementum resistentiæ data temporis particula factum per lineolam *KL*, & contemporaneum velocitatis incrementum per lineolam *PQ*; & centro *C* asymptotis rectangulis *CA*, *CH* describatur hyperbola quævis *BNS*, erectis perpendiculis *AB*, *KN*, *LO* occurrens in *B*, *N*, *O*. Quoniam *AK* est ut *APq*, erit hujus momentum *KL* ut illius momentum 2*APQ*: id est, ut *AP* in *KC*; nam velocitatis incrementum *PQ* (per motus leg. II.) proportionale est vi generanti *KC*. Componatur ratio ipsius *KL* cum ratione ipsius *KN*, & fiet rectangulum *KL*×*KN* ut *AP*×*KC*×*KN*; hoc est, ob datum rectangulum *KC*×*KN*, ut *AP*.



Atqui areæ hyperbolicæ *KNOL* ad rectangulum *KL*×*KN* ratio ultima, ubi coeunt puncta *K* & *L*, est æqualitatis. Ergo area illa hyperbolica evanescens est ut *AP*. Componitur igitur area tota hyperbolica *ABOL* ex particulis *KNOL* velocitati *AP* semper proportionalibus, & propterea spatio velocitate illa descripto proportionalis est. Dividatur jam area illa in partes æquales *ABMI*, *IMNK*, *KNOL*, &c. & vires absolutæ *AC*, *IC*, *KC*, *LC*, &c. erunt in progressione geometrica. *Q. E. D.* Et simili argumento, in ascensu corporis, sumendo, ad contrariam partem puncti *A*, æquales areas *ABmi*, *imnk*, *knol*, &c. constabit quod vires absolutæ *AC*, *iC*, *kC*, *lC*, &c. sunt continue proportionales. Ideoque si spatia omnia in ascensu & descensu capiantur æqualia; omnes vires absolutæ *lC*, *kC*, *iC*, *AC*, *IC*, *KC*, *LC*, &c. erunt continue proportionales. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc si spatium descriptum exponatur per aream hyperbolicam *ABNK*; exponi possunt vis gravitatis, velocitas corporis & re-

& resistentia medii per lineas AC, AP & AK respective; & vice versa.

Corol. 2. Et velocitatis maximæ, quam corpus in infinitum descendendo potest unquam acquirere, exponens est linea AC.

Corol. 3. Igitur si in data aliqua velocitate cognoscatur resistentia medii, invenietur velocitas maxima, sumendo ipsam ad velocitatem illam datam in subduplicata ratione, quam habet vis gravitatis ad medii resistentiam illam cognitam.

PROPOSITIO IX. THEOREMA VII.

Positis jam demonstratis, dico quod, si tangentes angulorum sectoris circularis & sectoris hyperbolici sumantur velocitatibus proportionales, existente radio justæ magnitudinis: erit tempus omne ascendendi ad locum summum ut sector circuli, & tempus omne descendendi a loco summo ut sector hyperbolæ.

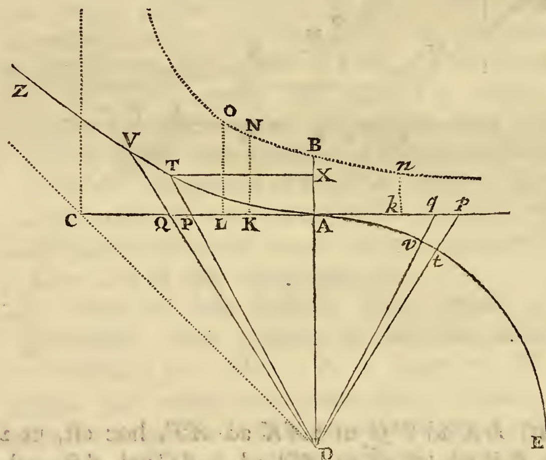
Rectæ AC, qua vis gravitatis exponitur, perpendicularis & æqualis ducatur AD. Centro D semidiametro AD describatur tum circuli quadrans AtE; tum hyperbola rectangula AVZ axem habens AX, verticem principalem A, & asymptoton DC. Ducantur Dp, DP, & erit sector circularis AtD ut tempus omne ascendendi ad locum summum; & sector hyperbolicus ATD ut tempus omne descendendi a loco summo: Si modo sectorum tangentes Ap, AP sint ut velocitates.

Cas. 1. Agatur enim Dvq abscindens sectoris ADt & trianguli ADp momenta, seu particulas quam minimas simul descriptas tDv & qDp. Cum particulæ illæ, ob angulum communem D, sunt in duplicata ratione laterum, erit particula tDv ut $\frac{qDp \times tD \; quad.}{pD \; quad.}$, id est, ob datam tD, ut $\frac{qDp}{pD quad.}$. Sed $pD \; quad.$ est $AD \; quad. +$ $Ap \; quad.$ id est, $AD \; quad. + AD \times Ak$, seu $AD \times Ck$; & qDp est $\frac{1}{2} AD \times pq$. Ergo sectoris particula tDv est ut $\frac{pq}{Ck}$; id est,

ut

ut velocitatis decrementum quam minimum pq directe, & vis illa Ck quæ velocitatem diminuit inverſe; atque ideo ut particula temporis decremento velocitatis reſpondens. Et componendo fit ſumma particularum omnium tDv in ſectore ADt, ut ſumma particularum temporis ſingulis velocitatis decreſcentis Ap particulis amiſſis pq reſpondentium, uſque dum velocitas illa in nihilum diminuta evanuerit; hoc eſt, ſector totus ADt eſt ut tempus totum aſcendendi ad locum ſummum. *Q. E. D.*

Caſ. 2. Agatur DQV abſcindens tum ſectoris DAV, tum trianguli DAQ particulas quam minimas TDV & PDQ; & erunt hæ particulæ ad invicem ut DTq ad DPq, id eſt (ſi TX & AP parallelæ ſint) ut DXq ad DAq vel TXq ad APq, & diviſim ut $DXq - TXq$ ad $DAq - APq$. Sed ex natura hyperbolæ DXq

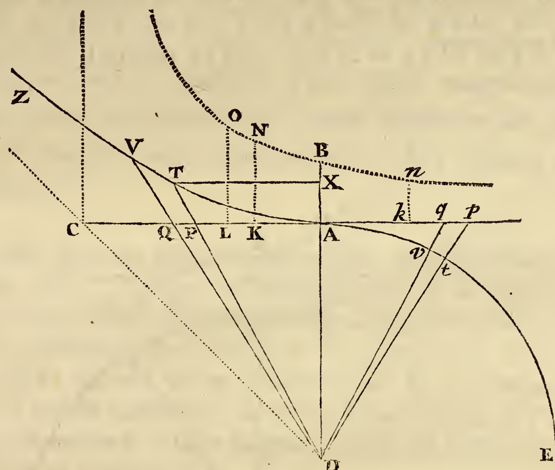


$-TXq$ eſt ADq, & per hypotheſin APq eſt $AD \times AK$. Ergo particulæ ſunt ad invicem ut ADq ad $ADq - AD \times AK$; id eſt, ut AD ad $AD - AK$ ſeu AC ad CK: ideoque ſectoris particula TDV eſt $\frac{PDQ \times AC}{CK}$; atque ideo ob datas AC & AD, ut $\frac{PQ}{CK}$, id eſt, ut incrementum velocitatis directe, utque vis generans incrementum inverſe; atque ideo ut particula temporis incremen-

 to

to reſpondens. Et componendo fit ſumma particularum temporis, quibus omnes velocitatis *AP* particulæ *PQ* generantur, ut ſumma particularum ſectoris *ATD*, id eſt, tempus totum ut ſector totus. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc ſi *AB* æquetur quartæ parti ipſius *AC*, ſpatium quod corpus tempore quovis cadendo deſcribit, erit ad ſpatium, quod corpus velocitate maxima *AC*, eodem tempore uniformiter progrediendo deſcribere poteſt, ut area *ABNK*, qua ſpatium cadendo deſcriptum exponitur, ad aream *ATD*, qua tempus exponitur. Nam cum ſit *AC* ad *AP* ut *AP* ad *AK*, erit (per corol. 1.



lem. 11. hujus) *LK* ad *PQ* ut 2*AK* ad *AP*, hoc eſt, ut 2*AP* ad *AC*, & inde *LK* ad $\frac{1}{2}$*PQ* ut *AP* ad $\frac{1}{4}$*AC* vel *AB*; eſt & *KN* ad *AC* vel *AD* ut *AB* ad *CK*; itaque ex æquo *LKNO* ad *DPQ* ut *AP* ad *CK*. Sed erat *DPQ* ad *DTV* ut *CK* ad *AC*. Ergo rurſus ex æquo *LKNO* eſt ad *DTV* ut *AP* ad *AC*; hoc eſt, ut velocitas corporis cadentis ad velocitatem maximam quam corpus cadendo poteſt acquirere. Cum igitur arearum *ABNK* & *ATD* momenta *LKNO* & *DTV* ſunt ut velocitates, erunt arearum illarum partes omnes ſimul genitæ ut ſpatia ſimul deſcripta, ideoque

areæ

areæ totæ ab initio genitæ *ABNK* & *ATD* ut ſpatia tota ab initio deſcenſus deſcripta. *Q. E. D.*

Corol. 2. Idem conſequitur etiam de ſpatio quod in aſcenſu deſcribitur. Nimirum quod ſpatium illud omne ſit ad ſpatium, uniformi cum velocitate *AC* eodem tempore deſcriptum, ut eſt area *ABnk* ad ſectorem *ADt*.

Corol. 3. Velocitas corporis tempore *ATD* cadentis eſt ad velocitatem, quam eodem tempore in ſpatio non reſiſtente acquireret, ut triangulum *APD* ad ſectorem hyperbolicum *ATD*. Nam velocitas in medio non reſiſtente foret ut tempus *ATD*, & in medio reſiſtente eſt ut *AP*, id eſt, ut triangulum *APD*. Et velocitates illæ initio deſcenſus æquantur inter ſe, perinde ut areæ illæ *ATD*, *APD*.

Corol. 4. Eodem argumento velocitas in aſcenſu eſt ad velocitatem, qua corpus eodem tempore in ſpatio non reſiſtente omnem ſuum aſcendendi motum amittere poſſet, ut triangulum *ApD* ad ſectorem circularem *AtD*; ſive ut recta *Ap* ad arcum *At*.

Corol. 5. Eſt igitur tempus, quo corpus in medio reſiſtente cadendo velocitatem *AP* acquirit, ad tempus, quo velocitatem maximam *AC* in ſpatio non reſiſtente cadendo acquirere poſſet, ut ſector *ADT* ad triangulum *ADC*: & tempus, quo velocitatem *Ap* in medio reſiſtente aſcendendo poſſit amittere, ad tempus quo velocitatem eandem in ſpatio non reſiſtente aſcendendo poſſet amittere, ut arcus *At* ad ejus tangentem *Ap*.

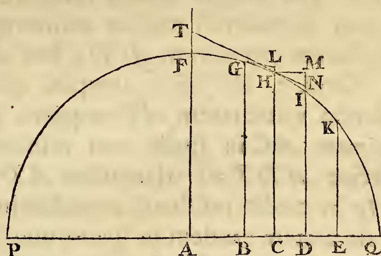
Corol. 6. Hinc ex dato tempore datur ſpatium aſcenſu vel deſcenſu deſcriptum. Nam corporis in infinitum deſcendentis datur velocitas maxima (per corol. 2. & 3. theor. VI. lib. II.) indeque datur tempus quo corpus velocitatem illam in ſpatio non reſiſtente cadendo poſſet acquirere. Et ſumendo ſectorem *ADT* vel *ADt* ad triangulum *ADC* in ratione temporis dati ad tempus modo inventum; dabitur tum velocitas *AP* vel *Ap*, tum area *ABNK* vel *ABnk*, quæ eſt ad ſectorem *ADT* vel *ADt* ut ſpatium quæſitum ad ſpatium, quod tempore dato, cum velocitate illa maxima jam ante inventa, uniformiter deſcribi poteſt.

Corol. 7. Et regrediendo, ex dato aſcenſus vel deſcenſus ſpatio *ABnk* vel *ABNK*, dabitur tempus *ADt* vel *ADT*.

PROPOSITIO X. PROBLEMA III.

Tendat uniformis vis gravitatis directe ad planum horizontis, sitque resistentia ut medii densitas & quadratum velocitatis conjunctim: requiritur tum medii densitas in locis singulis, quæ faciat ut corpus in data quavis linea curva moveatur; tum corporis velocitas & medii resistentia in locis singulis.

Sit *PQ* planum illud plano schematis perpendiculare; *PFHQ* linea curva plano huic occurrens in punctis *P* & *Q*; *G, H, I, K* loca quatuor corporis in hac curva ab *F* ad *Q* pergentis; & *GB, HC, ID, KE* ordinatæ quatuor parallelæ ab his punctis ad horizontem demissæ, & lineæ horizontali *PQ* ad puncta *B, C, D, E* insistentes; & sint *BC, CD, DE* distantiæ ordinatarum inter se æquales. A punctis *G* & *H* ducantur rectæ *GL, HN* curvam tangentes in *G* & *H*, & ordinatis *CH, DI* sursum productis occurrentes in *L* & *N*, & compleatur parallelogrammum *HCDM*. Et tempora, quibus corpus describit arcus *GH, HI*, erunt in subduplicata ratione altitudinum *LH, NI*, quas corpus temporibus illis describere posset, a tangentibus cadendo; & velocitates erunt ut longitudines descriptæ *GH, HI* directe & tempora inverse. Exponantur tempora per T & *t*, & velocitates per $\frac{GH}{T}$ & $\frac{HI}{t}$; & decrementum velocitatis tempore *t* factum exponetur per $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t}$. Hoc decrementum oritur a resistentia corpus retardante, & gravitate corpus accelerante. Gravitas, in corpore cadente & spatium *NI* cadendo describente, generat velocitatem, qua duplum illud spatium eodem tempore describi potuisset, ut *Galilæus* demonstravit; id est, velocitatem $\frac{2NI}{t}$: at in corpore arcum *HI* describente, auget arcum illum



sola

sola longitudine $HI - HN$ seu $\frac{MI \times NI}{HI}$; ideoque generat tantum velocitatem $\frac{2MI \times NI}{t \times HI}$. Addatur hæc velocitas ad decrementum prædictum, & habebitur decrementum velocitatis ex resistentia sola oriundum, nempe $\frac{GH}{\text{T}} - \frac{HI}{t} + \frac{2MI \times NI}{t \times HI}$. Proindeque cum gravitas eodem tempore in corpore cadente generet velocitatem $\frac{2NI}{t}$; resistentia erit ad gravitatem ut $\frac{GH}{\text{T}} - \frac{HI}{t} + \frac{2MI \times NI}{t \times HI}$ ad $\frac{2NI}{t}$, sive ut $\frac{t \times GH}{\text{T}} - HI + \frac{2MI \times NI}{HI}$ ad $2NI$.

Jam pro abscissis CB, CD, CE scribantur $-o$, o, $2o$. Pro ordinata CH scribatur P, & pro MI scribatur series quælibet $\text{Q}o + \text{R}oo + \text{S}o^3 +$ &c. Et seriei termini omnes post primum, nempe $\text{R}oo + \text{S}o^3 +$ &c. erunt NI, & ordinatæ DI, EK, & BG erunt $\text{P} - \text{Q}o - \text{R}oo - \text{S}o^3 -$ &c. $\text{P} - 2\text{Q}o - 4\text{R}oo - 8\text{S}o^3 -$ &c. & $\text{P} + \text{Q}o - \text{R}oo + \text{S}o^3 -$ &c. respective. Et quadrando differentias ordinatarum $BG - CH$ & $CH - DI$, & ad quadrata prodeuntia addendo quadrata ipsarum BC, CD, habebuntur arcuum GH, HI quadrata $oo + \text{QQ}oo - 2\text{QR}o^3 +$ &c. & $oo + \text{QQ}oo + 2\text{QR}o^3 +$ &c. Quorum radices $o\sqrt{1 + \text{QQ}} - \frac{\text{QR}oo}{\sqrt{1+\text{QQ}}}$, & $o\sqrt{1+\text{QQ}} + \frac{\text{QR}oo}{\sqrt{1+\text{QQ}}}$ sunt arcus GH & HI. Præterea si ab ordinata CH subducatur semisumma ordinatarum BG ac DI, & ab ordinata DI subducatur semisumma ordinatarum CH & EK, manebunt arcuum GI & HK sagittæ $\text{R}oo$ & $\text{R}oo + 3\text{S}o^3$. Et hæ sunt lineolis LH & NI proportionales, ideoque in duplicata ratione temporum infinite parvorum T & t: & inde ratio $\frac{t}{\text{T}}$ est $\sqrt{\frac{\text{R} + 3\text{S}o}{\text{R}}}$ seu $\frac{\text{R} + \frac{3}{2}\text{S}o}{\text{R}}$; & $\frac{t \times GH}{\text{T}} - HI + \frac{2MI \times NI}{HI}$, substituendo ipsorum $\frac{t}{\text{T}}$, GH, HI, MI & NI valores jam inventos, evadit $\frac{3\text{S}oo}{2\text{R}}\sqrt{1+\text{QQ}}$. Et cum $2NI$ sit $2\text{R}oo$, resi-

stentia

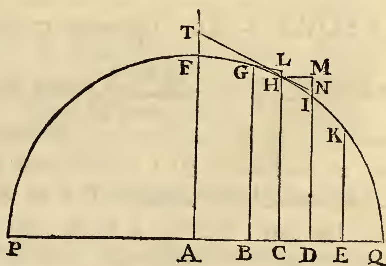
ſtentia jam erit ad gravitatem ut $\frac{3Soo}{2R}\sqrt{1+QQ}$ ad $2Roo$, id eſt, ut $3S\sqrt{1+QQ}$ ad $4RR$.

Velocitas autem ea eſt, quacum corpus de loco quovis *H*, ſecundum tangentem *HN* egrediens, in parabola diametrum *HC* & latus rectum $\frac{HNq}{NI}$ ſeu $\frac{1+QQ}{R}$ habente, deinceps in vacuo moveri poteſt.

Et reſiſtentia eſt ut medii denſitas & quadratum velocitatis conjunctim, & propterea medii denſitas eſt ut reſiſtentia directe & quadratum velocitatis inverſe, id eſt, ut $\frac{3S\sqrt{1+QQ}}{4RR}$ directe & $\frac{1+QQ}{R}$ inverſe, hoc eſt, ut $\frac{S}{R\sqrt{1+QQ}}$. *Q. E. I.*

Corol. 1. Si tangens *HN* producatur utrinque donec occurrat ordinatæ cuilibet *AF* in *T*: erit $\frac{HT}{AC}$ æqualis $\sqrt{1+QQ}$, ideoque in ſuperioribus pro $\sqrt{1+QQ}$ ſcribi poteſt. Qua ratione reſiſtentia erit ad gravitatem ut $3S\times HT$ ad $4RR\times AC$, velocitas erit ut $\frac{HT}{AC\sqrt{R}}$, & medii denſitas erit ut $\frac{S\times AC}{R\times HT}$.

Corol. 2. Et hinc, ſi curva linea *PFHQ* definiatur per relationem inter baſem ſeu abſciſſam *AC* & ordinatim applicatam *CH*, ut moris eſt; & valor ordinatim applicatæ reſolvatur in ſeriem convergentem: Problema per primos ſeriei terminos expedite ſolvetur, ut in exemplis ſequentibus.



Exempl. 1. Sit linea *PFHQ* ſemicirculus ſuper diametro *PQ* deſcriptus, & requiratur medii denſitas quæ faciat ut projectile in hac linea moveatur.

Biſecetur diameter *PQ* in *A*; dic *AQ*, n; *AC*, a; *CH*, e; & *CD*, o: & erit DIq ſeu $AQq - ADq = nn - aa - 2ao - oo$, ſeu

ee

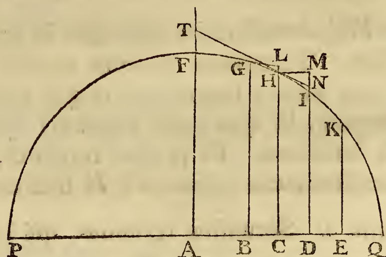
$ee - 2ao - oo$, & radice per methodum noſtram extracta, fiet $DI = e - \frac{ao}{e} - \frac{oo}{2e} - \frac{aaoo}{2e^3} - \frac{ao^3}{2e^3} - \frac{a^3o^3}{2e^5}$ — &c. Hic ſcribatur nn pro $ee + aa$, & evadet $DI = e - \frac{ao}{e} - \frac{nnoo}{2e^3} - \frac{anno^3}{2e^5}$ — &c.

Hujuſmodi ſeries diſtinguo in terminos ſucceſſivos in hunc modum. Terminum primum appello, in quo quantitas infinite parva o non extat; ſecundum, in quo quantitas illa eſt unius dimenſionis; tertium, in quo extat duarum; quartum, in quo trium eſt; & ſic in infinitum. Et primus terminus, qui hic eſt e, denotabit ſemper longitudinem ordinatæ CH inſiſtentis ad initium indefinitæ quantitatis o. Secundus terminus, qui hic eſt $\frac{ao}{e}$, denotabit differentiam inter CH & DN, id eſt, lineolam MN, quæ abſcinditur complendo parallelogrammum $HCDM$, atque ideo poſitionem tangentis HN ſemper determinat; ut in hoc caſu capiendo MN ad HM ut eſt $\frac{ao}{e}$ ad o, ſeu a ad e. Terminus tertius, qui hic eſt $\frac{nnoo}{2e^3}$, deſignabit lineolam IN, quæ jacet inter tangentem & curvam, ideoque determinat angulum contactus IHN ſeu curvaturam quam curva linea habet in H. Si lineola illa IN finitæ eſt magnitudinis, deſignabitur per terminum tertium una cum ſequentibus in infinitum. At ſi lineola illa minuatur in infinitum, termini ſubſequentes evadent infinite minores tertio, ideoque negligi poſſunt. Terminus quartus determinat variationem curvaturæ, quintus variationem variationis, & ſic deinceps. Unde obiter patet uſus non contemnendus harum ſerierum in ſolutione problematum, quæ pendent a tangentibus & curvatura curvarum.

Conferatur jam ſeries $e - \frac{ao}{e} - \frac{nnoo}{2e^3} - \frac{anno^3}{2e^5}$ — &c. cum ſerie $P - Qo - Roo - So^3$ — &c. & perinde pro P, Q, R & S ſcribatur e, $\frac{a}{e}$, $\frac{nn}{2e^3}$, & $\frac{ann}{2e^5}$, & pro $\sqrt{1 + QQ}$ ſcribatur $\sqrt{1 + \frac{aa}{ee}}$ ſeu $\frac{n}{e}$, & prodibit medii denſitas ut $\frac{a}{ne}$, hoc eſt (ob datam n) ut $\frac{a}{e}$, ſeu

AC,

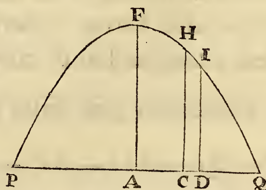
$\frac{AC}{CH}$, id est, ut tangentis longitudo illa *HT*, quæ ad semidiametrum *AF* ipsi *PQ* normaliter insistentem terminatur: & resistentia erit ad gravitatem ut $3a$ ad $2n$, id est, ut $3AC$ ad circuli diametrum *PQ*: velocitas autem erit ut $\sqrt{CH}$. Quare si corpus justa cum velocitate secundum lineam ipsi *PQ* parallelam exeat de loco *F*, & medii densitas in singulis locis *H* sit ut longitudo tangentis *HT*, & resistentia etiam in loco aliquo *H* sit ad vim gravitatis ut $3AC$ ad *PQ*, corpus illud describet circuli quadrantem *FHQ*. *Q. E. I.*



At si corpus idem de loco *P*, secundum lineam ipsi *PQ* perpendicularem egrederetur, & in arcu semicirculi *PFQ* moveri inciperet, sumenda esset *AC* seu a ad contrarias partes centri *A*, & propterea signum ejus mutandum esset & scribendum $-a$ pro $+a$. Quo pacto prodiret medii densitas ut $-\frac{a}{e}$. Negativam autem densitatem, hoc est, quæ motus corporum accelerat, natura non admittit: & propterea naturaliter fieri non potest, ut corpus ascendendo a *P* describat circuli quadrantem *PF*. Ad hunc effectum deberet corpus a medio impellente accelerari, non a resistente impediri.

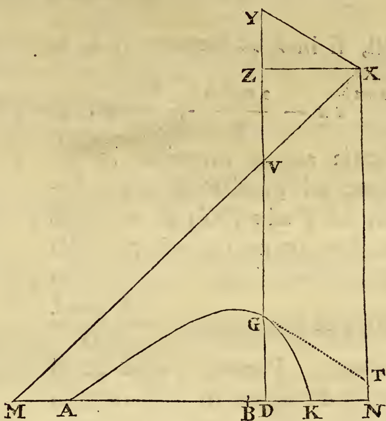
Exempl. 2. Sit linea *PFQ* parabola, axem habens *AF* horizonti *PQ* perpendicularem, & requiratur medii densitas, quæ faciat ut projectile in ipsa moveatur.

Ex natura parabolæ, rectangulum *PDQ* æquale est rectangulo sub ordinata *DI* & recta aliqua data: hoc est, si dicantur recta illa b; *PC*, a; *PQ*, c; *CH*, e; & *CD*, o; rectangulum $a+o$ in $c-a-o$ seu $ac-aa-2ao+co-oo$ æquale est rectangulo b in *DI*, ideoque *DI* æquale $\frac{ac-aa}{b}+\frac{c-2a}{b}o-\frac{oo}{b}$. Jam scribendus esset hujus seriei secundus terminus $\frac{c-2a}{b}o$ pro Qo, tertius



item

item terminus $\frac{oo}{b}$ pro Roo. Cum vero plures non ſint termini, debebit quarti coefficiens S evaneſcere, & propterea quantitas $\frac{S}{R\sqrt{1+QQ}}$, cui medii denſitas proportionalis eſt, nihil erit. Nulla igitur medii denſitate movebitur projectile in parabola, uti olim demonſtravit *Galilæus*. *Q. E. I.*



Exempl. 3. Sit linea *AGK* hyperbola, aſymptoton habens *NX* plano horizontali *AK* perpendicularem; & quæratur medii denſitas, quæ faciat ut projectile moveatur in hac linea.

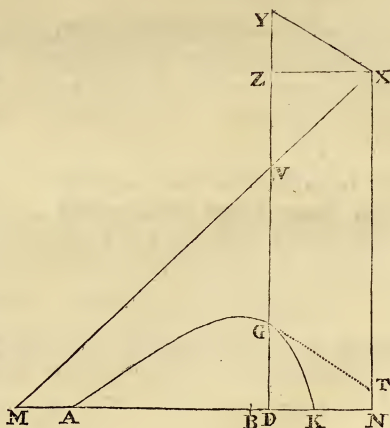
Sit *MX* aſymptotos altera, ordinatim applicatæ *DG* productæ occurrens in *V*; & ex natura hyperbolæ, rectangulum *XV* in *VG* dabitur. Datur autem ratio *DN* ad *VX*, & propterea datur etiam rectangulum *DN* in *VG*. Sit illud bb: & completo parallelogrammo *DNXZ*; dicatur *BN*, a; *BD*, o; *NX*, c; & ratio data *VZ* ad *ZX* vel *DN* ponatur eſſe $\frac{m}{n}$. Et erit *DN* æqualis $a-o$, *VG* æqualis $\frac{bb}{a-o}$, *VZ* æqualis $\frac{m}{n}\,\overline{a-o}$, & *GD* ſeu *NX*—*VZ*—*VG* æqualis $c-\frac{m}{n}a+\frac{m}{n}o-\frac{bb}{a-o}$. Reſolvatur terminus $\frac{bb}{a-o}$ in ſeriem convergentem $\frac{bb}{a}+\frac{bb}{aa}o+\frac{bb}{a^3}oo+\frac{bb}{a^4}o^3$ &c. & fiet *GD* æqualis $c-\frac{m}{n}a-\frac{bb}{a}+\frac{m}{n}o-\frac{bb}{aa}o-\frac{bb}{a^3}o^2-\frac{bb}{a^4}o^3$ &c. Hujus ſeriei terminus ſecundus $\frac{m}{n}o-\frac{bb}{aa}o$ uſurpandus eſt pro Qo, tertius cum ſigno mutato $\frac{bb}{a^3}o^2$ pro Ro^2, & quartus cum ſigno etiam mutato $\frac{bb}{a^4}o^3$

pro

pro So^3, eorumque coefficientes $\frac{m}{n} - \frac{bb}{aa}$, $\frac{bb}{a^3}$ & $\frac{bb}{a^4}$ scribendæ sunt in regula superiore pro Q, R & S. Quo facto prodit medii densitas

$$\text{ut } \frac{\frac{bb}{a^4}}{\frac{bb}{a^3}\sqrt{1 + \frac{mm}{nn} - \frac{2mbb}{naa} + \frac{b^4}{a^4}}} \text{ seu } \frac{1}{\sqrt{aa + \frac{mm}{nn}aa - \frac{2mbb}{n} + \frac{b^4}{aa}}} \text{ id}$$

est, si in VZ sumatur VY æqualis VG, ut $\frac{1}{XY}$. Namque aa & $\frac{mm}{nn}aa - \frac{2mbb}{n} + \frac{b^4}{aa}$ sunt ipsarum XZ & ZY quadrata. Resistentia autem invenitur in ratione ad gravitatem quam habet $3XY$ ad $2YG$; & velocitas ea est, quacum corpus in parabola pergeret verticem G, diametrum DG, & latus rectum $\frac{XY \text{ quad.}}{VG}$ habente. Ponatur itaque quod medii densitates in locis singulis G sint reciproce ut distantiæ XY, quodque resistentia in loco aliquo G sit ad gravitatem ut $3XY$ ad $2YG$; & corpus de loco A, justa cum velocitate emissum, describet hyperbolam illam AGK. *Q. E. I.*



Exempl. 4. Ponatur indefinite, quod linea AGK hyperbola sit, centro X, asymptotis MX, NX ea lege descripta, ut constructo rectangulo $XZDN$ cujus latus ZD secet hyperbolam in G & asymptoton ejus in V, fuerit VG reciproce ut ipsius ZX vel DN dignitas aliqua DN^n, cujus index est numerus n: & quæratur medii densitas, qua projectile progrediatur in hac curva.

Pro BN, BD, NX scribantur A, O, C respective, sitque VZ ad XZ vel DN ut d ad e, & VG æqualis $\frac{bb}{DN^n}$, & erit DN æqua-

lis

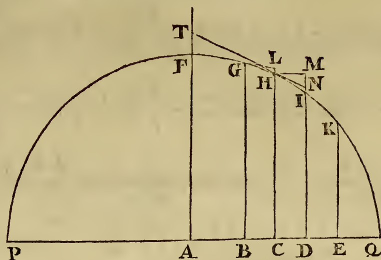
lis A − O, $VG = \frac{bb}{\overline{A-O}|^n}$, $VZ = \frac{d}{e}\,\overline{A-O}$, & $G\mathcal{D}$ seu $NX - VZ$ $- VG$ æqualis $C - \frac{d}{e}A + \frac{d}{e}O - \frac{bb}{\overline{A-O}|^n}$. Resolvatur terminus ille $\frac{bb}{\overline{A-O}|^n}$ in seriem infinitam $\frac{bb}{A^n} + \frac{nbb}{A^{n+1}}O + \frac{nn+n}{2A^{n+2}}bbO^2 + \frac{n^3+3nn+2n}{6A^{n+3}}bbO^3$ &c. ac fiet $G\mathcal{D}$ æqualis $C - \frac{d}{e}A - \frac{bb}{A^n} + \frac{d}{e}O - \frac{nbb}{A^{n+1}}O - \frac{+nn+n}{2A^{n+2}}bbO^2 - \frac{+n^3+3nn+2n}{6A^{n+3}}bbO^3$ &c. Hujus seriei terminus secundus $\frac{d}{e}O - \frac{nbb}{A^{n+1}}O$ usurpandus est pro Qo, tertius $\frac{nn+n}{2A^{n+2}}bbO^2$ pro Ro^2, quartus $\frac{n^3+3nn+2n}{6A^{n+3}}bbO^3$ pro So^3. Et inde medii densitas $\frac{S}{R\sqrt{1+QQ}}$, in loco quovis G, fit $\frac{n+2}{3\sqrt{A^2+\frac{dd}{ee}A^2-\frac{2dnbb}{eA^n}A+\frac{nnb^4}{A^{2n}}}}$, ideoque si in VZ capiatur VY æqualis $n \times VG$, densitas illa est reciproce ut XY. Sunt enim A^2 & $\frac{dd}{ee}A^2 - \frac{2dnbb}{eA^n}A + \frac{nnb^4}{A^{2n}}$ ipsarum XZ & ZY quadrata. Resistentia autem in eodem loco G fit ad gravitatem ut $3S$ in $\frac{XY}{A}$ ad $4RR$, id est, ut XY ad $\frac{2nn+2n}{n+2}VG$. Et velocitas ibidem ea ipsa est, quacum corpus projectum in parabola pergeret, verticem G, diametrum $G\mathcal{D}$ & latus rectum $\frac{1+QQ}{R}$ seu $\frac{2XY\ quad.}{nn+n\ \text{in}\ VG}$ habente. *Q. E. I.*

Scholium.

Eadem ratione qua prodiit densitas medii ut $\frac{S \times AC}{R \times HT}$ in corollario primo, si resistentia ponatur ut velocitatis V dignitas quælibet

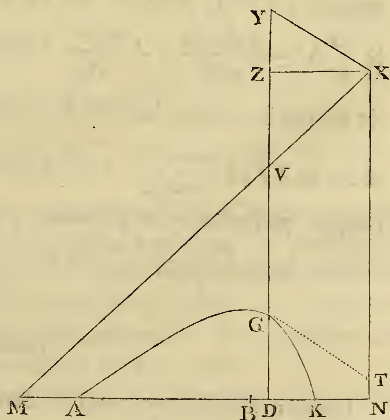
De Motu Corporum

bet V^n, prodibit densitas medii ut $\frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}} \times \overline{\frac{AC}{HT}}\Big|^{n-1}$. Et propterea si curva inveniri potest ea lege, ut data fuerit ratio $\frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}}$ ad



$\overline{\frac{HT}{AC}}\Big|^{n-1}$, vel $\frac{S^2}{R^{4-n}}$ ad $\overline{1+QQ}|^{n-1}$: corpus movebitur in hac curva in uniformi medio cum resistentia quæ sit ut velocitatis dignitas V^n. Sed redeamus ad curvas simpliciores.

Quoniam motus non fit in parabola nisi in medio non resistente, in hyperbolis vero hic descriptis fit per resistentiam perpetuam; perspicuum est quod linea, quam projectile in medio uniformiter resistente describit, propius accedit ad hyperbolas hasce quam ad parabolam. Est utique linea illa hyperbolici generis, sed quæ circa verticem magis distat ab asymptotis; in partibus a vertice remotioribus propius ad ipsas accedit quam pro ratione hyperbolarum quas hic descripsi. Tanta vero non est inter has & illam differentia, quin illius loco possint hæ in rebus practicis non incommode adhiberi. Et utiliores forsan futuræ sunt hæ, quam hyperbola magis accurata & simul magis composita. Ipsæ vero in usum sic deducentur.



Compleatur parallelogrammum *XYGT*, & recta *GT* tanget hyperbolam in *G*, ideoque densitas medii in *G* est reciproce ut tangens *GT*, & velocitas ibidem ut $\sqrt{\frac{GTq}{GV}}$, resistentia autem ad vim gravitatis ut *GT* ad $\frac{2nn+2n}{n+2}$ in *GV*.

Proinde

Proinde si corpus de loco *A* secundum rectam *AH* projectum describat hyperbolam *AGK*, & *AH* producta occurrat asymptoto *NX* in *H*, actaque *AI* eidem parallela occurrat alteri asymptoto *MX* in *I*: erit medii densitas in *A* reciproce ut *AH*, & corporis velocitas ut $\sqrt{\frac{AHq}{AI}}$, ac resistentia ibidem ad gravitatem ut *AH* ad $\frac{2nn+2n}{n+2}$ in *AI*. Unde prodeunt sequentes regulæ.

Reg. 1. Si servetur tum medii densitas in *A*, tum velocitas quacum corpus projicitur, & mutetur angulus *NAH*; manebunt longitudines *AH*, *AI*, *HX*. Ideoque si longitudines illæ in aliquo casu inveniantur, hyperbola deinceps ex dato quovis angulo *NAH* expedite determinari potest.

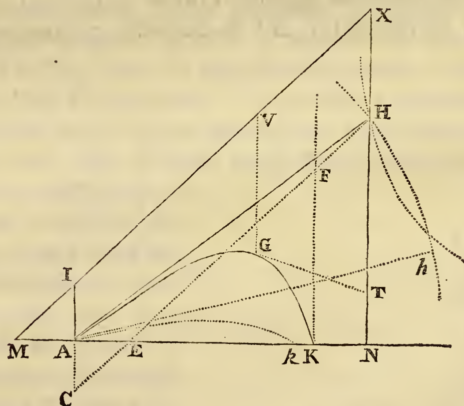
Reg. 2. Si servetur tum angulus *NAH*, tum medii densitas in *A*, & mutetur velocitas quacum corpus projicitur; servabitur longitudo *AH*, & mutabitur *AI* in duplicata ratione velocitatis reciproce.

Reg. 3. Si tam angulus *NAH*, quam corporis velocitas in *A*, gravitasque acceleratrix servetur, & proportio resistentiæ in *A* ad gravitatem motricem augeatur in ratione quacunque; augebitur proportio *AH* ad *AI* in eadem ratione, manente parabolæ prædictæ latere recto, eique proportionali longitudine $\frac{AHq}{AI}$: & propterea

terea minuetur *AH* in eadem ratione, & *AI* minuetur in ratione illa duplicata. Augetur vero proportio resistentiæ ad pondus, ubi vel gravitas specifica sub æquali magnitudine fit minor, vel medii densitas major, vel resistentia, ex magnitudine diminuta, diminuitur in minore ratione quam pondus.

Reg. 4. Quoniam densitas medii prope verticem hyperbolæ major est quam in loco *A*; ut habeatur densitas mediocris, debet ratio minimæ tangentium *GT* ad tangentem *AH* inveniri, & densitas in *A* augeri in ratione paulo majore quam semisummæ harum tangentium ad minimam tangentium *GT*.

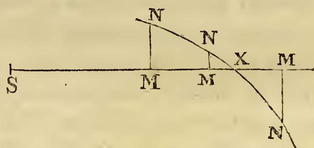
Reg. 5. Si dantur longitudines *AH*, *AI*, & describenda sit figura *AGK*: produc *HN* ad *X*, ut sit *HX* ad *AI* ut $n+1$ ad 1, centroque *X* & asymptotis *MX*, *NX* per punctum *A* describatur hyperbola, ea lege, ut sit *AI* ad quamvis *VG* ut XV^n ad XI^n.



Reg. 6. Quo major est numerus *n*, eo magis accuratæ sunt hæ hyperbolæ in ascensu corporis ab *A*, & minus accuratæ in ejus descensu ad *K*; & contra. Hyperbola conica mediocrem rationem tenet, estque cæteris simplicior. Igitur si hyperbola sit hujus generis, & punctum *K*, ubi corpus projectum incidet in rectam quamvis *AN* per punctum *A* transeuntem, quæratur: occurrat producta *AN* asymptotis *MX*, *NX* in *M* & *N*, & sumatur *NK* ipsi *AM* æqualis.

Reg. 7. Et hinc liquet methodus expedita determinandi hanc hyper-

hyperbolam ex phænomenis. Projiciantur corpora duo ſimilia & æqualia, eadem velocitate, in angulis diverſis *HAK*, *hAk*, incidantque in planum horizontis in *K* & *k*; & notetur proportio *AK* ad *Ak*. Sit ea *d* ad *e*. Tum erecto cujuſvis longitudinis perpendiculo *AI*, aſſume utcunque longitudinem *AH* vel *Ah*, & inde collige graphice longitudines *AK*, *Ak*, per reg. 6. Si ratio *AK* ad *Ak* ſit eadem cum ratione *d* ad *e*, longitudo *AH* recte aſſumpta fuit. Sin minus cape in recta infinita *SM* longitudinem *SM* æqualem aſſumptæ *AH*, & erige perpendiculum *MN* æquale rationum differentiæ $\frac{AK}{Ak} - \frac{d}{e}$ ductæ in rectam quamvis datam. Simili methodo ex aſſumptis pluribus longitudinibus *AH* invenienda ſunt plura puncta *N*, & per omnia agenda curva linea regularis *NNXN*, ſecans rectam *SMMM* in *X*. Aſſumatur demum *AH* æqualis abſciſſæ *SX*, & inde denuo inveniatur longitudo *AK*; & longitudines, quæ ſint ad aſſumptam longitudinem *AI* & hanc ultimam *AH*, ut longitudo *AK* per experimentum cognita ad ultimo inventam longitudinem *AK*, erunt veræ illæ longitudines *AI* & *AH*, quas invenire oportuit. Hiſce vero datis dabitur & reſiſtentia medii in loco *A*, quippe quæ ſit ad vim gravitatis ut *AH* ad 2*AI*. Augenda eſt autem denſitas medii per reg. 4. & reſiſtentia modo inventa, ſi in eadem ratione augeatur, fiet accuratior.



LIBER SECUNDUS.

Reg. 8. Inventis longitudinibus *AH*, *HX*; ſi jam deſideretur poſitio rectæ *AH*, ſecundum quam projectile, data illa cum velocitate emiſſum, incidit in punctum quodvis *K*: ad puncta *A* & *K* erigantur rectæ *AC*, *KF* horizonti perpendiculares, quarum *AC* deorſum tendat, & æquetur ipſi *AI* ſeu $\frac{1}{2}HX$. Aſymptotis *AK*, *KF* deſcribatur hyperbola, cujus conjugata tranſeat per punctum *C*, centroque *A* & intervallo *AH* deſcribatur circulus ſecans hyperbolam illam in puncto *H*; & projectile ſecundum rectam *AH* emiſſum incidet in punctum *K*. *Q. E. I.* Nam punctum *H*, ob datam longitudinem *AH*, locatur alicubi in circulo deſcripto. Agatur *CH* occurrens ipſis *AK* & *KF*, illi in *E*, huic in *F*; & ob parallelas *CH*, *MX* & æquales *AC*, *AI*, erit *AE* æqualis *AM*, & prop-

& propterea etiam æqualis KN. Sed CE eſt ad AE ut FH ad KN, & propterea CE & FH æquantur. Incidit ergo punctum H in hyperbolam aſymptotis AK, KF deſcriptam, cujus conjugata tranſit per punctum C, atque ideo reperitur in communi interſectione hyperbolæ hujus & circuli deſcripti. *Q. E. D.* Notandum eſt autem quod hæc operatio perinde ſe habet, ſive recta AKN horizonti parallela ſit, ſive ad horizontem in angulo quovis inclinata: quodque ex duabus interſectionibus H, H duo prodeunt anguli NAH, NAH; & quod in praxi mechanica ſufficit circulum ſemel deſcribere, deinde regulam interminatam CH ita applicare ad punctum C, ut ejus pars FH, circulo & rectæ FK interjecta, æqualis ſit ejus parti CE inter punctum C & rectam AK ſitæ.

Quæ de hyperbolis dicta ſunt facile applicantur ad parabolas. Nam ſi $XAGK$ parabolam deſignet quam recta XV tangat in vertice X, ſintque ordinatim applicatæ IA, VG ut quælibet abſciſſarum XI, XV dignitates XI^n, XV^n; agantur XT, GT, AH, quarum XT parallela ſit VG, & GT, AH parabolam tangant in G & A: & corpus de loco quovis A, ſecundum rectam AH productam, juſta cum velocitate projectum, deſcribet hanc parabolam, ſi modo denſitas medii, in locis ſingulis G, ſit reciproce ut tangens GT. Velocitas autem in G ea erit quacum projectile pergeret, in ſpatio non reſiſtente, in parabola conica verticem G, diametrum VG deorſum productam, & latus rectum $\frac{2GTq}{\overline{nn-n} \times VG}$ habente. Et reſiſtentia in G erit ad vim gravitatis ut GT ad $\frac{2nn-2n}{n-2}VG$. Unde ſi NAK lineam horizontalem deſignet, & manente tum denſitate medii in A, tum velocitate quacum corpus projicitur, mutetur utcunque angulus NAH; manebunt longitudines AH, AI, HX, & inde datur parabolæ vertex X, & poſitio rectæ XI, & ſumendo VG ad IA ut XV^n ad XI^n, dantur omnia parabolæ puncta G, per quæ projectile tranſibit.

SECTIO

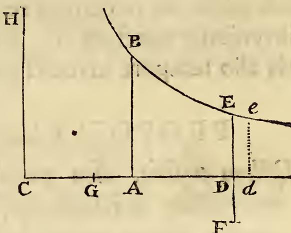
SECTIO III.

De motu corporum quibus resistitur partim in ratione velocitatis, partim in ejusdem ratione duplicata.

PROPOSITIO XI. THEOREMA VIII.

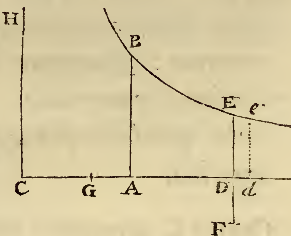
Si corpori resistitur partim in ratione velocitatis, partim in velocitatis ratione duplicata, & idem sola vi insita in medio similari movetur: sumantur autem tempora in progressione arithmetica; quantitates velocitatibus reciproce proportionales, data quadam quantitate auctæ, erunt in progressione geometrica.

Centro *C*, asymptotis rectangulis *CADd* & *CH*, describatur hyperbola *BEe*, & asymptoto *CH* parallelæ sint *AB*, *DE*, *de*. In asymptoto *CD* dentur puncta *A*, *G*: Et si tempus exponatur per aream hyperbolicam *ABED* uniformiter crescentem; dico quod velocitas exponi potest per longitudinem *DF*, cujus reciproca *GD* una cum data *CG* componat longitudinem *CD* in progressione geometrica crescentem.



Sit enim areola *DEed* datum temporis incrementum quam minimum, & erit *Dd* reciproce ut *DE*, ideoque directe ut *CD*. Ipsius autem $\frac{1}{GD}$ decrementum, quod (per hujus lem. II.) est $\frac{Dd}{GDq}$, erit ut $\frac{CD}{GDq}$ seu $\frac{CG+GD}{GDq}$, id est, ut $\frac{1}{GD}+\frac{CG}{GDq}$. Igitur tempore *ABED* per additionem datarum particularum *EDde* uniformiter crescente, decrescit $\frac{1}{GD}$ in eadem ratione cum velocitate. Nam decrementum velocitatis est ut resistentia, hoc

est (per hypothesin) ut summa duarum quantitatum, quarum una est ut velocitas, altera ut quadratum velocitatis; & ipsius $\frac{1}{GD}$ decrementum est ut summa quantitatum $\frac{1}{GD}$ & $\frac{CG}{GDq}$, quarum prior est ipsa $\frac{1}{GD}$, & posterior $\frac{CG}{GDq}$ est ut $\frac{1}{GDq}$: proinde $\frac{1}{GD}$, ob analogum decrementum, est ut velocitas. Et si quantitas GD, ipsi $\frac{1}{GD}$ reciproce proportionalis, quantitate data CG augeatur; summa CD, tempore $ABED$ uniformiter crescente, crescet in progressione geometrica. *Q. E. D.*



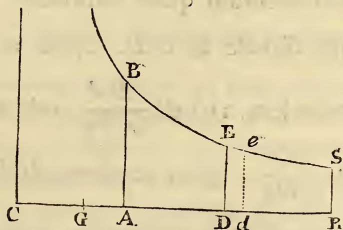
Corol. 1. Igitur si, datis punctis A, G, exponatur tempus per aream hyperbolicam $ABED$, exponi potest velocitas per ipsius GD reciprocam $\frac{1}{GD}$.

Corol. 2. Sumendo autem GA ad GD ut velocitatis reciproca sub initio, ad velocitatis reciprocam in fine temporis cujusvis $ABED$, invenietur punctum G. Eo autem invento, velocitas ex dato quovis alio tempore inveniri potest.

PROPOSITIO XII. THEOREMA IX.

Iisdem positis, dico quod si spatia descripta sumantur in progressione arithmetica, velocitates data quadam quantitate auctæ erunt in progressione geometrica.

In asymptoto CD detur punctum R, & erecto perpendiculo RS, quod occurrat hyperbolæ in S, exponatur descriptum spatium per aream hyperbolicam $RSED$; & velocitas erit ut longitudo GD, quæ cum data CG componit longitudinem CD in progressione geometrica decrescentem, interea dum spatium $RSED$ augetur in arithmetica.



Etenim

Etenim ob datum ſpatii incrementum *EDde*, lineola *Dd*, quæ decrementum eſt ipſius *GD*, erit reciproce ut *ED*, ideoque directe ut *CD*, hoc eſt, ut ſumma ejuſdem *GD* & longitudinis datæ *CG*. Sed velocitatis decrementum, tempore ſibi reciproce proportionali, quo data ſpatii particula *DdeE* deſcribitur, eſt ut reſiſtentia & tempus conjunctim, id eſt, directe ut ſumma duarum quantitatum, quarum una eſt ut velocitas, altera ut velocitatis quadratum, & inverſe ut velocitas; ideoque directe ut ſumma duarum quantitatum, quarum una datur, altera eſt ut velocitas. Decrementum igitur tam velocitatis quam lineæ *GD*, eſt ut quantitas data & quantitas decreſcens conjunctim, & propter analoga decrementa, analogæ ſemper erunt quantitates decreſcentes; nimirum velocitas & linea *GD*. *Q. E. D.*

Corol. 1. Si velocitas exponatur per longitudinem *GD*, ſpatium deſcriptum erit ut area hyperbolica *DESR*.

Corol. 2. Et ſi utcunque aſſumatur punctum *R*, invenietur punctum *G* capiendo *GR* ad *GD*, ut eſt velocitas ſub initio ad velocitatem poſt ſpatium quodvis *RSED* deſcriptum. Invento autem puncto *G*, datur ſpatium ex data velocitate, & contra.

Corol. 3. Unde cum (per prop. XI.) detur velocitas ex dato tempore, & per hanc propoſitionem detur ſpatium ex data velocitate; dabitur ſpatium ex dato tempore: & contra.

PROPOSITIO XIII. THEOREMA X.

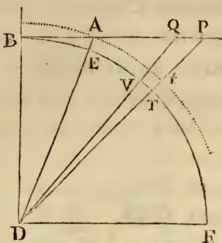
Poſito quod corpus ab uniformi gravitate deorſum attractum recta aſcendit vel deſcendit; & quod eidem reſiſtitur partim in ratione velocitatis, partim in ejuſdem ratione duplicata: dico quod, ſi circuli & hyperbolæ diametris parallelæ rectæ per conjugatarum diametrorum terminos ducantur, & velocitates ſint ut ſegmenta quædam parallelarum a dato puncto ducta; tempora erunt ut arearum ſectores, rectis a centro ad ſegmentorum terminos ductis abſciſſi: & contra.

Caſ. 1. Ponamus primo quod corpus aſcendit, centroque *D* & ſemidiametro quovis *DB* deſcribatur circuli quadrans *BETF*, &

 per

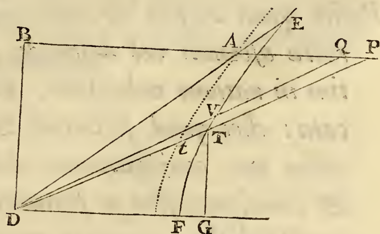
De Motu Corporum

per semidiametri DB terminum B agatur infinita BAP, semidiametro DF parallela. In ea detur punctum A, & capiatur segmentum AP velocitati proportionale. Et cum resistentiæ pars altera sit ut velocitas & pars altera ut velocitatis quadratum; sit resistentia tota ut AP *quad.* $+ 2BAP$. Jungantur DA, DP circulum secantes in E ac T, & exponatur gravitas per DA *quad.* ita ut sit gravitas ad resistentiam in P ut DAq ad $APq + 2BAP$: & tempus ascensus totius erit ut circuli sector EDT.



Agatur enim DVQ, abscindens & velocitatis AP momentum PQ, & sectoris DET momentum DTV dato temporis momento respondens; & velocitatis decrementum illud PQ erit ut summa virium gravitatis DAq & resistentiæ $APq + 2BAP$, id est (per prop. 12. lib. 2. elem.) ut DP *quad.* Proinde area DPQ, ipsi PQ proportionalis, est ut DP *quad.* & area DTV, quæ est ad aream DPQ ut DTq ad DPq, est ut datum DTq. Decrescit igitur area EDT uniformiter ad modum temporis futuri, per subductionem datarum particularum DTV, & propterea tempori ascensus totius proportionalis est. *Q. E. D.*

Cas. 2. Si velocitas in ascensu corporis exponatur per longitudinem AP ut prius, & resistentia ponatur esse ut $APq + 2BAP$, & si vis gravitatis minor sit quam quæ per DAq exponi possit; capiatur BD ejus longitudinis, ut sit $ABq - BDq$ gravitati proportionale, sitque DF ipsi DB perpendicularis & æqualis, & per verticem F describatur hyperbola $FTVE$, cujus semidiametri conjugatæ sint DB & DF, quæque secet DA in E, & DP, DQ in T & V; & erit tempus ascensus totius ut hyperbolæ sector TDE.



Nam velocitatis decrementum PQ, in data temporis particula factum, est ut summa resistentiæ $APq + 2BAP$ & gravitatis $ABq - BDq$, id est, ut $BPq - BDq$. Est autem area DTV ad aream DPQ ut DTq ad DPq; ideoque, si ad DF demittatur perpendiculum GT, ut GTq seu $GDq - DFq$

ad

ad *BDq*, utque *GDq* ad *BPq*, & divisim ut *DFq* ad *BPq*—*BDq*. Quare cum area *DPQ* sit ut *PQ*, id est, ut *BPq*—*BDq*; erit area *DTV* ut datum *DFq*. Decrescit igitur area *EDT* uniformiter singulis temporis particulis æqualibus, per subductionem particularum totidem datarum *DTV*, & propterea tempori proportionalis est. *Q. E. D.*

Cas. 3. Sit *AP* velocitas in descensu corporis, & *APq*+2*BAP* resistentia, & *BDq*—*ABq* vis gravitatis, existente angulo *DBA* recto. Et si centro *D*, vertice principali *B*, describatur hyperbola rectangula *BETV* secans productas *DA*, *DP* & *DQ* in *E*, *T* & *V*; erit hyperbolæ hujus sector *DET* ut tempus totum descensus.

Nam velocitatis incrementum *PQ*, eique proportionalis area *DPQ*, est ut excessus gravitatis supra resistentiam, id est, ut *BDq*—*ABq*—2*BAP*—*APq* seu *BDq*—*BPq*. Et area *DTV* est ad aream *DPQ* ut *DTq* ad *DPq*, ideoque ut *GTq* seu *GDq*—*BDq* ad *BPq*, utque *GDq* ad *BDq*, & divisim ut *BDq* ad *BDq*—*BPq*. Quare cum area *DPQ* sit ut *BDq*—*BPq*, erit area *DTV* ut datum *BDq*. Crescit igitur area *EDT* uniformiter singulis temporis particulis æqualibus, per additionem totidem datarum particularum *DTV*, & propterea tempori descensus proportionalis est. *Q.E.D.*

Corol. Si centro *D* semidiametro *DA* per verticem *A* ducatur arcus *At* similis arcui *ET*, & similiter subtendens angulum *ADT*: velocitas *AP* erit ad velocitatem, quam corpus tempore *EDT*, in spatio non resistente, ascendendo amittere vel descendendo acquirere posset, ut area trianguli *DAP* ad aream sectoris *DAt*; ideoque ex dato tempore datur. Nam velocitas, in medio non resistente, tempori, atque ideo sectori huic proportionalis est; in medio resistente est ut triangulum; & in medio utroque, ubi quam minima est, accedit ad rationem æqualitatis, pro more sectoris & trianguli.

Scholium.

Demonstrari etiam posset casus in ascensu corporis, ubi vis gravitatis minor est quam quæ exponi possit per *DAq* seu *ABq*+*BDq*,

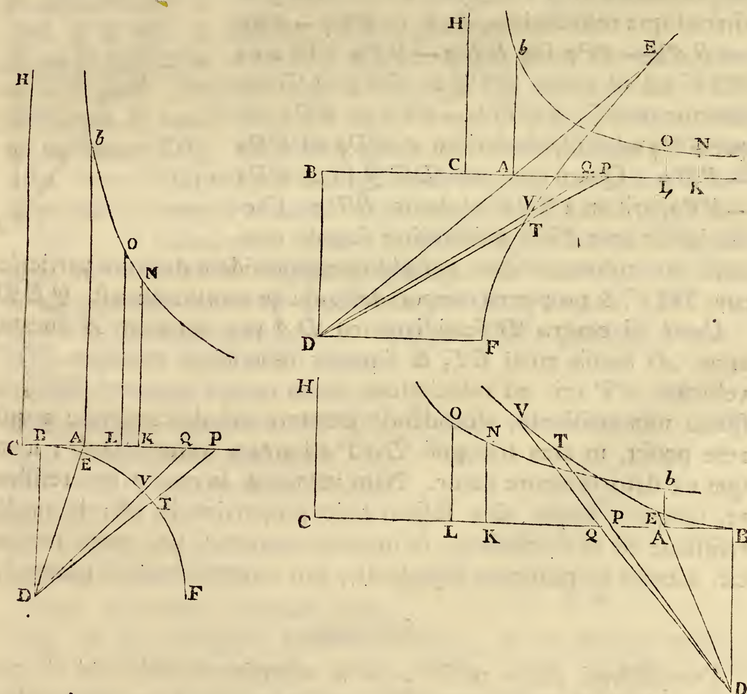
&

& major quam quæ exponi possit per $ABq-BDq$, & exponi debet per ABq. Sed propero ad alia.

PROPOSITIO XIV. THEOREMA XI.

Iisdem positis, dico quod spatium ascensu vel descensu descriptum, est ut differentia areæ per quam tempus exponitur, & areæ cujusdam alterius quæ augetur vel diminuitur in progressione arithmetica; si vires ex resistentia & gravitate compositæ sumantur in progressione geometrica.

Capiatur AC (in fig. tribus ultimis) gravitati, & AK resistentiæ



proportionalis. Capiantur autem ad easdem partes puncti A si corpus

pus descendit, aliter ad contrarias. Erigatur Ab, quæ sit ad DB ut DBq ad $4BAC$: & descripta ad asymptotos rectangulas CK, CH hyperbola bN, erectaque KN ad CK perpendiculari, area $AbNK$ augebitur vel diminuetur in progressione arithmetica, dum vires CK in progressione geometrica sumuntur. Dico igitur quod distantia corporis ab ejus altitudine maxima sit ut excessus areæ $AbNK$ supra aream DET.

Nam cum AK sit ut resistentia, id est, ut $APq + 2BAP$; assumatur data quævis quantitas Z, & ponatur AK æqualis $\frac{APq + 2BAP}{Z}$; & (per hujus lemma II.) erit ipsius AK momentum KL æquale $\frac{2APQ + 2BA \times PQ}{Z}$ seu $\frac{2BPQ}{Z}$, & areæ $AbNK$ momentum $KLON$ æquale $\frac{2BPQ \times LO}{Z}$ seu $\frac{BPQ \times BD\,cub.}{2Z \times CK \times AB}$.

Cas. 1. Jam si corpus ascendit, sitque gravitas ut $ABq + BDq$, existente BET circulo (in figura prima) linea AC, quæ gravitati proportionalis est, erit $\frac{ABq + BDq}{Z}$, & DPq seu $APq + 2BAP + ABq + BDq$ erit $AK \times Z + AC \times Z$ seu $CK \times Z$; ideoque area DTV erit ad aream DPQ ut DTq vel DBq ad $CK \times Z$.

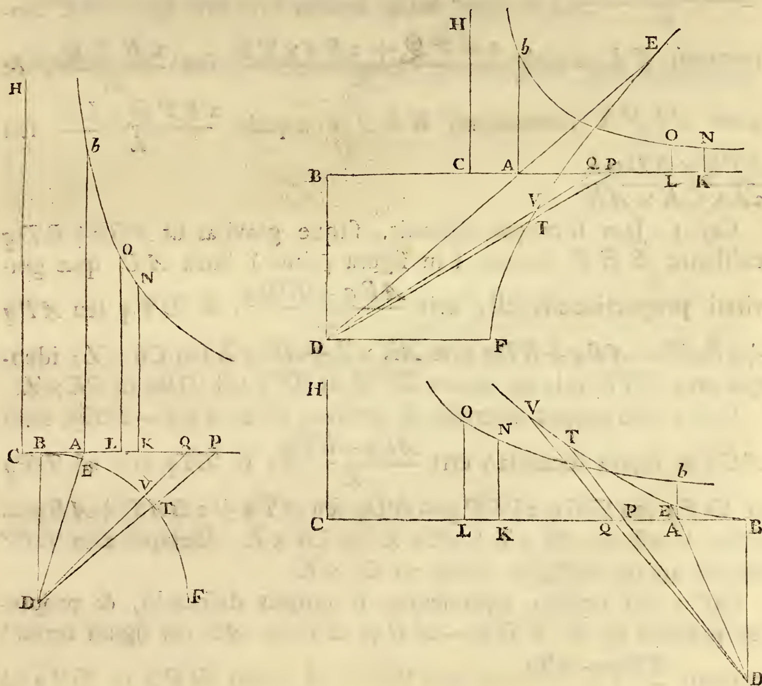
Cas. 2. Sin corpus ascendit, & gravitas sit ut $ABq - BDq$, linea AC (in figura secunda) erit $\frac{ABq - BDq}{Z}$, & DTq erit ad DPq ut DFq seu DBq ad $BPq - BDq$ seu $APq + 2BAP + ABq - BDq$, id est, ad $AK \times Z + AC \times Z$ seu $CK \times Z$. Ideoque area DTV erit ad aream DPQ ut DBq ad $CK \times Z$.

Cas. 3. Et eodem argumento, si corpus descendit, & propterea gravitas sit ut $BDq - ABq$, & linea AC (in figura tertia) æquetur $\frac{BDq - ABq}{Z}$ erit area DTV ad aream DPQ ut DBq ad $CK \times Z$: ut supra.

Cum igitur areæ illæ semper sint in hac ratione; si pro area DTV, qua momentum temporis sibimet ipsi semper æquale exponitur, scribatur determinatum quodvis rectangulum, puta $BD \times m$, erit

De Motu Corporum

erit area DPQ, id eſt, $\frac{1}{2}BD \times PQ$; ad $BD \times m$ ut $CK \times Z$ ad BDq. Atque inde fit $PQ \times BD$ *cub.* æquale $2BD \times m \times CK \times Z$, & areæ $AbNK$ momentum $KLON$ ſuperius inventum fit $\frac{BP \times BD \times m}{AB}$. Auferatur areæ DET momentum DTV ſeu $BD \times m$, & reſtabit $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$. Eſt igitur differentia momentorum, id eſt, momentum differentiæ arearum, æqualis $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$; & propterea



ob datum $\frac{BD \times m}{AB}$ ut velocitas AP, id eſt, ut momentum ſpatii quod corpus aſcendendo vel deſcendendo deſcribit. Ideoque differentia arearum & ſpatium illud, proportionalibus momentis creſcentia

tia vel decrescentia & simul incipientia vel simul evanescentia, sunt proportionalia. *Q. E. D.*

Corol. Si longitudo, quæ oritur applicando aream *DET* ad lineam *BD*, dicatur *M*; & longitudo alia *V* sumatur in ea ratione ad longitudinem *M*, quam habet linea *DA* ad lineam *DE*: spatium, quod corpus ascensu vel descensu toto in medio resistente describit, erit ad spatium, quod corpus in medio non resistente e quiete cadendo eodem tempore describere potest, ut arearum prædictarum differentia ad $\frac{BD \times V^2}{AB}$: ideoque ex dato tempore datur. Nam spatium in medio non resistente est in duplicata ratione temporis, sive ut V^2; & ob datas *BD* & *AB* ut $\frac{BD \times V^2}{AB}$. Hæc area æqualis est areæ $\frac{DAq \times BD \times M^2}{DEq \times AB}$, & ipsius *M* momentum est *m*; & propterea hujus areæ momentum est $\frac{DAq \times BD \times 2M \times m}{DEq \times AB}$. Hoc autem momentum est ad momentum differentiæ arearum prædictarum *DET* & *AbNK*, viz. ad $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$, ut $\frac{DAq \times BD \times M}{DEq}$ ad $\frac{1}{2}BD \times AP$, sive ut $\frac{DAq}{DEq}$ in *DET* ad *DAP*; ideoque, ubi areæ *DET* & *DAP* quam minimæ sunt, in ratione æqualitatis. Area igitur $\frac{BD \times V^2}{AB}$, & differentia arearum *DET* & *AbNK*, quando omnes hæ areæ quam minimæ sunt, æqualia habent momenta; ideoque sunt æquales. Unde cum velocitates, & propterea etiam spatia in medio utroque in principio descensus vel fine ascensus simul descripta accedant ad æqualitatem; ideoque tunc sint ad invicem ut area $\frac{BD \times V^2}{AB}$, & arearum *DET* & *AbNK* differentia; & præterea cum spatium in medio non resistente sit perpetuo ut $\frac{BD \times V^2}{AB}$, & spatium in medio resistente sit perpetuo ut arearum *DET* & *AbNK* differentia: necesse est, ut spatia in medio utroque, in æqualibus quibuscunque temporibus descripta, sint ad invicem ut area

 illa

 illa $\frac{BD \times V^2}{AB}$, & arearum DET & $AbNK$ differentia. *Q. E. D.*

Scholium.

Resistentia corporum sphæricorum in fluidis oritur partim ex tenacitate, partim ex frictione, & partim ex densitate medii. Et resistentiæ partem illam, quæ oritur ex densitate fluidi diximus esse in duplicata ratione velocitatis; pars altera, quæ oritur ex tenacitate fluidi, est uniformis, sive ut momentum temporis: ideoque jam pergere liceret ad motum corporum, quibus resistitur partim vi uniformi seu in ratione momentorum temporis, & partim in ratione duplicata velocitatis. Sed sufficit aditum patefecisse ad hanc speculationem in propositionibus VIII. & IX. quæ præcedunt, & eorum corollariis. In iisdem utique pro corporis ascendentis resistentia uniformi, quæ ex ejus gravitate oritur, substitui potest resistentia uniformis, quæ oritur ex tenacitate medii, quando corpus sola vi insita movetur; & corpore recta ascendente addere licet hanc uniformem resistentiam vi gravitatis; eandemque subducere, quando corpus recta descendit. Pergere etiam liceret ad motum corporum, quibus resistitur partim uniformiter, partim in ratione velocitatis, & partim in ratione duplicata velocitatis. Et viam aperui in propositionibus præcedentibus XIII. & XIV. in quibus etiam resistentia uniformis, quæ oritur ex tenacitate medii pro vi gravitatis substitui potest, vel cum eadem, ut prius, componi. Sed propero ad alia.

SECTIO IV.

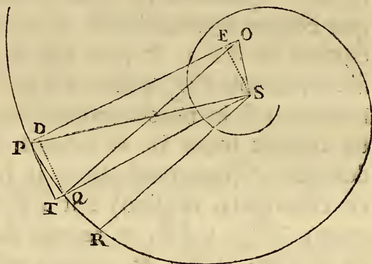
De corporum circulari motu in mediis resistentibus.

LEMMA III.

Sit PQR *spiralis quæ secet radios omnes* SP, SQ, SR, *&c. in æqualibus angulis. Agatur recta* PT *quæ tangat eandem in puncto quovis* P, *secetque radium* SQ *in* T; *& ad spiralem erectis perpendiculis* PO, QO *concurrentibus in* O, *jun-*

O, jungatur SO. *Dico quod ſi puncta* P *&* Q *accedant ad invicem & coeant, angulus* PSO *evadet rectus, & ultima ratio rectanguli* TQ × 2PS *ad* PQ *quad. erit ratio æqualitatis.*

Etenim de angulis rectis *OPQ*, *OQR* ſubducantur anguli æquales *SPQ*, *SQR*, & manebunt anguli æquales *OPS*, *OQS*. Ergo circulus qui tranſit per puncta *O, S, P* tranſibit etiam per punctum *Q*. Coeant puncta *P* & *Q*, & hic circulus in loco coitus *PQ* tanget ſpiralem, ideoque perpendiculariter ſecabit rectam *OP*. Fiet igitur *OP* diameter circuli hujus, & angulus *OSP* in ſemicirculo rectus. *Q. E. D.*



Ad *OP* demittantur perpendicula *QD*, *SE*, & linearum rationes ultimæ erunt hujuſmodi: *TQ* ad *PD* ut *TS* vel *PS* ad *PE*, ſeu 2*PO* ad 2*PS*; item *PD* ad *PQ* ut *PQ* ad 2*PO*; & ex æquo perturbate *TQ* ad *PQ* ut *PQ* ad 2*PS*. Unde fit *PQq* æquale *TQ* × 2*PS*. *Q. E. D.*

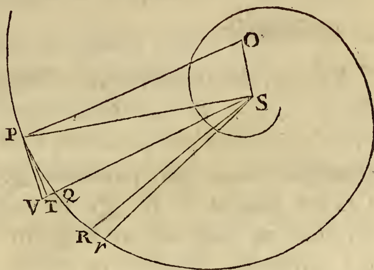
PROPOSITIO XV. THEOREMA XII.

Si medii denſitas in locis ſingulis ſit reciproce ut diſtantia locorum a centro immobili, ſitque vis centripeta in duplicata ratione denſitatis: dico quod corpus gyrari poteſt in ſpirali, quæ radios omnes a centro illo ductos interſecat in angulo dato.

Ponantur quæ in ſuperiore lemmate, & producatur *SQ* ad *V*, ut ſit *SV* æqualis *SP*. Tempore quovis, in medio reſiſtente, deſcribat corpus arcum quam minimum *PQ*, & tempore duplo arcum quam minimum *PR*; & decrementa horum arcuum ex reſiſtentia oriunda, ſive defectus ab arcubus, qui in medio non reſiſtente iiſdem

 temporibus

temporibus describerentur, erunt ad invicem ut quadrata temporum in quibus generantur: Est itaque decrementum arcus *PQ* pars quarta decrementi arcus *PR*. Unde etiam, si areæ *PSQ* æqualis capiatur area *QSr*, erit decrementum arcus *PQ* æquale dimidio lineolæ *Rr*; ideoque vis resistentiæ & vis centripeta sunt ad invicem ut lineolæ $\frac{1}{2}Rr$ & *TQ* quas simul generant. Quoniam vis centripeta, qua corpus urgetur in *P*, est reciproce ut *SPq*, & (per lem. x. lib. 1.) lineola *TQ*, quæ vi illa generatur, est in ratione composita



ex ratione hujus vis & ratione duplicata temporis quo arcus *PQ* describitur (nam resistentiam in hoc casu, ut infinite minorem quam vis centripeta, negligo) erit $TQ \times SPq$, id est (per lemma novissimum) $\frac{1}{2}PQq \times SP$, in ratione duplicata temporis, ideoque tempus est ut $PQ \times \sqrt{SP}$; & corporis velocitas, qua arcus *PQ* illo tempore describitur, ut $\frac{PQ}{PQ \times \sqrt{SP}}$ seu $\frac{1}{\sqrt{SP}}$, hoc est, in subduplicata ratione ipsius *SP* reciproce. Et simili argumento, velocitas qua arcus *QR* describitur, est in subduplicata ratione ipsius *SQ* reciproce. Sunt autem arcus illi *PQ* & *QR* ut velocitates descriptrices ad invicem, id est, in subduplicata ratione *SQ* ad *SP*, sive ut *SQ* ad $\sqrt{SP \times SQ}$; & ob æquales angulos *SPQ*, *SQr* & æquales areas *PSQ*, *QSr*, est arcus *PQ* ad arcum *Qr* ut *SQ* ad *SP*. Sumantur proportionalium consequentium differentiæ, & fiet arcus *PQ* ad arcum *Rr* ut *SQ* ad $SP - \sqrt{SP \times SQ}$, seu $\frac{1}{2}VQ$. Nam punctis *P* & *Q* coeuntibus, ratio ultima $SP - \sqrt{SP \times SQ}$ ad $\frac{1}{2}VQ$ est æqualitatis. Quoniam decrementum arcus *PQ*, ex resistentia oriundum, sive hujus duplum *Rr*, est ut resistentia & quadratum temporis conjunctim; erit resistentia ut $\frac{Rr}{PQq \times SP}$. Erat autem *PQ* ad *Rr*, ut *SQ* ad $\frac{1}{2}VQ$, & inde $\frac{Rr}{PQq \times SP}$ fit ut $\frac{\frac{1}{2}VQ}{PQ \times SP \times SQ}$ sive ut $\frac{\frac{1}{2}OS}{OP \times SPq}$. Namque punctis *P* & *Q* coeuntibus, *SP* & *SQ* coincidunt, & angulus *PVQ* fit rectus; & ob similia triangula *PVQ*, *PSO*, fit *PQ*

ad

ad $\frac{1}{2}VQ$ ut OP ad $\frac{1}{2}OS$. Est igitur $\frac{OS}{OP \times SPq}$ ut resistentia, id est, in ratione densitatis medii in P & ratione duplicata velocitatis conjunctim. Auferatur duplicata ratio velocitatis, nempe ratio $\frac{1}{SP}$, & manebit medii densitas in P ut $\frac{OS}{OP \times SP}$. Detur spiralis, & ob datam rationem OS ad OP, densitas medii in P erit ut $\frac{1}{SP}$. In medio igitur cujus densitas est reciproce ut distantia a centro SP, corpus gyrari potest in hac spirali. *Q. E. D.*

Corol. 1. Velocitas in loco quovis P ea semper est, quacum corpus in medio non resistente eadem vi centripeta gyrari potest in circulo, ad eandem a centro distantiam SP.

Corol. 2. Medii densitas, si datur distantia SP, est ut $\frac{OS}{OP}$, sin distantia illa non datur, ut $\frac{OS}{OP \times SP}$. Et inde spiralis ad quamlibet medii densitatem aptari potest.

Corol. 3. Vis resistentiæ in loco quovis P, est ad vim centripetam in eodem loco ut $\frac{1}{2}OS$ ad OP. Nam vires illæ sunt ad invicem ut $\frac{1}{2}Rr$ & TQ, sive ut $\frac{\frac{1}{4}VQ \times PQ}{SQ}$ & $\frac{\frac{1}{2}PQq}{SP}$, hoc est, ut $\frac{1}{2}VQ$ & PQ, seu $\frac{1}{2}OS$ & OP. Data igitur spirali datur proportio resistentiæ ad vim centripetam, & vice versa ex data illa proportione datur spiralis.

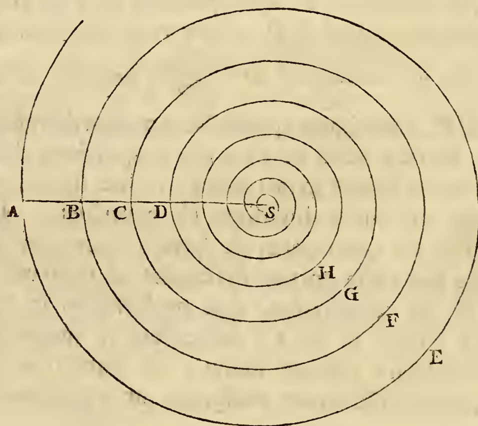
Corol 4. Corpus itaque gyrari nequit in hac spirali, nisi ubi vis resistentiæ minor est quam dimidium vis centripetæ. Fiat resistentia æqualis dimidio vis centripetæ, & spiralis conveniet cum linea recta PS, inque hac recta corpus descendet ad centrum ea cum velocitate, quæ sit ad velocitatem, qua probavimus in superioribus in casu parabolæ (theor. x. lib. 1.) descensum in medio non resistente fieri, in subduplicata ratione unitatis ad numerum binarium. Et tempora descensus hic erunt reciproce ut velocitates, atque ideo dantur.

Corol. 5. Et quoniam in æqualibus a centro distantiis velocitas eadem est in spirali PQR atque in recta SP, & longitudo spiralis ad longitudinem rectæ PS est in data ratione, nempe in ratione OP ad OS;

OS; tempus descensus in spirali erit ad tempus descensus in recta *SP* in eadem illa data ratione, proindeque datur.

Corol. 6. Si centro *S* intervallis duobus quibuscunque datis describantur duo circuli; & manentibus hisce circulis, mutetur utcunque angulus quem spiralis continet cum radio *PS*: numerus revolutionum quas corpus intra circulorum circumferentias, pergendo in spirali a circumferentia ad circumferentiam, complere potest, est ut $\frac{PS}{OS}$, sive ut tangens anguli illius quem spiralis continet cum radio *PS*; tempus vero revolutionum earundem ut $\frac{OP}{OS}$, id est, ut secans anguli ejusdem, vel etiam reciproce ut medii densitas.

Corol. 7. Si corpus in medio, cujus densitas est reciproce ut distantia locorum a centro, revolutionem in curva quacunque *AEB* circa centrum illud fecerit, & radium primum *AS* in eodem angulo secuerit in *B* quo prius in *A*, idque cum velocitate quæ fuerit ad velocitatem suam primam in *A* reciproce in subduplicata ratione distantiarum a centro (id est, ut *AS* ad mediam proportionalem inter *AS*



& *BS*) corpus illud perget innumeras consimiles revolutiones *BFC*, *CGD*, &c. facere, & intersectionibus distinguet radium *AS* in partes *AS*, *BS*, *CS*, *DS*, &c. continue proportionales. Revolutionum vero

vero tempora erunt ut perimetri orbitarum *AEB*, *BFC*, *CGD*, &c. directe, & velocitates in principiis *A*, *B*, *C*, inverse; id est, ut $AS^{\frac{3}{2}}$, $BS^{\frac{3}{2}}$, $CS^{\frac{3}{2}}$. Atque tempus totum, quo corpus perveniet ad centrum, erit ad tempus revolutionis primæ, ut summa omnium continue proportionalium $AS^{\frac{3}{2}}$, $BS^{\frac{3}{2}}$, $CS^{\frac{3}{2}}$, pergentium in infinitum, ad terminum primum $AS^{\frac{3}{2}}$; id est, ut terminus ille primus $AS^{\frac{3}{2}}$ ad differentiam duorum primorum $AS^{\frac{3}{2}} - BS^{\frac{3}{2}}$, sive ut $\frac{2}{3}AS$ ad *AB* quam proxime. Unde tempus illud totum expedite invenitur.

Corol. 8. Ex his etiam præter propter colligere licet motus corporum in mediis, quorum densitas aut uniformis est, aut aliam quamcunque legem assignatam observat. Centro *S*, intervallis continue proportionalibus *SA*, *SB*, *SC*, &c. describe circulos quotcunque, & statue tempus revolutionum inter perimetros duorum quorumvis ex his circulis, in medio de quo egimus, esse ad tempus revolutionum inter eosdem in medio proposito, ut medii propositi densitas mediocris inter hos circulos ad medii, de quo egimus, densitatem mediocrem inter eosdem quam proxime: Sed & in eadem quoque ratione esse secantem anguli quo spiralis præfinita, in medio de quo egimus, secat radium *AS*, ad secantem anguli quo spiralis nova secat radium eundem in medio proposito: Atque etiam ut sunt eorundem angulorum tangentes ita esse numeros revolutionum omnium inter circulos eosdem duos quam proxime. Si hæc fiant passim inter circulos binos, continuabitur motus per circulos omnes. Atque hoc pacto haud difficulter imaginari possimus quibus modis ac temporibus corpora in medio quocunque regulari gyrari debebunt.

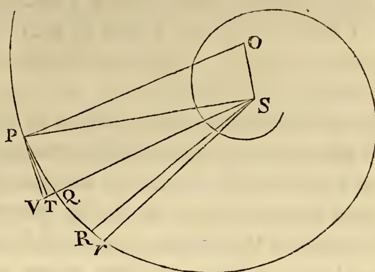
Corol. 9. Et quamvis motus excentrici in spiralibus ad formam ovalium accedentibus peragantur; tamen concipiendo spiralium illarum singulas revolutiones iisdem ab invicem intervallis distare, iisdemque gradibus ad centrum accedere cum spirali superius descripta, intelligemus etiam quomodo motus corporum in hujusmodi spiralibus peragantur.

PROPO-

De Motu Corporum

PROPOSITIO XVI. THEOREMA XIII.

Si medii densitas in locis singulis sit reciproce ut distantia locorum a centro immobili, sitque vis centripeta reciproce ut dignitas quælibet ejusdem distantiæ: dico quod corpus gyrari potest in spirali quæ radios omnes a centro illo ductos intersecat in angulo dato.



Demonstratur eadem methodo cum propositione superiore. Nam si vis centripeta in P sit reciproce ut distantiæ SP, dignitas quælibet SP^{n+1} cujus index est $n+1$: colligetur ut supra, quod tempus, quo corpus describit arcum quemvis PQ, erit ut $PQ \times PS^{\frac{1}{2}n}$; & resistentia in P ut $\frac{Rr}{PQq \times SP^{n}}$, sive ut $\frac{\overline{1-\frac{1}{2}n} \times VQ}{PQ \times SP^{n} \times SQ}$, ideoque ut $\frac{\overline{1-\frac{1}{2}n} \times OS}{OP \times SP^{n+1}}$, hoc est, ob datum $\frac{\overline{1-\frac{1}{2}n} \times OS}{OP}$, reciproce ut SP^{n+1}. Et propterea, cum velocitas sit reciproce ut $SP^{\frac{1}{2}n}$, densitas in P erit reciproce ut SP.

Corol. 1. Resistentia est ad vim centripetam ut $\overline{1-\frac{1}{2}n} \times OS$ ad OP.

Corol. 2. Si vis centripeta sit reciproce ut SP *cub.* erit $1-\frac{1}{2}n=0$; ideoque resistentia & densitas medii nulla erit, ut in propositione nona libri primi.

Corol. 3. Si vis centripeta sit reciproce ut dignitas aliqua radii SP cujus index est major numero 3, resistentia affirmativa in negativam mutabitur.

Scholium.

Cæterum hæc propositio & superiores, quæ ad media inæqualiter densa spectant, intelligendæ sunt de motu corporum adeo parvorum,

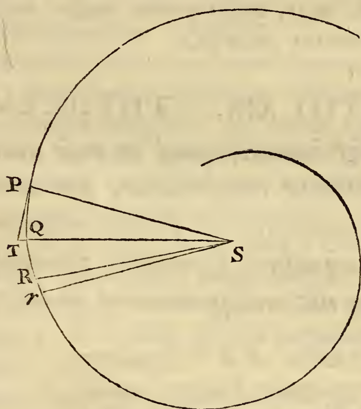
ut

ut medii ex uno corporis latere major denſitas quam ex altero non conſideranda veniat. Reſiſtentiam quoque cæteris paribus denſitati proportionalem eſſe ſuppono. Unde in mediis, quorum vis reſiſtendi non eſt ut denſitas, debet denſitas eo uſque augeri vel diminui, ut reſiſtentiæ vel tollatur exceſſus vel defectus ſuppleatur.

PROPOSITIO XVII. PROBLEMA IV.

Invenire & vim centripetam & medii reſiſtentiam, qua corpus in data ſpirali, data velocitatis lege, revolvi poteſt.

Sit ſpiralis illa *PQR*. Ex velocitate, qua corpus percurrit arcum quam minimum *PQ*, dabitur tempus, & ex altitudine *TQ*, quæ eſt ut vis centripeta & quadratum temporis, dabitur vis. Deinde ex



arearum, æqualibus temporum particulis confectarum *PSQ* & *QSR*, differentia *RSr*, dabitur corporis retardatio, & ex retardatione invenietur reſiſtentia ac denſitas medii.

PROPOSITIO XVIII. PROBLEMA V.

Data lege vis centripetæ, invenire medii denſitatem in locis ſingulis, qua corpus datam ſpiralem deſcribet.

Ex vi centripeta invenienda eſt velocitas in locis ſingulis, deinde

ex velocitatis retardatione quærenda medii densitas; ut in propositione superiore.

Methodum vero tractandi hæc problemata aperui in hujus propositione decima, & lemmate secundo; & lectorem in hujusmodi perplexis disquisitionibus diutius detinere nolo. Addenda jam sunt aliqua de viribus corporum ad progrediendum, deque densitate & resistentia mediorum, in quibus motus hactenus expositi & his affines peraguntur.

SECTIO V.

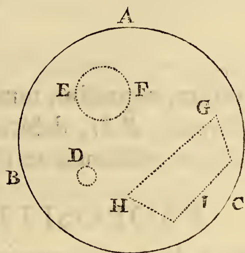
De densitate & compressione fluidorum, deque hydrostatica.

Definitio Fluidi.

Fluidum est corpus omne, cujus partes cedunt vi cuicunque illatæ, & cedendo facile moventur inter se.

PROPOSITIO XIX. THEOREMA XIV.

Fluidi homogenei & immoti, quod in vase quocunque immoto clauditur & undique comprimitur, partes omnes (seposita condensationis, gravitatis, & virium omnium centripetarum consideratione) æqualiter premuntur undique, & sine omni motu a pressione illa orto permanent in locis suis.



Cas. 1. In vase sphærico ABC claudatur & uniformiter comprimatur fluidum undique: dico quod ejusdem pars nulla ex illa pressione movebitur. Nam si pars aliqua D moveatur, necesse est ut omnes hujusmodi partes, ad eandem a centro distantiam undique consistentes, simili motu simul moveantur; atque hoc ideo quia similis & æqualis est omnium pressio, & motus omnis exclusus supponitur, nisi qui a pressione illa oriatur. Atqui non possunt omnes ad centrum propius accedere, nisi fluidum ad centrum condensetur;

densetur; contra hypothesin. Non possunt longius ab eo recedere, nisi fluidum ad circumferentiam condensetur; etiam contra hypothesin. Non possunt servata sua a centro distantia moveri in plagam quamcunque, quia pari ratione movebuntur in plagam contrariam; in plagas autem contrarias non potest pars eadem, eodem tempore, moveri. Ergo fluidi pars nulla de loco suo movebitur. *Q. E. D.*

Cas. 2. Dico jam, quod fluidi hujus partes omnes sphæricæ æqualiter premuntur undique. Sit enim *EF* pars sphærica fluidi, & si hæc undique non premitur æqualiter, augeatur pressio minor, usque dum ipsa undique prematur æqualiter; & partes ejus, per casum primum, permanebunt in locis suis. Sed ante auctam pressionem permanebunt in locis suis, per casum eundem primum, & additione pressionis novæ movebuntur de locis suis, per definitionem fluidi. Quæ duo repugnant. Ergo falso dicebatur quod sphæra *EF* non undique premebatur æqualiter. *Q. E. D.*

Cas. 3. Dico præterea quod diversarum partium sphæricarum æqualis sit pressio. Nam partes sphæricæ contiguæ se mutuo premunt æqualiter in puncto contactus, per motus legem III. Sed &, per casum secundum, undique premuntur eadem vi. Partes igitur duæ quævis sphæricæ non contiguæ, quia pars sphærica intermedia tangere potest utramque, prementur eadem vi. *Q. E. D.*

Cas. 4. Dico jam quod fluidi partes omnes ubique premuntur æqualiter. Nam partes duæ quævis tangi possunt a partibus sphæricis in punctis quibuscunque, & ibi partes illas sphæricas æqualiter premunt, per casum 3. & vicissim ab illis æqualiter premuntur, per motus legem tertiam. *Q. E. D.*

Cas. 5. Cum igitur fluidi pars quælibet *GHI* in fluido reliquo tanquam in vase claudatur, & undique prematur æqualiter, partes autem ejus se mutuo æqualiter premant & quiescant inter se; manifestum est quod fluidi cujuscunque *GHI*, quod undique premitur æqualiter, partes omnes se mutuo premunt æqualiter, & quiescunt inter se. *Q. E. D.*

Cas. 6. Igitur si fluidum illud in vase non rigido claudatur, & undique non prematur æqualiter; cedet idem pressioni fortiori, per definitionem fluiditatis.

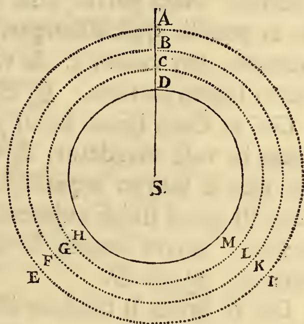
Cas. 7. Ideoque in vase rigido fluidum non sustinebit pressionem forti-

fortiorem ex uno latere quam ex alio, sed eidem cedet, idque in momento temporis, quia latus vasis rigidum non persequitur liquorem cedentem. Cedendo autem urgebit latus oppositum, & sic pressio undique ad æqualitatem verget. Et quoniam fluidum, quam primum a parte magis pressa recedere conatur, inhibetur per resistentiam vasis ad latus oppositum; reducetur pressio undique ad æqualitatem, in momento temporis, sine motu locali: & subinde partes fluidi, per casum quintum, se mutuo prement æqualiter, & quiescent inter se. *Q. E. D.*

Corol. Unde nec motus partium fluidi inter se, per pressionem fluido ubivis in externa superficie illatam, mutari possunt, nisi quatenus aut figura superficiei alicubi mutatur, aut omnes fluidi partes intensius vel remissius sese premendo difficilius vel facilius labuntur inter se.

PROPOSITIO XX. THEOREMA XV.

Si fluidi sphærici, & in æqualibus a centro distantiis homogenei, fundo sphærico concentrico incumbentis partes singulæ versus centrum totius gravitent; sustinet fundum pondus cylindri, cujus basis æqualis est superficiei fundi, & altitudo eadem quæ fluidi incumbentis.



Sit *DHM* superficies fundi, & *AEI* superficies superior fluidi. Superficiebus sphæricis innumeris *BFK*, *CGL* distinguatur fluidum in orbes concentricos æqualiter crassos; & concipe vim gravitatis agere solummodo in superficiem superiorem orbis cujusque, & æquales esse actiones in æquales partes superficierum omnium. Premitur ergo superficies suprema *AE* vi simplici gravitatis propriæ, qua & omnes orbis supremi partes & superficies secunda *BFK* (per prop. XIX.) pro mensura sua æqualiter premuntur. Premitur præterea superficies secunda *BFK* vi propriæ gravitatis, quæ

addita

addita vi priori facit pressionem duplam. Hac pressione, pro mensura sua, & insuper vi propriæ gravitatis, id est, pressione tripla, urgetur superficies tertia *CGL*. Et similiter pressione quadrupla urgetur superficies quarta, quintupla quinta, & sic deinceps. Pressio igitur qua superficies unaquæque urgetur, non est ut quantitas solida fluidi incumbentis, sed ut numerus orbium ad usque summitatem fluidi; & æquatur gravitati orbis infimi multiplicatæ per numerum orbium: hoc est, gravitati solidi cujus ultima ratio ad cylindrum præfinitum (si modo orbium augeatur numerus & minuatur crassitudo in infinitum, sic ut actio gravitatis a superficie infima ad supremam continua reddatur) fiet ratio æqualitatis. Sustinet ergo superficies infima pondus cylindri præfiniti. *Q. E. D.* Et simili argumentatione patet propositio, ubi gravitas decrescit in ratione quavis assignata distantiæ a centro, ut & ubi fluidum sursum rarius est, deorsum densius. *Q. E. D.*

Corol. 1. Igitur fundum non urgetur a toto fluidi incumbentis pondere, sed eam solummodo ponderis partem sustinet quæ in propositione describitur; pondere reliquo a fluidi figura fornicata sustentato.

Corol. 2. In æqualibus autem a centro distantiis eadem semper est pressionis quantitas, sive superficies pressa sit horizonti parallela vel perpendicularis vel obliqua; sive fluidum, a superficie pressa sursum continuatum, surgat perpendiculariter secundum lineam rectam, vel serpit oblique per tortas cavitates & canales, easque regulares vel maxime irregulares, amplas vel angustissimas. Hisce circumstantiis pressionem nil mutari colligitur, applicando demonstrationem theorematis hujus ad casus singulos fluidorum.

Corol. 3. Eadem demonstratione colligitur etiam (per prop. XIX.) quod fluidi gravis partes nullum, ex pressione ponderis incumbentis, acquirunt motum inter se; si modo excludatur motus qui ex condensatione oriatur.

Corol. 4. Et propterea si aliud ejusdem gravitatis specificæ corpus, quod sit condensationis expers, submergatur in hoc fluido, id ex pressione ponderis incumbentis nullum acquiret motum: non descendet, non ascendet, non cogetur figuram suam mutare. Si sphæricum est manebit sphæricum, non obstante pressione; si quadratum est manebit quadratum: idque sive molle sit, sive fluidissimum;

sive

ſive fluido libere innatet, ſive fundo incumbat. Habet enim fluidi pars quælibet interna rationem corporis ſubmerſi, & par eſt ratio omnium ejuſdem magnitudinis, figuræ & gravitatis ſpecificæ ſubmerſorum corporum. Si corpus ſubmerſum ſervato pondere liqueſceret & indueret formam fluidi; hoc, ſi prius aſcenderet vel deſcenderet vel ex preſſione figuram novam indueret, etiam nunc aſcenderet vel deſcenderet vel figuram novam induere cogeretur: id adeo quia gravitas ejus cæteræque motuum cauſæ permanent. Atqui (per caſ. 5. prop. xix.) jam quieſceret & figuram retineret. Ergo & prius.

Corol. 5. Proinde corpus quod ſpecifice gravius eſt quam fluidum ſibi contiguum ſubſidebit, & quod ſpecifice levius eſt aſcendet, motumque & figuræ mutationem conſequetur, quantum exceſſus ille vel defectus gravitatis efficere poſſit. Namque exceſſus ille vel defectus rationem habet impulſus, quo corpus, alias in æquilibrio cum fluidi partibus conſtitutum, urgetur; & comparari poteſt cum exceſſu vel defectu ponderis in lance alterutra libræ.

Corol. 6. Corporum igitur in fluidis conſtitutorum duplex eſt gravitas: altera vera & abſoluta, altera apparens, vulgaris & comparativa. Gravitas abſoluta eſt vis tota qua corpus deorſum tendit: relativa & vulgaris eſt exceſſus gravitatis quo corpus magis tendit deorſum quam fluidum ambiens. Prioris generis gravitate partes fluidorum & corporum omnium gravitant in locis ſuis: ideoque conjunctis ponderibus componunt pondus totius. Nam totum omne grave eſt, ut in vaſis liquorum plenis experiri licet; & pondus totius æquale eſt ponderibus omnium partium, ideoque ex iiſdem componitur. Alterius generis gravitate corpora non gravitant in locis ſuis, id eſt, inter ſe collata non prægravant, ſed mutuos ad deſcendendum conatus impedientia permanent in locis ſuis, perinde ac ſi gravia non eſſent. Quæ in aëre ſunt & non prægravant, vulgus gravia non judicat. Quæ prægravant vulgus gravia judicat, quatenus ab aëris pondere non ſuſtinentur. Pondera vulgi nihil aliud ſunt quam exceſſus verorum ponderum ſupra pondus aëris. Unde & vulgo dicuntur levia, quæ ſunt minus gravia, aërique prægravanti cedendo ſuperiora petunt. Comparative levia ſunt, non vere, quia deſcendunt in vacuo. Sic & in aqua corpora, quæ ob majorem vel minorem gravitatem deſcendunt vel aſcendunt, ſunt comparative &

appa-

apparenter gravia vel levia, & eorum gravitas vel levitas comparativa & apparens est excessus vel defectus quo vera eorum gravitas vel superat gravitatem aquæ vel ab ea superatur. Quæ vero nec prægravando descendunt, nec prægravanti cedendo ascendunt, etiamsi veris suis ponderibus adaugeant pondus totius, comparative tamen & in sensu vulgi non gravitant in aqua. Nam similis est horum casuum demonstratio.

Corol. 7. Quæ de gravitate demonstrantur, obtinent in aliis quibuscunque viribus centripetis.

Corol. 8. Proinde si medium, in quo corpus aliquod movetur, urgeatur vel a gravitate propria, vel ab alia quacunque vi centripeta, & corpus ab eadem vi urgeatur fortius; differentia virium est vis illa motrix, quam in præcedentibus propositionibus ut vim centripetam consideravimus. Sin corpus a vi illa urgeatur levius, differentia virium pro vi centrifuga haberi debet.

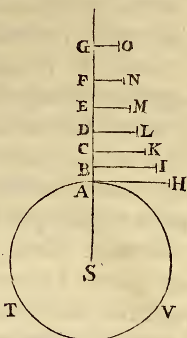
Corol. 9. Cum autem fluida premendo corpora inclusa non mutent eorum figuras externas, patet insuper (per corollarium prop. XIX.) quod non mutabunt situm partium internarum inter se: proindeque, si animalia immergantur, & sensatio omnis a motu partium oriatur; nec lædent corpora immersa, nec sensationem ullam excitabunt, nisi quatenus hæc corpora a compressione condensari possunt. Et par est ratio cujuscunque corporum systematis fluido comprimente circundati. Systematis partes omnes iisdem agitabuntur motibus, ac si in vacuo constituerentur, ac solam retinerent gravitatem suam comparativam, nisi quatenus fluidum vel motibus earum nonnihil resistat, vel ad easdem compressione conglutinandas requiratur.

PROPOSITIO XXI. THEOREMA XVI.

Sit fluidi cujusdam densitas compressioni proportionalis, & partes ejus a vi centripeta distantiis suis a centro reciproce proportionali deorsum trahantur: dico quod, si distantiæ illæ sumantur continue proportionales, densitates fluidi in iisdem distantiis erunt etiam continue proportionales.

Designet *ATV* fundum sphæricum cui fluidum incumbit, *S* centrum, *SA*, *SB*, *SC*, *SD*, *SE*, *SF*, &c. distantias continue proportionales.

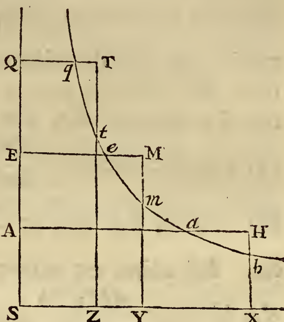
tionales. Erigantur perpendicula *AH*, *BI*, *CK*, *DL*, *EM*, *FN*, &c. quæ ſint ut denſitates medii in locis *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*; & ſpecificæ gravitates in iiſdem locis erunt ut $\frac{AH}{AS}$, $\frac{BI}{BS}$, $\frac{CK}{CS}$, &c. vel, quod perinde eſt, ut $\frac{AH}{AB}$, $\frac{BI}{BC}$, $\frac{CK}{CD}$, &c. Finge primum has gravitates uniformiter continuari ab *A* ad *B*, a *B* ad *C*, a *C* ad *D*, &c. factis per gradus decrementis in punctis *B*, *C*, *D*, &c. Et hæ gravitates ductæ in altitudines *AB*, *BC*, *CD*, &c. conficient preſſiones *AH*, *BI*, *CK*, &c. quibus fundum *ATV* (juxta theorema xv.) urgetur. Suſtinet ergo particula *A* preſſiones omnes *AH*, *BI*, *CK*, *DL*, pergendo in infinitum; & particula *B* preſſiones omnes præter primam *AH*; & particula *C* omnes præter duas primas *AH*, *BI*; & ſic deinceps: ideoque particulæ primæ *A* denſitas *AH* eſt ad particulæ ſecundæ *B* denſitatem *BI* ut ſumma omnium *AH*+*BI*+*CK*+*DL*, in infinitum, ad ſummam omnium *BI*+*CK*+*DL*, &c.



Et *BI* denſitas ſecundæ *B* eſt ad *CK* denſitatem tertiæ *C*, ut ſumma omnium *BI*+*CK*+*DL*, &c. ad ſummam omnium *CK*+*DL*, &c. Sunt igitur ſummæ illæ differentiis ſuis *AH*, *BI*, *CK*, &c. proportionales, atque ideo continue proportionales (per hujus lem. I.) proindeque differentiæ *AH*, *BI*, *CK*, &c. ſummis proportionales, ſunt etiam continue proportionales. Quare cum denſitates in locis *A*, *B*, *C*, &c. ſint ut *AH*, *BI*, *CK*, &c. erunt etiam hæ continue proportionales. Pergatur per ſaltum, & ex æquo in diſtantiis *SA*, *SC*, *SE* continue proportionalibus, erunt denſitates *AH*, *CK*, *EM* continue proportionales. Et eodem argumento, in diſtantiis quibuſvis continue proportionalibus *SA*, *SD*, *SG*, denſitates *AH*, *DL*, *GO* erunt continue proportionales. Coeant jam puncta *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, &c. eo ut progreſſio gravitatum ſpecificarum a fundo *A* ad ſummitatem fluidi continua reddatur, & in diſtantiis quibuſvis continue proportionalibus *SA*, *SD*, *SG*, denſitates *AH*, *DL*, *GO*, ſemper exiſtentes continue proportionales, manebunt etiamnum continue proportionales. *Q. E. D.*

Corol. Hinc ſi detur denſitas fluidi in duobus locis, puta *A* & *E*, col-

E, colligi poteſt ejus denſitas in alio quovis loco *Q*. Centro *S*, aſymptotis rectangulis *SQ*, *SX* deſcribatur hyperbola ſecans perpendicula *AH*, *EM*, *QT* in *a*, *e*, *q*, ut & perpendicula *HX*, *MY*, *TZ*, ad aſymptoton *SX* demiſſa, in *h*, *m* & *t*. Fiat area *YmtZ* ad aream datam *YmhX* ut area data *EeqQ* ad aream datam *EeaA*; & linea *Zt* producta abſcindet lineam *QT* denſitati proportionalem. Namque ſi lineæ *SA*, *SE*, *SQ* ſunt continue proportionales, erunt areæ *EeqQ*, *EeaA* æquales, & inde areæ his proportionales *YmtZ*, *XhmY* etiam æquales, & lineæ *SX*, *SY*, *SZ*, id eſt, *AH*, *EM*, *QT* continue proportionales, ut oportet. Et ſi lineæ *SA*, *SE*, *SQ* obtinent alium quemvis ordinem in ſerie continue proportionalium, lineæ *AH*, *EM*, *QT*, ob proportionales areas hyperbolicas, obtinebunt eundem ordinem in alia ſerie quantitatum continue proportionalium.



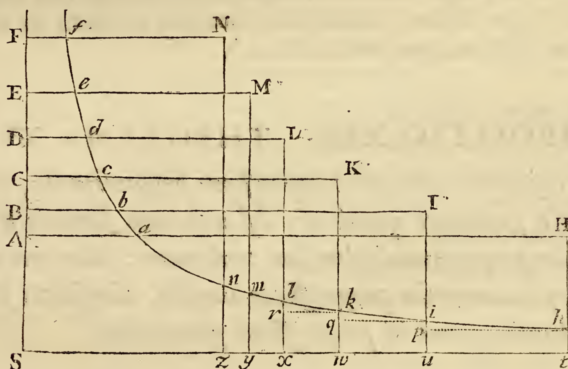
PROPOSITIO XXII. THEOREMA XVII.

Sit fluidi cujuſdam denſitas compreſſioni proportionalis, & partes ejus a gravitate quadratis diſtantiarum ſuarum a centro reciproce proportionali deorſum trahantur: dico quod, ſi diſtantiæ ſumantur in progreſſione muſica, denſitates fluidi in his diſtantiis erunt in progreſſione geometrica.

Deſignet *S* centrum, & *SA*, *SB*, *SC*, *SD*, *SE* diſtantias in progreſſione geometrica. Erigantur perpendicula *AH*, *BI*, *CK*, &c. quæ ſint ut fluidi denſitates in locis *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, &c. & ipſius gravitates ſpecificæ in iiſdem locis erunt $\frac{AH}{SAq}$, $\frac{BI}{SBq}$, $\frac{CK}{SCq}$, &c. Finge has gravitates uniformiter continuari, primam ab *A* ad *B*, ſecundam a *B* ad *C*, tertiam a *C* ad *D*, &c. Et hæ ductæ in altitudines *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, &c. vel, quod perinde eſt, in diſtantias *SA*, *SB*, *SC*, &c. altitudinibus illis proportionales, conficient exponentes preſſio-

De Motu Corporum

num $\frac{AH}{SA}$, $\frac{BI}{SB}$, $\frac{CK}{SC}$, &c. Quare cum densitates sint ut harum pressionum summæ, differentiæ densitatum $AH - BI$, $BI - CK$, &c. erunt ut summarum differentiæ $\frac{AH}{SA}$, $\frac{BI}{SB}$, $\frac{CK}{SC}$, &c. Centro S, asymptotis SA, Sx describatur hyperbola quævis, quæ secet perpendicula AH, BI, CK, &c. in a, b, c, &c. ut & perpendicula ad asymptoton Sx demissa Ht, Iu, Kw in h, i, k; & densitatum differentiæ tu, uw, &c. erunt ut $\frac{AH}{SA}$, $\frac{BI}{SB}$, &c. Et rectangula $tu \times th$, $uw \times ui$, &c. seu tp, uq, &c. ut $\frac{AH \times th}{SA}$, $\frac{BI \times ui}{SB}$, &c. id est, ut Aa, Bb, &c. Est enim, ex natura hyperbolæ, SA ad AH vel St, ut th ad Aa, ideoque $\frac{AH \times th}{SA}$ æquale Aa. Et simili argumento est $\frac{BI \times ui}{SB}$



æquale Bb, &c. Sunt autem Aa, Bb, Cc, &c. continue proportionales, & propterea differentiis suis $Aa - Bb$, $Bb - Cc$, &c. proportionales; ideoque differentiis hisce proportionalia sunt rectangula tp, uq, &c. ut & summis differentiarum $Aa - Cc$ vel $Aa - Dd$ summæ rectangulorum $tp + uq$ vel $tp + uq + wr$. Sunto ejusmodi termini quam plurimi, & summa omnium differentiarum, puta $Aa - Ff$, erit summæ omnium rectangulorum, puta $zthn$, proportionalis. Augeatur numerus terminorum & minuantur distantiæ punctorum A, B, C, &c.

&c. in infinitum, & rectangula illa evadent æqualia areæ hyperbolicæ *zthn*, ideoque huic areæ proportionalis est differentia $Aa - Ff$. Sumantur jam distantiæ quælibet, puta *SA*, *SD*, *SF* progressione musica, & differentiæ $Aa - Dd$, $Dd - Ff$ erunt æquales; & propterea differentiis hisce proportionales areæ *thlx*, *xlnz* æquales erunt inter se, & densitates *St*, *Sx*, *Sz*, id est, *AH*, *DL*, *FN*, continue proportionales. *Q. E. D.*

Corol. Hinc si dentur fluidi densitates duæ quævis, puta *AH* & *BI*, dabitur area *thiu*, harum differentiæ *tu* respondens; & inde invenietur densitas *FN* in altitudine quacunque *SF*, sumendo aream *thnz* ad aream illam datam *thiu* ut est differentia $Aa - Ff$ ad differentiam $Aa - Bb$.

Scholium.

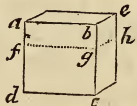
Simili argumentatione probari potest, quod si gravitas particularum fluidi diminuatur in triplicata ratione distantiarum a centro, & quadratorum distantiarum *SA*, *SB*, *SC*, &c. reciproca (nempe $\frac{SA\,cub.}{SAq}$, $\frac{SA\,cub.}{SBq}$, $\frac{SA\,cub.}{SCq}$) sumantur in progressione arithmetica; densitates *AH*, *BI*, *CK*, &c. erunt in progressione geometrica. Et si gravitas diminuatur in quadruplicata ratione distantiarum, & cuborum distantiarum reciproca (puta $\frac{SAqq}{SA\,cub.}$, $\frac{SAqq}{SB\,cub.}$, $\frac{SAqq}{SC\,cub.}$, &c.) sumantur in progressione arithmetica; densitates *AH*, *BI*, *CK*, &c. erunt in progressione geometrica. Et sic in infinitum. Rursus si gravitas particularum fluidi in omnibus distantiis eadem sit, & distantiæ sint in progressione arithmetica, densitates erunt in progressione geometrica, uti Vir Cl. *Edmundus Halleius* invenit. Si gravitas sit ut distantia, & quadrata distantiarum sint in progressione arithmetica, densitates erunt in progressione geometrica. Et sic in infinitum. Hæc ita se habent ubi fluidi compressione condensati densitas est ut vis compressionis, vel, quod perinde est, spatium a fluido occupatum reciproce ut hæc vis. Fingi possunt aliæ condensationis leges, ut quod cubus vis comprimentis sit ut quadrato-quadratum densitatis, seu triplicata ratio vis eadem cum quadruplicata ratione densitatis. Quo in casu, si gravitas est reciproce ut quadratum distantiæ a centro, densitas erit reciproce ut cubus distantiæ. Fin-

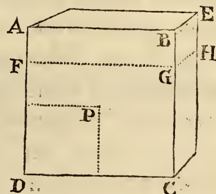
gatur quod cubus vis comprimentis ſit ut quadrato-cubus denſitatis, & ſi gravitas eſt reciproce ut quadratum diſtantiæ, denſitas erit reciproce in ſeſquiplicata ratione diſtantiæ. Fingatur quod vis comprimens ſit in duplicata ratione denſitatis, & gravitas reciproce in ratione duplicata diſtantiæ, & denſitas erit reciproce ut diſtantia. Caſus omnes percurrere longum eſſet. Cæterum per experimenta conſtat quod denſitas aëris ſit ut vis comprimens vel accurate vel ſaltem quam proxime: & propterea denſitas aëris in atmoſphæra terræ eſt ut pondus aëris totius incumbentis, id eſt, ut altitudo mercurii in barometro.

PROPOSITIO XXIII. THEOREMA XVIII.

Si fluidi ex particulis ſe mutuo fugientibus compoſiti denſitas ſit ut compreſſio, vires centrifugæ particularum ſunt reciproce proportionales diſtantiis centrorum ſuorum. Et vice verſa, particulæ viribus quæ ſunt reciproce proportionales diſtantiis centrorum ſuorum ſe mutuo fugientes componunt fluidum elaſticum, cujus denſitas eſt compreſſioni proportionalis.

Includi intelligatur fluidum in ſpatio cubico *ACE*, dein compreſſione redigi in ſpatium cubicum minus *ace*; & particularum, ſimilem ſitum inter ſe in utroque ſpatio obtinentium, diſtantiæ erunt ut cuborum latera *AB*, *ab*; & mediorum denſitates reciproce ut ſpatia continentia *AB cub.* & *ab cub.* In cubi majoris latere plano *ABCD* capiatur quadratum *DP* æquale lateri plano cubi minoris *db*; & ex hypotheſi, preſſio, qua quadratum *DP* urget fluidum incluſum, erit ad preſſionem, qua illud quadratum *db* urget fluidum incluſum, ut medii denſitates ad invicem, hoc eſt, ut *ab cub.* ad *AB cub.*





Sed preſſio, qua quadratum *DB* urget fluidum incluſum, eſt ad preſſionem, qua quadratum *DP* urget idem fluidum, ut quadratum *DB* ad quadratum *DP*, hoc eſt, ut *AB quad.* ad *ab quad.* Ergo, ex

ex æquo, pressio qua quadratum *DB* urget fluidum, est ad pressionem qua quadratum *db* urget fluidum, ut *ab* ad *AB*. Planis *FGH*, *fgh*, per media cuborum ductis, distinguatur fluidum in duas partes, & hæ se mutuo prement iisdem viribus, quibus premuntur a planis *AC*, *ac*, hoc est, in proportione *ab* ad *AB*: ideoque vires centrifugæ, quibus hæ pressiones sustinentur, sunt in eadem ratione. Ob eundem particularum numerum similemque situm in utroque cubo, vires quas particulæ omnes secundum plana *FGH*, *fgh* exercent in omnes, sunt ut vires quas singulæ exercent in singulas. Ergo vires, quas singulæ exercent in singulas secundum planum *FGH* in cubo majore, sunt ad vires, quas singulæ exercent in singulas secundum planum *fgh* in cubo minore, ut *ab* ad *AB*, hoc est, reciproce ut distantiæ particularum ad invicem. *Q. E. D.*

Et vice versa, si vires particularum singularum sunt reciproce ut distantiæ, id est, reciproce ut cuborum latera *AB*, *ab*; summæ virium erunt in eadem ratione, & pressiones laterum *DB*, *db* ut summæ virium; & pressio quadrati *DP* ad pressionem lateris *DB* ut *ab quad.* ad *AB quad.* Et, ex æquo, pressio quadrati *DP* ad pressionem lateris *db* ut *ab cub.* ad *AB cub.* id est, vis compressionis ad vim compressionis ut densitas ad densitatem. *Q. E. D.*

Scholium.

Simili argumento, si particularum vires centrifugæ sint reciproce in duplicata ratione distantiarum inter centra, cubi virium comprimentium erunt ut quadrato-quadrata densitatum. Si vires centrifugæ sint reciproce in triplicata vel quadruplicata ratione distantiarum, cubi virium comprimentium erunt ut quadrato-cubi vel cubo-cubi densitatum. Et universaliter, si D ponatur pro distantia, & E pro densitate fluidi compressi, & vires centrifugæ sint reciproce ut distantiæ dignitas quælibet D^n, cujus index est numerus n; vires comprimentes erunt ut latera cubica dignitatis E^{n+2}, cujus index est numerus $n+2$: & contra. Intelligenda vero sunt hæc omnia de particularum viribus centrifugis quæ terminantur in particulis proximis, aut non longe ultra diffunduntur. Exemplum habemus in corporibus magneticis. Horum virtus attractiva terminatur fere in sui generis corporibus sibi proximis. Magnetis virtus per interpositam

laminam

laminam ferri contrahitur, & in lamina fere terminatur. Nam corpora ulteriora non tam a magnete quam a lamina trahuntur. Ad eundem modum si particulæ fugant alias sui generis particulas sibi proximas, in particulas autem remotiores virtutem nullam exerceant, ex hujusmodi particulis componentur fluida de quibus actum est in hac propositione. Quod si particulæ cujusque virtus in infinitum propagetur, opus erit vi majori ad æqualem condensationem majoris quantitatis fluidi. An vero fluida elastica ex particulis se mutuo fugantibus constent, quæstio physica est. Nos proprietatem fluidorum ex ejusmodi particulis constantium mathematice demonstravimus, ut philosophis ansam præbeamus quæstionem illam tractandi.

SECTIO VI.

De motu & resistentia corporum funependulorum.

PROPOSITIO XXIV. THEOREMA XIX.

Quantitates materiæ in corporibus funependulis, quorum centra oscillationum a centro suspensionis æqualiter distant, sunt in ratione composita ex ratione ponderum & ratione duplicata temporum oscillationum in vacuo.

Nam velocitas, quam data vis in data materia, dato tempore generare potest, est ut vis & tempus directe, & materia inverse. Quo major est vis vel majus tempus vel minor materia, eo major generabitur velocitas. Id quod per motus legem secundam manifestum est. Jam vero si pendula ejusdem sint longitudinis, vires motrices in locis a perpendiculo æqualiter distantibus sunt ut pondera: ideoque si corpora duo oscillando describant arcus æquales, & arcus illi dividantur in partes æquales; cum tempora quibus corpora describant singulas arcuum partes correspondentes sint ut tempora oscillationum totarum, erunt velocitates ad invicem in correspondentibus oscillationum partibus, ut vires motrices & tota oscillationum tempora directe & quantitates materiæ reciproce: ideoque quantitates materiæ ut vires & oscillationum tempora directe & velocitates reciproce. Sed velocitates reciproce sunt ut tempora, atque ideo

ideo tempora directe & velocitates reciproce sunt ut quadrata temporum, & propterea quantitates materiæ sunt ut vires motrices & quadrata temporum, id est, ut pondera & quadrata temporum. *Q. E. D.*

Corol. 1. Ideoque si tempora sunt æqualia, quantitates materiæ in singulis corporibus erunt ut pondera.

Corol. 2. Si pondera sunt æqualia, quantitates materiæ erunt ut quadrata temporum.

Corol. 3. Si quantitates materiæ æquantur, pondera erunt reciproce ut quadrata temporum.

Corol. 4. Unde cum quadrata temporum, cæteris paribus, sint ut longitudines pendulorum; si & tempora & quantitates materiæ æqualia sunt, pondera erunt ut longitudines pendulorum.

Corol. 5. Et universaliter, quantitas materiæ pendulæ est ut pondus & quadratum temporis directe, & longitudo penduli inverse.

Corol. 6. Sed & in medio non resistente quantitas materiæ pendulæ est ut pondus comparativum & quadratum temporis directe & longitudo penduli inverse. Nam pondus comparativum est vis motrix corporis in medio quovis gravi, ut supra explicui; ideoque idem præstat in tali medio non resistente atque pondus absolutum in vacuo.

Corol. 7. Et hinc liquet ratio tum comparandi corpora inter se, quoad quantitatem materiæ in singulis; tum comparandi pondera ejusdem corporis in diversis locis, ad cognoscendam variationem gravitatis. Factis autem experimentis quam accuratissimis inveni semper quantitatem materiæ in corporibus singulis eorum ponderi proportionalem esse.

PROPOSITIO XXV. THEOREMA XX.

Corpora Funependula quibus, in medio quovis, resistitur in ratione momentorum temporis, & corpora funependula quæ in ejusdem gravitatis specificæ medio non resistente moventur, oscillationes in cycloide eodem tempore peragunt, & arcuum partes proportionales simul describunt.

Sit *AB* cycloidis arcus, quem corpus *D* tempore quovis in medio non resistente oscillando describit. Bisecetur idem in *C*, ita ut *C* sit infimum

infimum ejus punctum; & erit vis acceleratrix qua corpus urgetur in loco quovis D vel d vel E ut longitudo arcus CD vel Cd vel CE. Exponatur vis illa per eundem arcum; & cum reſiſtentia ſit ut momentum temporis, ideoque detur, exponatur eadem per datam arcus cycloidis partem CO, & ſumatur arcus Od in ratione ad arcum CD quam habet arcus OB ad arcum CB: & vis qua corpus in d urgetur in medio reſiſtente, cum ſit exceſſus vis Cd ſupra reſiſtentiam CO, exponetur per arcum Od, ideoque erit ad vim, qua corpus D urgetur in medio non reſiſtente in loco D, ut arcus Od ad arcum CD; & propterea etiam in loco B ut arcus OB ad arcum CB. Proinde ſi corpora duo, D, d exeant de loco B, & his viribus urgeantur: cum vires ſub initio ſint ut arcus CB & OB, erunt velocitates primæ & arcus primo deſcripti in eadem ratione. Sunto arcus illi BD & Bd, & arcus reliqui CD, Od erunt in eadem ratione. Proinde vires, ipſis CD, Od proportionales manebunt in eadem ratione ac ſub initio, & propterea corpora pergent arcus in eadem ratione ſimul deſcribere. Igitur vires & velocitates & arcus reliqui CD, Od ſemper erunt ut arcus toti CB, OB, & propterea arcus illi reliqui ſimul deſcribentur. Quare corpora duo D, d ſimul pervenient ad loca C & O, alterum quidem in medio non reſiſtente ad locum C, & alterum in medio reſiſtente ad locum O. Cum autem velocitates in C & O ſint ut arcus CB, OB; erunt arcus, quos corpora ulterius pergendo ſimul deſcribunt, in eadem ratione. Sunto illi CE & Oe. Vis qua corpus D in medio non reſiſtente retardatur in E eſt ut CE, & vis qua corpus d in medio reſiſtente

ſiſtente retardatur in *e* eſt ut ſumma vis *Ce* & reſiſtentiæ *CO*, id eſt ut *Oe*; ideoque vires, quibus corpora retardantur, ſunt ut arcubus *CE*, *Oe* proportionales arcus *CB*, *OB*; proindeque velocitates, in data illa ratione retardatæ, manent in eadem illa data ratione. Velocitates igitur & arcus iiſdem deſcripti ſemper ſunt ad invicem in data illa ratione arcuum *CB* & *OB*; & propterea ſi ſumantur arcus toti *AB*, *aB* in eadem ratione, corpora *D*, *d* ſimul deſcribent hos arcus, & in locis *A* & *a* motum omnem ſimul amittent. Iſochronæ ſunt igitur oſcillationes totæ, & arcubus totis *BA*, *Ba* proportionales ſunt arcuum partes quælibet *BD*, *Bd* vel *BE*, *Be* quæ ſimul deſcribuntur. *Q. E. D.*

Corol. Igitur motus velociſſimus in medio reſiſtente non incidit in punctum infimum *C*, ſed reperitur in puncto illo *O*, quo arcus totus deſcriptus *aB* biſecatur. Et corpus ſubinde pergendo ad *a*, iiſdem gradibus retardatur quibus antea accelerabatur in deſcenſu ſuo a *B* ad *O*.

PROPOSITIO XXVI. THEOREMA XXI.

Corporum funependulorum, quibus reſiſtitur in ratione velocitatum, oſcillationes in cycloide ſunt Iſochronæ.

Nam ſi corpora duo, a centris ſuſpenſionum æqualiter diſtantia, oſcillando deſcribant arcus inæquales, & velocitates in arcuum partibus correſpondentibus ſint ad invicem ut arcus toti; reſiſtentiæ velocitatibus proportionales, erunt etiam ad invicem ut iidem arcus. Proinde ſi viribus motricibus a gravitate oriundis, quæ ſint ut iidem arcus, auferantur vel addantur hæ reſiſtentiæ, erunt differentiæ vel ſummæ ad invicem in eadem arcuum ratione: cumque velocitatum incrementa vel decrementa ſint ut hæ differentiæ vel ſummæ, velocitates ſemper erunt ut arcus toti: Igitur velocitates, ſi ſint in aliquo caſu ut arcus toti, manebunt ſemper in eadem ratione. Sed in principio motus, ubi corpora incipiunt deſcendere & arcus illos deſcribere, vires, cum ſint arcubus proportionales, generabunt velocitates arcubus proportionales. Ergo velocitates ſemper erunt ut arcus toti deſcribendi, & propterea arcus illi ſimul deſcribentur. *Q. E. D.*

PROPOSITIO XXVII. THEOREMA XXII.

Si corporibus funependulis resistitur in duplicata ratione velocitatum, differentiæ inter tempora oscillationum in medio resistente ac tempora oscillationum in ejusdem gravitatis specificæ medio non resistente, erunt arcubus oscillando descriptis proportionales quam proxime.

Nam pendulis æqualibus in medio resistente describantur arcus inæquales A, B; & resistentia corporis in arcu A, erit ad resistentiam corporis in parte correspondente arcus B, in duplicata ratione velocitatum, id est, ut AA ad BB, quam proxime. Si resistentia in arcu B esset ad resistentiam in arcu A ut AB ad AA; tempora in arcubus A & B forent æqualia, per propositionem superiorem. Ideoque resistentia AA in arcu A, vel AB in arcu B, efficit excessum temporis in arcu A supra tempus in medio non resistente; & resistentia BB efficit excessum temporis in arcu B supra tempus in medio non resistente. Sunt autem excessus illi ut vires efficientes AB & BB quam proxime, id est, ut arcus A & B. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc ex oscillationum temporibus, in medio resistente, in arcubus inæqualibus factarum, cognosci possunt tempora oscillationum in ejusdem gravitatis specificæ medio non resistente. Nam differentia temporum erit ad excessum temporis in arcu minore supra tempus in medio non resistente, ut differentia arcuum ad arcum minorem.

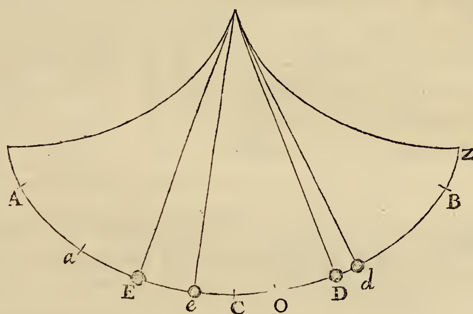
Corol. 2. Oscillationes breviores sunt magis isochronæ, & brevissimæ iisdem temporibus peraguntur ac in medio non resistente, quam proxime. Earum vero quæ in majoribus arcubus fiunt, tempora sunt paulo majora, propterea quod resistentia in descensu corporis qua tempus producitur, major sit pro ratione longitudinis in descensu descriptæ, quam resistentia in ascensu subsequente qua tempus contrahitur. Sed & tempus oscillationum tam brevium quam longarum nonnihil produci videtur per motum medii. Nam corporibus tardescentibus paulo minus resistitur, pro ratione velocitatis, & corporibus acceleratis paulo magis quam iis quæ uniformiter progrediuntur: idque quia medium, eo quem a corporibus accepit

accepit motu, in eandem plagam pergendo, in priore casu magis agitatur, in posteriore minus; ac proinde magis vel minus cum corporibus motis conspirat. Pendulis igitur in descensu magis resistit, in ascensu minus quam pro ratione velocitatis, & ex utraque causa tempus producitur.

PROPOSITIO XXVIII. THEOREMA XXIII.

Si corpori funependulo in cycloide oscillanti resistitur in ratione momentorum temporis, erit ejus resistentia ad vim gravitatis ut excessus arcus descensu toto descripti supra arcum ascensu subsequente descriptum, ad penduli longitudinem duplicatam.

Designet *BC* arcum descensu descriptum, *Ca* arcum ascensu descriptum, & *Aa* differentiam arcuum: & stantibus quæ in propositione xxv. constructa & demonstrata sunt, erit vis, qua corpus oscillans urgetur in loco quovis *D*, ad vim resistentiæ ut arcus *CD* ad arcum *CO*, qui semissis est differentiæ illius *Aa*. Ideoque vis,

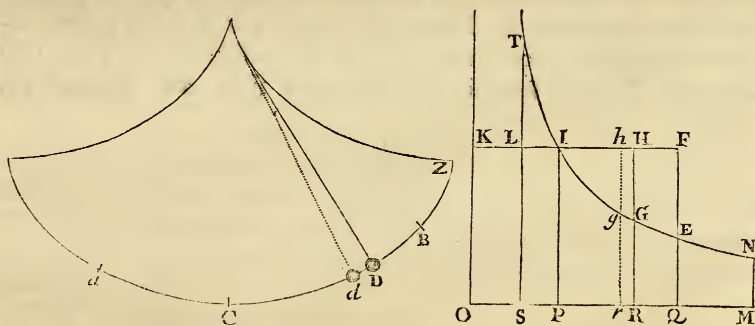


qua corpus oscillans urgetur in cycloidis principio seu puncto altissimo, id est, vis gravitatis, erit ad resistentiam ut arcus cycloidis inter punctum illud supremum & punctum infimum *C* ad arcum *CO*; id est (si arcus duplicentur) ut cycloidis totius arcus, seu dupla penduli longitudo, ad arcum *Aa*. *Q. E. D.*

PROPOSITIO XXIX. PROBLEMA VI.

Posito quod corpori in cycloide oscillanti resistitur in duplicata ratione velocitatis: invenire resistentiam in locis singulis.

Sit Ba arcus oscillatione integra descriptus, sitque C infimum cycloidis punctum, & CZ semissis arcus cycloidis totius, longitudini penduli æqualis; & quæratur resistentia corporis in loco quovis D. Secetur recta infinita OQ in punctis O, S, P, Q, ea lege, ut (si erigantur perpendicula OK, ST, PI, QE, centroque O & asymptotis OK, OQ describatur hyperbola $TIGE$ secans perpendicula ST, PI, QE in T, I & E, & per punctum I agatur KF parallela asymptoto OQ occurrens asymptoto OK in K, & perpendiculis ST & QE in L & F) fuerit area hyperbolica $PIEQ$ ad aream hyperbolicam $PITS$ ut arcus BC descensu corporis descriptus ad arcum



Ca ascensu descriptum, & area IEF ad aream ILT ut OQ ad OS. Dein perpendiculo MN abscindatur area hyperbolica $PINM$ quæ sit ad aream hyperbolicam $PIEQ$ ut arcus CZ ad arcum BC descensu descriptum. Et si perpendiculo RG abscindatur area hyperbolica $PIGR$, quæ sit ad aream $PIEQ$ ut arcus quilibet CD ad arcum BC descensu toto descriptum; erit resistentia in loco D ad vim gravitatis, ut area $\frac{OR}{OQ} IEF - IGH$ ad aream $PINM$.

Nam cum vires a gravitate oriundæ quibus corpus in locis Z, B, D, a urgetur, sint ut arcus CZ, CB, CD, Ca, & arcus illi sint ut areæ

$PINM$,

$PINM$, $PIEQ$, $PIGR$, $PITS$; exponantur tum arcus tum vires per has areas respective. Sit insuper Dd spatium quam minimum a corpore descendente descriptum, & exponatur idem per aream quam minimam $RGgr$ parallelis RG, rg comprehensam; & producatur rg ad h, ut sint $GHhg$, & $RGgr$ contemporanea arearum IGH, $PIGR$ decrementa. Et areæ $\frac{OR}{OQ} IEF - IGH$ incrementum $GHhg - \frac{Rr}{OQ} IEF$, seu $Rr \times HG - \frac{Rr}{OQ} IEF$, erit ad areæ $PIGR$ decrementum $RGgr$, seu $Rr \times RG$, ut $HG - \frac{IEF}{OQ}$ ad RG; ideoque ut $OR \times HG - \frac{OR}{OQ} IEF$ ad $OR \times GR$ seu $OP \times PI$, hoc est (ob æqualia $OR \times HG$, $OR \times HR - OR \times GR$, $ORHK - OPIK$, $PIHR$ & $PIGR + IGH$) ut $PIGR + IGH - \frac{OR}{OQ} IEF$ ad $OPIK$. Igitur si area $\frac{OR}{OQ} IEF - IGH$ dicatur Y, atque areæ $PIGR$ decrementum $RGgr$ detur, erit incrementum areæ Y ut $PIGR - Y$.

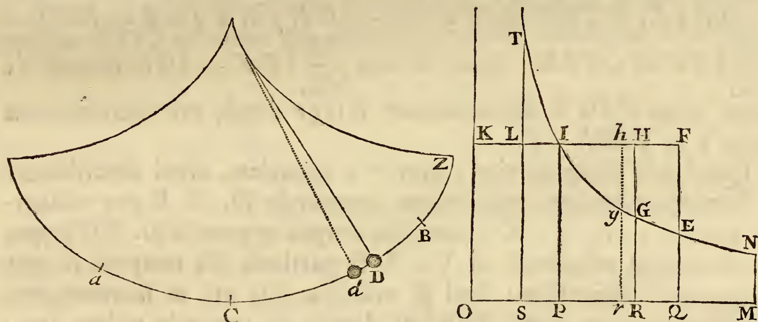
Quod si V designet vim a gravitate oriundam, arcui describendo CD proportionalem, qua corpus urgetur in D, & R pro resistentia ponatur; erit V—R vis tota qua corpus urgetur in D. Est itaque incrementum velocitatis ut V—R & particula illa temporis in qua factum est conjunctim: Sed & velocitas ipsa est ut incrementum contemporaneum spatii descripti directe & particula eadem temporis inverse. Unde, cum resistentia per hypothesin sit ut quadratum velocitatis, incrementum resistentiæ (per lem. II.) erit ut velocitas & incrementum velocitatis conjunctim, id est, ut momentum spatii & V—R conjunctim; atque ideo, si momentum spatii detur, ut V—R; id est, si pro vi V scribatur ejus exponens $PIGR$, & resistentia R exponatur per aliam aliquam aream Z, ut $PIGR$ —Z.

Igitur area $PIGR$ per datorum momentorum subductionem uniformiter decrescente, crescunt area Y in ratione $PIGR$ — Y, & area Z in ratione $PIGR$—Z. Et propterea si areæ Y & Z simul incipiant & sub initio æquales sint, hæ per additionem æqualium momentorum pergent esse æquales, & æqualibus itidem momentis

subinde

ſubinde decreſcentes ſimul evaneſcent. Et viciſſim, ſi ſimul incipiunt & ſimul evaneſcunt, æqualia habebunt momenta & ſemper erunt æquales: id adeo quia ſi reſiſtentia Z augeatur, velocitas una cum arcu illo *Ca*, qui in aſcenſu corporis deſcribitur, diminuetur; & puncto in quo motus omnis una cum reſiſtentia ceſſat propius accedente ad punctum *C*, reſiſtentia citius evaneſcet quam area Y. Et contrarium eveniet ubi reſiſtentia diminuitur.

Jam vero area Z incipit deſinitque ubi reſiſtentia nulla eſt, hoc eſt, in principio motus ubi arcus *CD* arcui *CB* æquatur & recta *RG* incidit in rectam *QE*, & in fine motus ubi arcus *CD* arcui *CA* æquatur & *RG* incidit in rectam *ST*. Et area Y ſeu $\frac{OR}{OQ}$ $IEF - IGH$ incipit deſinitque ubi nulla eſt, ideoque ubi $\frac{OR}{OQ}$



IEF & IGH æqualia ſunt: hoc eſt (per conſtructionem) ubi recta *RG* incidit ſucceſſive in rectas *QE* & *ST*. Proindeque areæ illæ ſimul incipiunt & ſimul evaneſcunt, & propterea ſemper ſunt æquales. Igitur area $\frac{OR}{OQ}$ $IEF - IGH$ æqualis eſt areæ Z, per quam reſiſtentia exponitur, & propterea eſt ad aream *PINM* per quam gravitas exponitur, ut reſiſtentia ad gravitatem. *Q. E. D.*

Corol. 1. Eſt igitur reſiſtentia in loco infimo *C* ad vim gravitatis, ut area $\frac{OP}{OQ}$ IEF ad aream *PINM*.

Corol. 2. Fit autem maxima, ubi area *PIHR* eſt ad aream *IEF* ut *OR* ad *OQ*. Eo enim in caſu momentum ejus (nimirum *PIGR* — Y evadit nullum.

Corol.

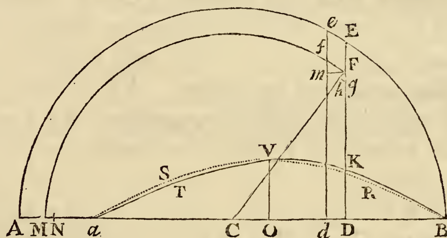
Corol. 3. Hinc etiam innotescit velocitas in locis singulis: quippe quæ est in subduplicata ratione resistentiæ, & ipso motus initio æquatur velocitati corporis in eadem cycloide sine omni resistentia oscillantis.

Cæterum ob difficilem calculum quo resistentia & velocitas per hanc propositionem inveniendæ sunt, visum est propositionem sequentem subjungere.

PROPOSITIO XXX. THEOREMA XXIV.

Si recta aB *æqualis sit cycloidis arcui quem corpus oscillando describit, & ad singula ejus puncta* D *erigantur perpendicula* DK, *quæ sint ad longitudinem penduli ut resistentia corporis in arcus punctis correspondentibus ad vim gravitatis: dico quod differentia inter arcum descensu toto descriptum & arcum ascensu toto subsequente descriptum ducta in arcuum eorundem semisummam, æqualis erit areæ* BKa *a perpendiculis omnibus* DK *occupatæ.*

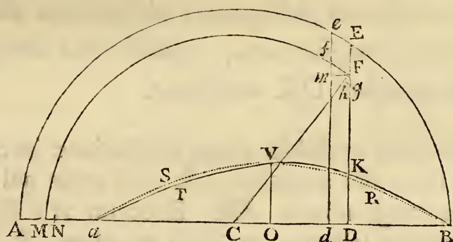
Exponatur enim tum cycloidis arcus, oscillatione integra descriptus, per rectam illam sibi æqualem *aB*, tum arcus qui describeretur in vacuo per longitudinem *AB*. Bisecetur *AB* in *C*, & punctum *C* repræsentabit infimum cycloidis punctum, & erit *CD* ut



vis a gravitate oriunda, qua corpus in *D* secundum tangentem cycloidis urgetur, eamque habebit rationem ad longitudinem penduli quam habet vis in *D* ad vim gravitatis. Exponatur igitur vis

illa

illa per longitudinem *CD*, & vis gravitatis per longitudinem penduli, & si in *DE* capiatur *DK* in ea ratione ad longitudinem penduli quam habet resistentia ad gravitatem, erit *DK* exponens resistentiæ. Centro *C* & intervallo *CA* vel *CB* construatur semicirculus *BEeA*. Describat autem corpus tempore quam minimo spatium *Dd*, & erectis perpendiculis *DE*, *de* circumferentiæ occurrentibus in *E* & *e*, erunt hæc ut velocitates quas corpus in vacuo, descendendo a puncto *B*, acquireret in locis *D* & *d*. Patet hoc (per prop. LII. lib. I.) Exponantur itaque hæ velocitates per perpendicula illa *DE*, *de*; sitque *DF* velocitas quam acquirit in *D* cadendo de *B* in medio resistente. Et si centro *C* & intervallo *CF* describatur circulus *FfM* occurrens rectis *de* & *AB* in *f* & *M*, erit *M* locus ad quem deinceps sine ulteriore resistentia ascenderet, & *df* velocitas quam acquireret in *d*. Unde etiam si *Fg* designet velocitatis momentum quod corpus *D*, describendo spa-



tium quam minimum *Dd*, ex resistentia medii amittit; & sumatur *CN* æqualis *Cg*: erit *N* locus ad quem corpus deinceps sine ulteriore resistentia ascenderet, & *MN* erit decrementum ascensus ex velocitatis illius amissione oriundum. Ad *df* demittatur perpendiculum *Fm*, & velocitatis *DF* decrementum *Fg* a resistentia *DK* genitum, erit ad velocitatis ejusdem incrementum *fm* a vi *CD* genitum, ut vis generans *DK* ad vim generantem *CD*. Sed & ob similia triangula *Fmf*, *Fhg*, *FDC*, est *fm* ad *Fm* seu *Dd* ut *CD* ad *DF*; & ex æquo *Fg* ad *Dd* ut *DK* ad *DF*. Item *Fh* ad *Fg* ut *DF* ad *CF*; & ex æquo perturbate, *Fh* seu *MN* ad *Dd* ut *DK* ad *CF* seu *CM*; ideoque summa omnium $MN \times CM$ æqualis erit summæ omnium $Dd \times DK$. Ad punctum mobile *M* erigi semper intelligatur ordinata rectangula æqualis indeterminatæ *CM*, quæ

motu

motu continuo ducatur in totam longitudinem Aa; & trapezium ex illo motu deſcriptum ſive huic æquale rectangulum $Aa \times \frac{1}{2} aB$ æquabitur ſummæ omnium $MN \times CM$, ideoque ſummæ omnium $\mathcal{D}d \times \mathcal{D}K$, id eſt, areæ $BKVTa$. *Q. E. D.*

Corol. Hinc ex lege reſiſtentiæ & arcuum Ca, CB differentia Aa colligi poteſt proportio reſiſtentiæ ad gravitatem quam proxime.

Nam ſi uniformis ſit reſiſtentia $\mathcal{D}K$, figura $BKTa$ rectangulum erit ſub Ba & $\mathcal{D}K$; & inde rectangulum ſub $\frac{1}{2}Ba$ & Aa erit æquale rectangulo ſub Ba & $\mathcal{D}K$, & $\mathcal{D}K$ æqualis erit $\frac{1}{2}Aa$. Quare cum $\mathcal{D}K$ ſit exponens reſiſtentiæ, & longitudo penduli exponens gravitatis, erit reſiſtentia ad gravitatem ut $\frac{1}{2}Aa$ ad longitudinem penduli; omnino ut in prop. XXVIII. demonſtratum eſt.

Si reſiſtentia ſit ut velocitas, figura $BKTa$ ellipſis erit quam proxime. Nam ſi corpus, in medio non reſiſtente, oſcillatione integra deſcriberet longitudinem BA, velocitas in loco quovis $\mathcal{D}$ foret ut circuli diametro AB deſcripti ordinatim applicata $\mathcal{D}E$. Proinde cum Ba in medio reſiſtente, & BA in medio non reſiſtente, æqualibus circiter temporibus deſcribantur; ideoque velocitates in ſingulis ipſius Ba punctis, ſint quam proxime ad velocitates in punctis correſpondentibus longitudinis BA, ut eſt Ba ad BA; erit velocitas in puncto $\mathcal{D}$ in medio reſiſtente ut circuli vel ellipſeos ſuper diametro Ba deſcripti ordinatim applicata; ideoque figura $BKVTa$ ellipſis erit quam proxime. Cum reſiſtentia velocitati proportionalis ſupponatur, ſit OV exponens reſiſtentiæ in puncto medio O; & ellipſis $BRVSa$, centro O, ſemiaxibus OB, OV deſcripta, figuram $BKVTa$, eique æquale rectangulum $Aa \times BO$, æquabit quamproxime. Eſt igitur $Aa \times BO$ ad $OV \times BO$ ut area ellipſeos hujus ad $OV \times BO$: id eſt, Aa ad OV ut area ſemicirculi ad quadratum radii, ſive ut 11 ad 7 circiter: Et propterea $\frac{7}{11} Aa$ ad longitudinem penduli ut corporis oſcillantis reſiſtentia in O ad ejuſdem gravitatem.

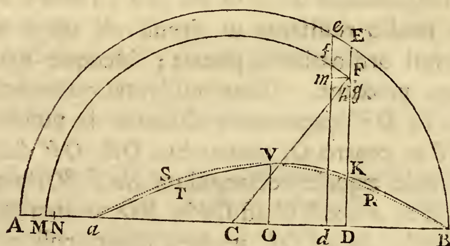
Quod ſi reſiſtentia $\mathcal{D}K$ ſit in duplicata ratione velocitatis, figura $BKVTa$ fere parabola erit verticem habens V & axem OV, ideoque æqualis erit rectangulo ſub $\frac{2}{3} Ba$ & OV quam proxime. Eſt igitur rectangulum ſub $\frac{1}{2}Ba$ & Aa æquale rectangulo ſub $\frac{2}{3}Ba$ & OV, ideoque OV æqualis $\frac{3}{4}Aa$: & propterea corporis oſcillantis reſiſtentia in O ad ipſius gravitatem ut $\frac{3}{4}Aa$ ad longitudinem penduli.

Atque has conclusiones in rebus practicis abunde satis accuratas esse censeo. Nam cum ellipsis vel parabola *BRVSa* congruat cum figura *BKVTa* in puncto medio *V*, hæc si ad partem alterutram *BRV* vel *VSa* excedit figuram illam, deficiet ab eadem ad partem alteram, & sic eidem æquabitur quam proxime.

PROPOSITIO XXXI. THEOREMA XXV.

Si corporis oscillantis resistentia in singulis arcuum descriptorum partibus proportionalibus augeatur vel minuatur in data ratione; differentia inter arcum descensu descriptum & arcum subsequente ascensu descriptum, augebitur vel diminuetur in eadem ratione.

Oritur enim differentia illa ex retardatione penduli per resistentiam medii, ideoque est ut retardatio tota eique proportionalis resistentia retardans. In superiore propositione rectangulum sub recta $\frac{1}{2}aB$ & arcuum illorum *CB*, *Ca* differentia *Aa* æqualis erat areæ



BKTa. Et area illa, si maneat longitudo *aB*, augetur vel diminuitur in ratione ordinatim applicatarum *DK*; hoc est, in ratione resistentiæ, ideoque est ut longitudo *aB* & resistentia conjunctim. Proindeque rectangulum sub *Aa* & $\frac{1}{2}aB$ est ut *aB* & resistentia conjunctim, & propterea *Aa* ut resistentia. *Q. E. D.*

Corol. 1. Unde si resistentia sit ut velocitas, differentia arcuum in eodem medio erit ut arcus totus descriptus: & contra.

Corol. 2. Si resistentia sit in duplicata ratione velocitatis, differentia illa erit in duplicata ratione arcus totius: & contra.

Corol.

Corol. 3. Et univerſaliter, ſi reſiſtentia ſit in triplicata vel alia quavis ratione velocitatis, differentia erit in eadem ratione arcus totius: & contra.

Corol. 4. Et ſi reſiſtentia ſit partim in ratione ſimplici velocitatis, partim in ejuſdem ratione duplicata, differentia erit partim in ratione arcus totius & partim in ejus ratione duplicata: & contra. Eadem erit lex & ratio reſiſtentiæ pro velocitate, quæ eſt differentiæ illius pro longitudine arcus.

Corol. 5. Ideoque ſi, pendulo inæquales arcus ſucceſſive deſcribente, inveniri poteſt ratio incrementi ac decrementi differentiæ hujus pro longitudine arcus deſcripti; habebitur etiam ratio incrementi ac decrementi reſiſtentiæ pro velocitate majore vel minore.

Scholium Generale.

Ex his propoſitionibus, per oſcillationes pendulorum in mediis quibuſcunque, invenire licet reſiſtentiam mediorum. Aeris vero reſiſtentiam inveſtigavi per experimenta ſequentia. Globum ligneum pondere unciarum *Romanarum* $57\frac{7}{22}$, diametro digitorum *Londinenſium* $6\frac{7}{8}$ fabricatum, filo tenui ab unco ſatis firmo ſuſpendi, ita ut inter uncum & centrum oſcillationis globi diſtantia eſſet pedum $10\frac{1}{2}$. In filo punctum notavi pedibus decem & uncia una a centro ſuſpenſionis diſtans; & e regione puncti illius collocavi regulam in digitos diſtinctam, quorum ope notarem longitudines arcuum a pendulo deſcriptas. Deinde numeravi oſcillationes quibus globus octavam motus ſui partem amitteret. Si pendulum deducebatur a perpendiculo ad diſtantiam duorum digitorum, & inde demittebatur; ita ut toto ſuo deſcenſu deſcriberet arcum duorum digitorum, totaque oſcillatione prima, ex deſcenſu & aſcenſu ſubſequente compoſita, arcum digitorum fere quatuor: idem oſcillationibus 164 amiſit octavam motus ſui partem, ſic ut ultimo ſuo aſcenſu deſcriberet arcum digiti unius cum tribus partibus quartis digiti. Si primo deſcenſu deſcripſit arcum digitorum quatuor; amiſit octavam motus partem oſcillationibus 121, ita ut aſcenſu ultimo deſcriberet arcum digitorum $3\frac{1}{2}$. Si primo deſcenſu deſcripſit arcum digitorum octo, ſexdecim, triginta duorum vel ſexaginta quatuor; amiſit octavam motus partem oſcillationibus 69, $35\frac{1}{2}$, $18\frac{1}{2}$, $9\frac{2}{3}$, reſpective. Igitur differentia inter arcus deſcenſu primo & aſcenſu ulti-

mo descriptos, erat in casu primo, secundo, tertio, quarto, quinto, sexto, digitorum $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8 respective. Dividantur eæ differentiæ per numerum oscillationum in casu unoquoque, & in oscillatione una mediocri, qua arcus digitorum $3\frac{3}{4}$, $7\frac{1}{2}$, 15, 30, 60, 120 descriptus fuit, differentia arcuum descensu & subsequente ascensu descriptorum, erit $\frac{1}{656}$, $\frac{1}{242}$, $\frac{1}{69}$, $\frac{4}{71}$, $\frac{8}{37}$, $\frac{24}{29}$ partes digiti respective. Hæ autem in majoribus oscillationibus sunt in duplicata ratione arcuum descriptorum quam proxime, in minoribus vero paulo majores quam in ea ratione; & propterea (per corol. 2. prop. XXXI. libri hujus) resistentia globi, ubi celerius movetur, est in duplicata ratione velocitatis quam proxime; ubi tardius, paulo major quam in ea ratione.

Designet jam V velocitatem maximam in oscillatione quavis, sintque A, B, C quantitates datæ, & fingamus quod differentia arcuum sit $AV+BV^{\frac{3}{2}}+CV^{2}$. Cum velocitates maximæ sint in cycloide ut semisses arcuum oscillando descriptorum, in circulo vero ut semissium arcuum illorum chordæ; ideoque paribus arcubus majores sint in cycloide quam in circulo, in ratione semissium arcuum ad eorundem chordas; tempora autem in circulo sint majora quam in cycloide in velocitatis ratione reciproca; patet arcuum differentias (quæ sunt ut resistentia & quadratum temporis conjunctim) easdem fore, quamproxime, in utraque curva: deberent enim differentiæ illæ in cycloide augeri, una cum resistentia, in duplicata circiter ratione arcus ad chordam, ob velocitatem in ratione illa simplici auctam; & diminui, una cum quadrato temporis, in eadem duplicata ratione. Itaque ut reductio fiat ad cycloidem, eædem sumendæ sunt arcuum differentiæ quæ fuerunt in circulo observatæ, velocitates vero maximæ ponendæ sunt arcubus vel dimidiatis vel integris, hoc est, numeris $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8, 16 analogæ. Scribamus ergo in casu secundo, quarto & sexto numeros 1, 4 & 16 pro V; & prodibit arcuum differentia $\frac{\frac{1}{2}}{121}=A+B+C$ in casu secundo; $\frac{2}{35\frac{1}{2}}=4A+8B+16C$ in casu quarto; & $\frac{8}{9\frac{2}{3}}=16A+64B+256C$ in casu sexto. Et ex his æquationibus, per debitam collationem & reductionem analyticam, fit $A=0{,}0000916$, $B=0{,}0010847$, & $C=0{,}0029558$. Est igitur differentia arcuum ut $0{,}0000916V+0{,}0010847V^{\frac{3}{2}}+0{,}0029558V^{2}$: & prop-

& propterea cum (per corollarium propositionis xxx. applicatum ad hunc casum) resistentia globi in medio arcus oscillando descripti, ubi velocitas est V, sit ad ipsius pondus ut $\frac{7}{11}AV + \frac{7}{10}BV^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}CV^2$ ad longitudinem penduli; si pro A, B & C scribantur numeri inventi, fiet resistentia globi ad ejus pondus, ut $0,0000583\,V + 0,0007593\,V^{\frac{3}{2}} + 0,0022169\,V^2$ ad longitudinem penduli inter centrum suspensionis & regulam, id est, ad 121 digitos. Unde cum V in casu secundo designet 1, in quarto 4, in sexto 16: erit resistentia ad pondus globi in casu secundo ut 0,0030345 ad 121, in quarto ut 0,041748 ad 121, in sexto ut 0,61705 ad 121.

Arcus quem punctum in filo notatum in casu sexto descripsit, erat $120 - \frac{8}{9\frac{2}{3}}$ seu $119\frac{5}{29}$ digitorum. Et propterea cum radius esset 121 digitorum, & longitudo penduli inter punctum suspensionis & centrum globi esset 126 digitorum, arcus quem centrum globi descripsit erat $124\frac{3}{31}$ digitorum. Quoniam corporis oscillantis velocitas maxima, ob resistentiam aeris, non incidit in punctum infimum arcus descripti, sed in medio fere loco arcus totius versatur: hæc eadem erit circiter ac si globus descensu suo toto in medio non resistente describeret arcus illius partem dimidiam digitorum $62\frac{3}{62}$, idque in cycloide, ad quam motum penduli supra reduximus: & propterea velocitas illa æqualis erit velocitati quam globus, perpendiculariter cadendo & casu suo describendo altitudinem arcus illius sinui verso æqualem, acquirere posset. Est autem sinus ille versus in cycloide ad arcum istum $62\frac{3}{62}$ ut arcus idem ad penduli longitudinem duplam 252, & propterea æqualis digitis 15,278. Quare velocitas ea ipsa est quam corpus cadendo & casu suo spatium 15,278 digitorum describendo acquirere posset. Tali igitur cum velocitate globus resistentiam patitur, quæ sit ad ejus pondus ut 0,61705 ad 121, vel (si resistentiæ pars illa sola spectetur quæ est in velocitatis ratione duplicata) ut 0,56752 ad 121.

Experimento autem hydrostatico inveni quod pondus globi hujus lignei esset ad pondus globi aquei magnitudinis ejusdem ut 55 ad 97: & propterea cum 121 sit ad 213,4 in eadem ratione, erit resistentia globi aquei præfata cum velocitate progredientis ad ipsius pondus ut 0,56752 ad 213,4, id est, ut 1 ad $376\frac{1}{50}$. Unde cum pon-

dus

dus globi aquei, quo tempore globus cum velocitate uniformiter continuata describat longitudinem digitorum 30,556, velocitatem illam omnem in globo cadente generare posset; manifestum est quod vis resistentiæ eodem tempore uniformiter continuata tollere posset velocitatem minorem in ratione 1 ad $376\frac{1}{50}$, hoc est, velocitatis totius partem $\frac{1}{376\frac{1}{50}}$. Et propterea quo tempore globus, ea cum velocitate uniformiter continuata, longitudinem semidiametri suæ, seu digitorum $3\frac{7}{16}$, describere posset, eodem amitteret motus sui partem $\frac{1}{3342}$.

Numerabam etiam oscillationes quibus pendulum quartam motus sui partem amisit. In sequente tabula numeri supremi denotant longitudinem arcus descensu primo descripti, in digitis & partibus digiti expressam: numeri medii significant longitudinem arcus ascensu ultimo descripti; & loco infimo stant numeri oscillationum. Experimentum descripsi tanquam magis accuratum quam cum motus pars tantum octava amitteretur. Calculum tentet qui volet.

Descensus primus	2	4	8	16	32	64
Ascensus ultimus	$1\frac{1}{2}$	3	6	12	24	48
Numerus Oscillat.	374	272	$162\frac{1}{2}$	$83\frac{1}{3}$	$41\frac{2}{3}$	$22\frac{2}{3}$

Postea globum plumbeum diametro digitorum 2, & pondere unciarum *Romanarum* $26\frac{1}{4}$ suspendi filo eodem, sic ut inter centrum globi & punctum suspensionis intervallum esset pedum $10\frac{1}{2}$, & numerabam oscillationes quibus data motus pars amitteretur. Tabularum subsequentium prior exhibet numerum oscillationum quibus pars octava motus totius cessavit; secunda numerum oscillationum quibus ejusdem pars quarta amissa fuit.

Descensus primus	1	2	4	8	16	32	64
Ascensus ultimus	$\frac{7}{8}$	$\frac{7}{4}$	$3\frac{1}{2}$	7	14	28	56
Numerus Oscillat.	226	228	193	140	$90\frac{1}{2}$	53	30

Descensus primus	1	2	4	8	16	32	64
Ascensus ultimus	$\frac{3}{4}$	$1\frac{1}{2}$	3	6	12	24	48
Numerus Oscillat.	510	518	420	318	204	121	70

In tabula priore seligendo ex observationibus tertiam, quintam & septimam,

ſeptimam, & exponendo velocitates maximas in his obſervationibus particulatim per numeros 1, 4, 16 reſpective, & generaliter per quantitatem V ut ſupra: emerget in obſervatione tertia $\frac{\frac{1}{2}}{193} = A + B + C$, in quinta $\frac{2}{90\frac{1}{2}} = 4A + 8B + 16C$, in ſeptima $\frac{8}{30} = 16A + 64B + 256C$. Hæ vero æquationes reductæ dant $A = 0{,}001414$, $B = 0{,}000297$, $C = 0{,}000879$. Et inde prodit reſiſtentia globi cum velocitate V moti in ea ratione ad pondus ſuum unciarum $26\frac{1}{4}$, quam habet $0{,}0009\,V + 0{,}000208\,V^{\frac{3}{2}} + 0{,}000659\,V^2$ ad penduli longitudinem 121 digitorum. Et ſi ſpectemus eam ſolummodo reſiſtentiæ partem quæ eſt in duplicata ratione velocitatis, hæc erit ad pondus globi ut $0{,}000659\,V^2$ ad 121 digitos. Erat autem hæc pars reſiſtentiæ in experimento primo ad pondus globi lignei unciarum $57\frac{7}{22}$ ut $0{,}002217\,V^2$ ad 121: & inde fit reſiſtentia globi lignei ad reſiſtentiam globi plumbei (paribus eorum velocitatibus) ut $57\frac{7}{22}$ in $0{,}002217$ ad $26\frac{1}{4}$ in $0{,}000659$, id eſt, ut $7\frac{1}{3}$ ad 1. Diametri globorum duorum erant $6\frac{7}{8}$ & 2 digitorum, & harum quadrata ſunt ad invicem ut $47\frac{1}{4}$ & 4, ſeu $11\frac{13}{16}$ & 1 quamproxime. Ergo reſiſtentiæ globorum æquivelocium erant in minore ratione quam duplicata diametrorum. At nondum conſideravimus reſiſtentiam fili, quæ certe permagna erat, ac de pendulorum inventa reſiſtentia ſubduci debet. Hanc accurate definire non potui, ſed majorem tamen inveni quam partem tertiam reſiſtentiæ totius minoris penduli; & inde didici quod reſiſtentiæ globorum, dempta fili reſiſtentia, ſunt quam proxime in duplicata ratione diametrorum. Nam ratio $7\frac{1}{3} - \frac{1}{3}$ ad $1 - \frac{1}{3}$, ſeu $10\frac{1}{2}$ ad 1 non longe abeſt a diametrorum ratione duplicata $11\frac{13}{16}$ ad 1.

Cum reſiſtentia fili in globis majoribus minoris ſit momenti, tentavi etiam experimentum in globo cujus diameter erat $18\frac{3}{4}$ digitorum. Longitudo penduli inter punctum ſuſpenſionis & centrum oſcillationis erat digitorum $122\frac{1}{2}$, inter punctum ſuſpenſionis & nodum in filo $109\frac{1}{2}$ dig. Arcus primo penduli deſcenſu a nodo deſcriptus 32 dig. Arcus aſcenſu ultimo poſt oſcillationes quinque ab eodem nodo deſcriptus 28 dig. Summa arcuum ſeu arcus totus oſcillatione mediocri deſcriptus 60 dig. Differentia arcuum 4 dig. Ejus pars decima ſeu differentia inter deſcenſum & aſcenſum in

oſcillatione mediocri $\frac{2}{5}$ dig. Ut radius $109\frac{1}{2}$ ad radium $122\frac{1}{2}$ ita arcus totus 60 dig. oſcillatione mediocri a nodo deſcriptus ad arcum totum $67\frac{1}{8}$ dig. oſcillatione mediocri a centro globi deſcriptum; & ita differentia $\frac{2}{5}$ ad differentiam novam 0,4475. Si longitudo penduli, manente longitudine arcus deſcripti, augeretur in ratione 126 ad $122\frac{1}{2}$; tempus oſcillationis augeretur & velocitas penduli diminueretur in ratione illa ſubduplicata, maneret vero arcuum deſcenſu & ſubſequente aſcenſu deſcriptorum differentia 0,4475. Deinde ſi arcus deſcriptus augeretur in ratione $124\frac{3}{31}$ ad $67\frac{1}{8}$, differentia iſta 0,4475 augeretur in duplicata illa ratione, ideoque evaderet 1,5295. Hæc ita ſe haberent, ex hypotheſi quod reſiſtentia penduli eſſet in duplicata ratione velocitatis. Ergo ſi pendulum deſcriberet arcum totum $124\frac{3}{31}$ digitorum, & longitudo ejus inter punctum ſuſpenſionis & centrum oſcillationis eſſet 126 digitorum, differentia arcuum deſcenſu & ſubſequente aſcenſu deſcriptorum foret 1,5295 digitorum. Et hæc differentia ducta in pondus globi penduli, quod erat unciarum 208, producit 318,136. Rurſus ubi pendulum ſuperius ex globo ligneo conſtructum centro oſcillationis, quod a puncto ſuſpenſionis digitos 126 diſtabat, deſcribebat arcum totum $124\frac{3}{31}$ digitorum, differentia arcuum deſcenſu & aſcenſu deſcriptum fuit $\frac{126}{121}$ in $\frac{8}{9\frac{2}{3}}$, quæ ducta in pondus globi, quod erat unciarum $57\frac{7}{22}$, producit 49,396. Duxi autem differentias haſce in pondera globorum, ut invenirem eorum reſiſtentias. Nam differentiæ oriuntur ex reſiſtentiis, ſuntque ut reſiſtentiæ directe & pondera inverſe. Sunt igitur reſiſtentiæ ut numeri 318,136 & 49,396. Pars autem reſiſtentiæ globi minoris, quæ eſt in duplicata ratione velocitatis, erat ad reſiſtentiam totam ut 0,56752 ad 0,61675, id eſt, ut 45,453 ad 49,396; & pars reſiſtentiæ globi majoris propemodum æquatur ipſius reſiſtentiæ toti; ideoque partes illæ ſunt ut 318,136 & 45,453 quamproxime, id eſt, ut 7 & 1. Sunt autem globorum diametri $18\frac{3}{4}$ & $6\frac{7}{8}$; & harum quadrata $351\frac{9}{16}$ & $47\frac{17}{64}$ ſunt ut 7,438 & 1, id eſt, ut globorum reſiſtentiæ 7 & 1 quamproxime. Differentia rationum haud major eſt, quam quæ ex fili reſiſtentia oriri potuit. Igitur reſiſtentiarum partes illæ quæ ſunt, paribus globis, ut quadrata velocitatum; ſunt etiam, paribus velocitatibus, ut quadrata diametrorum globorum.

Cæterum globorum, quibus uſus ſum in his experimentis, maximus non erat perfecte ſphæricus, & propterea in calculo hic allato minutias quaſdam brevitatis gratia neglexi; de calculo accurato in experimento non ſatis accurato minime ſollicitus. Optarim itaque, cum demonſtratio vacui ex his dependeat, ut experimenta cum globis & pluribus & majoribus & magis accuratis tentarentur. Si globi ſumantur in proportione geometrica, puta quorum diametri ſint digitorum 4, 8, 16, 32; ex progreſſione experimentorum colligetur quid in globis adhuc majoribus evenire debeat.

Jam vero conferendo reſiſtentias diverſorum fluidorum inter ſe tentavi ſequentia. Arcam ligneam paravi longitudine pedum quatuor, latitudine & altitudine pedis unius. Hanc operculo nudatam implevi aqua fontana, fecique ut immerſa pendula in medio aquæ oſcillando moverentur. Globus autem plumbeus pondere $166\frac{1}{6}$ unciarum, diametro $3\frac{5}{8}$ digitorum movebatur ut in tabula ſequente deſcripſimus, exiſtente videlicet longitudine penduli a puncto ſuſpenſionis ad punctum quoddam in filo notatum 126 digitorum, ad oſcillationis autem centrum $134\frac{3}{8}$ digitorum.

Arcus deſcenſu primo a puncto in filo notato deſcriptus, digitorum	64	32	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
Arcus aſcenſu ultimo deſcriptus, digitorum	48	24	12	6	3	$1\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{16}$
Arcuum differentia motui amiſſo proportionalis, digitorum	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
Numerus Oſcillationum in aqua			$\frac{29}{60}$	$1\frac{1}{5}$	3	7	$11\frac{1}{4}$	$12\frac{2}{3}$	$13\frac{1}{3}$
Numerus Oſcillationum in aere	$85\frac{1}{2}$		287	535					

In experimento columnæ quartæ, motus æquales oſcillationibus 535 in aere, & $1\frac{1}{5}$ in aqua amiſſi ſunt. Erant quidem oſcillationes in aere paulo celeriores quam in aqua. At ſi oſcillationes in aqua in ea ratione accelerarentur ut motus pendulorum in medio utroque fierent æquiveloces, maneret numerus idem oſcillationum $1\frac{1}{5}$ in aqua, quibus motus idem ac prius amitteretur; ob reſiſtentiam auctam & ſimul quadratum temporis diminutum in eadem ratione illa duplicata. Paribus igitur pendulorum velocitatibus motus æquales in aere oſcillationibus 535 & in aqua oſcillationibus $1\frac{1}{5}$ amiſſi ſunt; ideoque reſiſtentia penduli in aqua eſt ad ejus reſiſtentiam in aere

ut 535 ad $1\frac{1}{5}$. Hæc eſt proportio reſiſtentiarum totarum in caſu columnæ quartæ.

Deſignet jam $AV + CV^2$ differentiam arcuum in deſcenſu & ſubſequente aſcenſu deſcriptorum a globo in aere cum velocitate maxima V moto; & cum velocitas maxima in caſu columnæ quartæ ſit ad velocitatem maximam in caſu columnæ primæ, ut 1 ad 8; & differentia illa arcuum in caſu columnæ quartæ ad differentiam in caſu columnæ primæ ut $\frac{2}{535}$ ad $\frac{16}{85\frac{1}{2}}$, ſeu ut $85\frac{1}{2}$ ad 4280: ſcribamus in his caſibus 1 & 8 pro velocitatibus, atque $85\frac{1}{2}$ & 4280 pro differentiis arcuum, & fiet $A + C = 85\frac{1}{2}$ & $8A + 64C = 4280$ ſeu $A + 8C = 535$; indeque per reductionem æquationum proveniet $7C = 449\frac{1}{2}$ & $C = 64\frac{3}{14}$ & $A = 21\frac{2}{7}$: atque ideo reſiſtentia, cum ſit ut $\frac{7}{11}AV + \frac{3}{4}CV^2$; erit ut $13\frac{6}{11}V + 48\frac{9}{56}V^2$. Quare in caſu columnæ quartæ, ubi velocitas erat 1, reſiſtentia tota eſt ad partem ſuam quadrato velocitatis proportionalem, ut $13\frac{6}{11} + 48\frac{9}{56}$ ſeu $61\frac{12}{17}$ ad $48\frac{9}{56}$; & idcirco reſiſtentia penduli in aqua eſt ad reſiſtentiæ partem illam in aere, quæ quadrato velocitatis proportionalis eſt, quæque ſola in motibus velocioribus conſideranda venit, ut $61\frac{12}{17}$ ad $48\frac{9}{56}$ & 535 ad $1\frac{1}{5}$ conjunctim, id eſt, ut 571 ad 1. Si penduli in aqua oſcillantis filum totum fuiſſet immerſum, reſiſtentia ejus fuiſſet adhuc major; adeo ut penduli in aqua oſcillantis reſiſtentia illa, quæ velocitatis quadrato proportionalis eſt, quæque ſola in corporibus velocioribus conſideranda venit, ſit ad reſiſtentiam ejuſdem penduli totius, eadem cum velocitate in aere oſcillantis, ut 850 ad 1 circiter, hoc eſt, ut denſitas aquæ ad denſitatem aeris quamproxime.

In hoc calculo ſumi quoque deberet pars illa reſiſtentiæ penduli in aqua, quæ eſſet ut quadratum velocitatis, ſed (quod mirum forte videatur) reſiſtentia in aqua augebatur in ratione velocitatis pluſquam duplicata. Ejus rei cauſam inveſtigando, in hanc incidi, quod arca nimis anguſta eſſet pro magnitudine globi penduli, & motum aquæ cedentis præ anguſtia ſua nimis impediebat. Nam ſi globus pendulus, cujus diameter erat digiti unius, immergeretur; reſiſtentia augebatur in duplicata ratione velocitatis quam proxime. Id tentabam conſtruendo pendulum ex globis duobus, quorum inferior & minor oſcillaretur in aqua, ſuperior & major proxime ſupra aquam filo affixus eſſet, & in aere oſcillando, adjuvaret motum penduli

duli eumque diuturniorem redderet. Experimenta autem hoc modo inſtituta ſe habebant ut in tabula ſequente deſcribitur. Liber Secundus.

Arcus deſcenſu primo deſcriptus	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
Arcus aſcenſu ultimo deſcriptus	12	6	3	$1\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{16}$
Arcuum diff. motui amiſſo proport.	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
Numerus Oſcillationum	$3\frac{3}{8}$	$6\frac{1}{2}$	$12\frac{1}{12}$	$21\frac{1}{5}$	34	53	$62\frac{1}{5}$

Conferendo reſiſtentias mediorum inter ſe, effeci etiam ut pendula ferrea oſcillarentur in argento vivo. Longitudo fili ferrei erat pedum quaſi trium, & diameter globi penduli quaſi tertia pars digiti. Ad filum autem proxime ſupra mercurium affixus erat globus alius plumbeus ſatis magnus ad motum penduli diutius continuandum. Tum vaſculum, quod capiebat quaſi libras tres argenti vivi, implebam vicibus alternis argento vivo & aqua communi, ut pendulo in fluido utroque ſucceſſive oſcillante, invenirem proportionem reſiſtentiarum: & prodiit reſiſtentia argenti vivi ad reſiſtentiam aquæ ut 13 vel 14 ad 1 circiter: id eſt, ut denſitas argenti vivi ad denſitatem aquæ. Ubi globum pendulum paulo majorem adhibebam, puta cujus diameter eſſet quaſi $\frac{1}{3}$ vel $\frac{2}{3}$ partes digiti, prodibat reſiſtentia argenti vivi in ea ratione ad reſiſtentiam aquæ, quam habet numerus 12 vel 10 ad 1 circiter. Sed experimento priori magis fidendum eſt, propterea quod in his ultimis vas nimis anguſtum fuit pro magnitudine globi immerſi. Ampliato globo, deberet etiam vas ampliari. Conſtitueram quidem hujuſmodi experimenta in vaſis majoribus & in liquoribus tum metallorum fuſorum, tum aliis quibuſdam tam calidis quam frigidis repetere: ſed omnia experiri non vacat, & ex jam deſcriptis ſatis liquet reſiſtentiam corporum celeriter motorum denſitati fluidorum in quibus moventur proportionalem eſſe quam proxime. Non dico accurate. Nam fluida tenaciora, pari denſitate, proculdubio magis reſiſtunt quam liquidiora, ut oleum frigidum quam calidum, calidum quam aqua pluvialis, aqua quam ſpiritus vini. Verum in liquoribus, qui ad ſenſum ſatis fluidi ſunt, ut in aere, in aqua ſeu dulci ſeu ſalſa, in ſpiritibus vini, terebinthi & ſalium, in oleo a fæcibus per deſtillationem liberato & calefacto, oleoque vitrioli & mercurio, ac metallis liquefactis, & ſiqui ſint alii, qui tam fluidi ſunt ut in vaſis agitati motum impreſſum diutius conſervent, effuſique liberrime in guttas decurrendo reſolvantur, nullus dubito

De Motu Corporum.

dubito quin regula allata satis accurate obtineat: præsertim si experimenta in corporibus pendulis & majoribus & velocius motis instituantur.

Denique cum nonnullorum opinio sit, medium quoddam æthereum & longe subtilissimum extare, quod omnes omnium corporum poros & meatus liberrime permeet; a tali autem medio per corporum poros fluente resistentia oriri debeat: ut tentarem an resistentia, quam in motis corporibus experimur, tota sit in eorum externa superficie, an vero partes etiam internæ in superficiebus propriis resistentiam notabilem sentiant, excogitavi experimentum tale. Filo pedum undecim longitudinis ab unco chalybeo satis firmo, mediante annulo chalybeo, suspendebam pyxidem abiegnam rotundam, ad constituendum pendulum longitudinis prædictæ. Uncus sursum præacutus erat acie concava, ut annulus arcu suo superiore aciei innixus liberrime moveretur. Arcui autem inferiori annectebatur filum. Pendulum ita constitutum deducebam a perpendiculo ad distantiam quasi pedum sex, idque secundum planum aciei unci perpendiculare, ne annulus, oscillante pendulo, supra aciem unci ultro citroque laberetur. Nam punctum suspensionis, in quo annulus uncum tangit, immotum manere debet. Locum igitur accurate notabam, ad quem deduxeram pendulum, dein pendulo demisso notabam alia tria loca ad quæ redibat in fine oscillationis primæ, secundæ ac tertiæ. Hoc repetebam sæpius, ut loca illa quam potui accuratissime invenirem. Tum pyxidem plumbo & gravioribus, quæ ad manus erant, metallis implebam. Sed prius ponderabam pyxidem vacuam, una cum parte fili quæ circum pyxidem volvebatur ac dimidio partis reliquæ quæ inter uncum & pyxidem pendulam tendebatur. Nam filum tensum dimidio ponderis sui pendulum a perpendiculo digressum semper urget. Huic ponderi addebam pondus aeris quem pyxis capiebat. Et pondus totum erat quasi pars septuagesima octava pyxidis metallorum plenæ. Tum quoniam pyxis metallorum plena, pondere suo tendendo filum, augebat longitudinem penduli, contrahebam filum ut penduli jam oscillantis eadem esset longitudo ac prius. Dein pendulo ad locum primo notatum retracto ac dimisso, numerabam oscillationes quasi septuaginta & septem, donec pyxis ad locum secundo notatum rediret, totidemque subinde donec pyxis ad

locum

locum tertio notatum rediret, atque rursus totidem donec pyxis reditu suo attingeret locum quartum. Unde concludo quod resistentia tota pyxidis plenæ non majorem habebat proportionem ad resistentiam pyxidis vacuæ quam 78 ad 77. Nam si æquales essent ambarum resistentiæ, pyxis plena ob vim suam insitam septuagies & octies majorem vi insita pyxidis vacuæ, motum suum oscillatorium tanto diutius conservare deberet, atque ideo completis semper oscillationibus 78 ad loca illa notata redire. Rediit autem ad eadem completis oscillationibus 77.

Designet igitur A resistentiam pyxidis in ipsius superficie externa, & B resistentiam pyxidis vacuæ in partibus internis; & si resistentiæ corporum æquivelocium in partibus internis sint ut materia, seu numerus particularum quibus resistitur: erit 78 B resistentia pyxidis plenæ in ipsius partibus internis: ideoque pyxidis vacuæ resistentia tota A+B erit ad pyxidis plenæ resistentiam totam A+78 B ut 77 ad 78, & divisim A+B ad 77 B, ut 77 ad 1, indeque A+B ad B ut 77×77 ad 1, & divisim A ad B ut 5928 ad 1. Est igitur resistentia pyxidis vacuæ in partibus internis quinquies millies minor quam ejusdem resistentia in externa superficie, & amplius. Sic vero disputamus ex hypothesi quod major illa resistentia pyxidis plenæ, non ab alia aliqua causa latente oriatur, sed ab actione sola fluidi alicujus subtilis in metallum inclusum.

Hoc experimentum recitavi memoriter. Nam charta, in qua illud aliquando descripseram, intercidit. Unde fractas quasdam numerorum partes, quæ memoria exciderunt, omittere compulsus sum. Nam omnia denuo tentare non vacat. Prima vice, cum unco infirmo usus essem, pyxis plena citius retardabatur. Causam quærendo, reperi quod uncus infirmus cedebat ponderi pyxidis, & ejus oscillationibus obsequendo in partes omnes flectebatur. Parabam igitur uncum firmum, ut punctum suspensionis immotum maneret, & tunc omnia ita evenerunt uti supra descripsimus.

SECTIO

SECTIO VII.

De motu fluidorum & resistentia projectilium.

PROPOSITIO XXXII. THEOREMA XXVI.

Si corporum systemata duo similia ex æquali particularum numero constent, & particulæ correspondentes similes sint & proportionales, singulæ in uno systemate singulis in altero, & similiter sitæ inter se, ac datam habeant rationem densitatis ad invicem, & inter se temporibus proportionalibus similiter moveri incipiant (eæ inter se quæ in uno sunt systemate & eæ inter se quæ sunt in altero) & si non tangant se mutuo quæ in eodem sunt systemate, nisi in momentis reflexionum, neque attrahant, vel fugent se mutuo, nisi viribus acceleratricibus quæ sint ut particularum correspondentium diametri inverse & quadrata velocitatum directe: dico quod systematum particulæ illæ pergent inter se temporibus proportionalibus similiter moveri.

Corpora similia & similiter sita temporibus proportionalibus inter se similiter moveri dico, quorum situs ad invicem in fine temporum illorum semper sunt similes: puta si particulæ unius systematis cum alterius particulis correspondentibus conferantur. Unde tempora erunt proportionalia, in quibus similes & proportionales figurarum similium partes a particulis correspondentibus describuntur. Igitur si duo sint ejusmodi systemata, particulæ correspondentes, ob similitudinem incœptorum motuum, pergent similiter moveri, usque donec sibi mutuo occurrant. Nam si nullis agitantur viribus, progredientur uniformiter in lineis rectis per motus leg. 1. Si viribus aliquibus se mutuo agitant, & vires illæ sint ut particularum correspondentium diametri inverse & quadrata velocitatum directe; quoniam particularum situs sunt similes & vires proportionales, vires totæ quibus particulæ correspondentes agitantur, ex viribus singulis agitantibus

tibus (per legum corollarium ſecundum) compoſitæ, ſimiles habebunt determinationes, perinde ac ſi centra inter particulas ſimiliter ſita reſpicerent; & erunt vires illæ totæ ad invicem ut vires ſingulæ componentes, hoc eſt, ut correſpondentium particularum diametri inverſe, & quadrata velocitatum directe: & propterea efficient ut correſpondentes particulæ figuras ſimiles deſcribere pergant. Hæc ita ſe habebunt (per corol. 1. & 8 prop. IV. lib. 1.) ſi modo centra illa quieſcant. Sin moveantur, quoniam ob tranſlationum ſimilitudinem, ſimiles manent eorum ſitus inter ſyſtematum particulas; ſimiles inducentur mutationes in figuris quas particulæ deſcribunt. Similes igitur erunt correſpondentium & ſimilium particularum motus uſque ad occurſus ſuos primos, & propterea ſimiles occurſus, & ſimiles reflexiones, & ſubinde (per jam oſtenſa) ſimiles motus inter ſe donec iterum in ſe mutuo inciderint, & ſic deinceps in infinitum. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc ſi corpora duo quævis, quæ ſimilia ſint & ad ſyſtematum particulas correſpondentes ſimiliter ſita, inter ipſas temporibus proportionalibus ſimiliter moveri incipiant, ſintque eorum magnitudines ac denſitates ad invicem ut magnitudines ac denſitates correſpondentium particularum: hæc pergent temporibus proportionalibus ſimiliter moveri. Eſt enim eadem ratio partium majorum ſyſtematis utriuſque atque particularum.

Corol. 2. Et ſi ſimiles & ſimiliter poſitæ ſyſtematum partes omnes quieſcant inter ſe: & earum duæ, quæ cæteris majores ſint, & ſibi mutuo in utroque ſyſtemate correſpondeant, ſecundum lineas ſimiliter ſitas ſimili cum motu utcunque moveri incipiant: hæ ſimiles in reliquis ſyſtematum partibus excitabunt motus, & pergent inter ipſas temporibus proportionalibus ſimiliter moveri; atque ideo ſpatia diametris ſuis proportionalia deſcribere.

PROPOSITIO XXXIII. THEOREMA XXVII.

Iiſdem poſitis, dico quod ſyſtematum partes majores reſiſtuntur in ratione compoſita ex duplicata ratione velocitatum ſuarum & duplicata ratione diametrorum & ratione denſitatis partium ſyſtematum.

Nam reſiſtentia oritur partim ex viribus centripetis vel centrifugis

gis quibus particulæ systematum se mutuo agitant, partim ex occursibus & reflexionibus particularum & partium majorum. Prioris autem generis resistentiæ sunt ad invicem ut vires totæ motrices a quibus oriuntur, id est, ut vires totæ acceleratrices & quantitates materiæ in partibus correspondentibus; hoc est (per hypothesin) ut quadrata velocitatum directe & distantiæ particularum correspondentium inverse & quantitates materiæ in partibus correspondentibus directe: ideoque cum distantiæ particularum systematis unius sint ad distantias correspondentes particularum alterius, ut diameter particulæ vel partis in systemate priore ad diametrum particulæ vel partis correspondentis in altero, & quantitates materiæ sint ut densitates partium & cubi diametrorum; resistentiæ sunt ad invicem ut quadrata velocitatum & quadrata diametrorum & densitates partium systematum. *Q. E. D.* Posterioris generis resistentiæ sunt ut reflexionum correspondentium numeri & vires conjunctim. Numeri autem reflexionum sunt ad invicem ut velocitates partium correspondentium directe, & spatia inter earum reflexiones inverse. Et vires reflexionum sunt ut velocitates & magnitudines & densitates partium correspondentium conjunctim; id est, ut velocitates & diametrorum cubi & densitates partium. Et conjunctis his omnibus rationibus, resistentiæ partium correspondentium sunt ad invicem ut quadrata velocitatum & quadrata diametrorum & densitates partium conjunctim. *Q. E. D.*

Corol. 1. Igitur si systemata illa sint fluida duo elastica ad modum aeris, & partes eorum quiescant inter se: corpora autem duo similia & partibus fluidorum quoad magnitudinem & densitatem proportionalia, & inter partes illas similiter posita, secundum lineas similiter positas utcunque projiciantur; vires autem acceleratrices, quibus particulæ fluidorum se mutuo agitant, sint ut corporum projectorum diametri inverse, & quadrata velocitatum directe: corpora illa temporibus proportionalibus similes excitabunt motus in fluidis, & spatia similia ac diametris suis proportionalia describent.

Corol. 2. Proinde in eodem fluido projectile velox resistentiam patitur, quæ est in duplicata ratione velocitatis quam proxime. Nam si vires, quibus particulæ distantes se mutuo agitant, augerentur in duplicata ratione velocitatis, resistentia foret in eadem ratione duplicata accurate; ideoque in medio, cujus partes ab invicem distantes

tes sese viribus nullis agitant, resistentia est in duplicata ratione velocitatis accurate. Sunto igitur media tria *A*, *B*, *C* ex partibus similibus & æqualibus & secundum distantias æquales regulariter dispositis constantia. Partes mediorum *A* & *B* fugiant se mutuo viribus quæ sint ad invicem ut *T* & *V*, illæ medii *C* ejusmodi viribus omnino destituantur. Et si corpora quatuor æqualia *D*, *E*, *F*, *G* in his mediis moveantur, priora duo *D* & *E* in prioribus duobus *A* & *B*, & altera duo *F* & *G* in tertio *C*; sitque velocitas corporis *D* ad velocitatem corporis *E*, & velocitas corporis *F* ad velocitatem corporis *G* in subduplicata ratione virium *T* ad vires *V*: resistentia corporis *D* erit ad resistentiam corporis *E*, & resistentia corporis *F* ad resistentiam corporis *G*, in velocitatum ratione duplicata; & propterea resistentia corporis *D* erit ad resistentiam corporis *F* ut resistentia corporis *E* ad resistentiam corporis *G*. Sunto corpora *D* & *F* æquivelocia ut & corpora *E* & *G*; & augendo velocitates corporum *D* & *F* in ratione quacunque, ac diminuendo vires particularum medii *B* in eadem ratione duplicata, accedet medium *B* ad formam & conditionem medii *C* pro libitu, & idcirco resistentiæ corporum æqualium & æquivelocium *E* & *G* in his mediis, perpetuo accedent ad æqualitatem, ita ut earum differentia evadat tandem minor quam data quævis. Proinde cum resistentiæ corporum *D* & *F* sint ad invicem ut resistentiæ corporum *E* & *G*, accedent etiam hæ similiter ad rationem æqualitatis. Corporum igitur *D* & *F*, ubi velocissime moventur, resistentiæ sunt æquales quam proxime: & propterea cum resistentia corporis *F* sit in duplicata ratione velocitatis, erit resistentia corporis *D* in eadem ratione quam proxime.

Corol. 3. Corporis in fluido quovis elastico velocissime moti eadem fere est resistentia ac si partes fluidi viribus suis centrifugis destituerentur, seque mutuo non fugerent: si modo fluidi vis elastica ex particularum viribus centrifugis oriatur, & velocitas adeo magna sit ut vires non habeant satis temporis ad agendum.

Corol. 4. Proinde cum resistentiæ similium & æquivelocium corporum, in medio cujus partes distantes se mutuo non fugiunt, sint ut quadrata diametrorum; sunt etiam æquivelocium & celerrime motorum corporum resistentiæ in fluido elastico ut quadrata diametrorum quam proxime.

De Motu Corporum

Corol. 5. Et cum corpora ſimilia, æqualia & æquivelocia, in mediis ejuſdem denſitatis, quorum particulæ ſe mutuo non fugiunt, ſive particulæ illæ ſint plures & minores, ſive pauciores & majores, in æqualem materiæ quantitatem temporibus æqualibus impingant, eique æqualem motus quantitatem imprimant, & viciſſim (per motus legem tertiam) æqualem ab eadem reactionem patiantur, hoc eſt, æqualiter reſiſtantur: manifeſtum eſt etiam quod in ejuſdem denſitatis fluidis elaſticis, ubi velociſſime moventur, æquales ſint eorum reſiſtentiæ quam proxime; ſive fluida illa ex particulis craſſioribus conſtent, ſive ex omnium ſubtiliſſimis conſtituantur. Ex medii ſubtilitate reſiſtentia projectilium celerrime motorum non multum diminuitur.

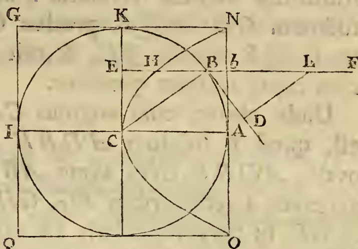
Corol. 6. Hæc omnia ita ſe habent in fluidis, quorum vis elaſtica ex particularum viribus centrifugis originem ducit. Quod ſi vis illa aliunde oriatur, veluti ex particularum expanſione ad inſtar lanæ vel ramorum arborum, aut ex alia quavis cauſa, qua motus particularum inter ſe redduntur minus liberi: reſiſtentia, ob minorem medii fluiditatem, erit major quam in ſuperioribus corollariis.

PROPOSITIO XXXIV. THEOREMA XXVIII.

Si globus & cylindrus æqualibus diametris deſcripti, in medio raro ex particulis æqualibus & ad æquales ab invicem diſtantias libere diſpoſitis conſtante, ſecundum plagam axis cylindri, æquali cum velocitate moveantur: erit reſiſtentia globi duplo minor quam reſiſtentia cylindri.

Nam quoniam actio medii in corpus eadem eſt (per legum corol. 5.) ſive corpus in medio quieſcente moveatur, ſive medii particulæ eadem cum velocitate impingant in corpus quieſcens: conſideremus corpus tanquam quieſcens, & videamus quo impetu urgebitur a medio movente. Deſignet igitur $ABKI$ corpus ſphæricum centro C ſemidiametro CA deſcriptum, & incidant particulæ medii data cum velocitate in corpus illud ſphæricum, ſecundum rectas ipſi AC parallelas: ſitque FB ejuſmodi recta. In ea capiatur LB ſemidiametro CB æqualis, & ducatur BD quæ ſphæram tangat in B. In KC & BD demittantur perpendiculares BE, LD, & vis qua particula

ticula medii, secundum rectam *FB* oblique incidendo, globum ferit in *B*, erit ad vim qua particula eadem cylindrum *ONGQ* axe *ACI* circa globum descriptum perpendiculariter feriret in *b*, ut *LD* ad *LB* vel *BE* ad *BC*. Rursus efficacia hujus vis ad movendum globum secundum incidentiæ suæ plagam *FB* vel *AC*, est ad ejusdem efficaciam ad movendum globum secundum plagam determinationis suæ, id est, secundum plagam rectæ *BC* qua globum directe urget ut *BE* ad *BC*. Et conjunctis rationibus, efficacia particulæ in globum secundum rectam *FB* oblique incidentis, ad movendum eundem secundum plagam incidentiæ suæ, est ad efficaciam particulæ ejusdem secundum eandem rectam in cylindrum perpendiculariter incidentis, ad ipsum movendum in plagam eandem, ut *BE* quadratum ad *BC* quadratum. Quare si in *bE*, quæ perpendicularis est ad cylindri basem circularem *NAO* & æqualis radio *AC*, sumatur *bH* æqualis $\frac{BE\ quad.}{CB}$: erit *bH* ad *bE* ut effectus particulæ in globum ad effectum particulæ in cylindrum. Et propterea solidum quod a rectis omnibus *bH* occupatur erit ad solidum quod a rectis omnibus *bE* occupatur, ut effectus particularum omnium in globum ad effectum particularum omnium in cylindrum. Sed solidum prius est parabolois vertice *C*, axe *CA* & latere recto *CA* descriptum, & solidum posterius est cylindrus paraboloidi circumscriptus: & notum est quod parabolois sit semissis cylindri circumscripti. Ergo vis tota medii in globum est duplo minor quam ejusdem vis tota in cylindrum. Et propterea si particulæ medii quiescerent, & cylindrus ac globus æquali cum velocitate moverentur, foret resistentia globi duplo minor quam resistentia cylindri. *Q. E. D.*

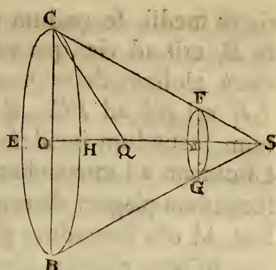


Scholium.

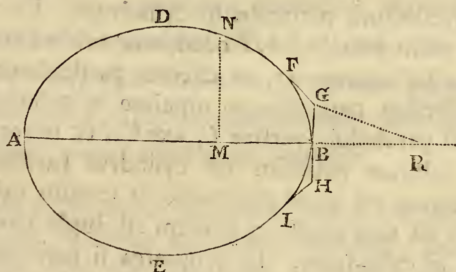
Eadem methodo figuræ aliæ inter se quoad resistentiam comparari possunt, eæque inveniri quæ ad motus suos in mediis resistentibus continuandos aptiores sunt. Ut si base circulari *CEBH*, quæ

De Motu Corporum

centro *O*, radio *OC* deſcribitur, & altitudine *OD*, conſtruendum ſit fruſtum coni *CBGF*, quod omnium eadem baſi & altitudine conſtructorum & ſecundum plagam axis ſui verſus *D* progredientium fruſtorum minime reſiſtatur: biſeca altitudinem *OD* in *Q* & produc *OQ* ad *S* ut ſit *QS* æqualis *QC*, & erit *S* vertex coni cujus fruſtum quæritur.



Unde obiter, cum angulus *CSB* ſemper ſit acutus, conſequens eſt, quod ſi ſolidum *ADBE* convolutione figuræ ellipticæ vel ovalis *ADBE* circa axem *AB* facta generetur, & tangatur figura generans a rectis tribus *FG*, *GH*, *HI* in punctis *F*, *B* & *I*, ea lege ut *GH* ſit perpendicularis ad axem in puncto contactus *B*, & *FG*, *HI* cum eadem *GH* contineant angulos *FGB*, *BHI* graduum 135, ſolidum, quod convolutione figuræ *ADFGHIE* circa axem eundem *AB* generatur, minus reſiſtitur quam ſolidum prius; ſi modo utrumque ſecundum plagam axis ſui *AB* progrediatur, & utriuſque terminus *B* præcedat. Quam quidem propoſitionem in conſtruendis navibus non inutilem futuram eſſe cenſeo.



Quod ſi figura *DNFG* ejuſmodi ſit curva, ut, ſi ab ejus puncto quovis *N* ad axem *AB* demittatur perpendiculum *NM*, & a puncto dato *G* ducatur recta *GR* quæ parallela ſit rectæ figuram tangenti in *N*, & axem productum ſecet in *R*, fuerit *MN* ad *GR* ut *GR cub.* ad $4 BR \times GBq$; ſolidum quod figuræ hujus revolutione circa axem *AB* facta deſcribitur, in medio raro prædicto ab *A* verſus

sus *B* movendo, minus resistetur quam aliud quodvis eadem longitudine & latitudine descriptum solidum circulare.

PROPOSITIO XXXV. PROBLEMA VII.

Si medium rarum ex particulis quam minimis quiescentibus æqualibus & ad æquales ab invicem distantias libere dispositis constet: invenire resistentiam globi in hoc medio uniformiter progredientis.

Cas. 1. Cylindrus eadem diametro & altitudine descriptus progredi intelligatur eadem velocitate secundum longitudinem axis sui in eodem medio. Et ponamus quod particulæ medii, in quas globus vel cylindrus incidit, vi reflexionis quam maxima resiliant. Et cum resistentia globi (per propositionem novissimam) sit duplo minor quam resistentia cylindri, & globus sit ad cylindrum ut duo ad tria, & cylindrus incidendo perpendiculariter in particulas, ipsasque quam maxime reflectendo, duplam sui ipsius velocitatem ipsis communicet: cylindrus, quo tempore dimidiam longitudinem axis sui uniformiter progrediendo describit, communicabit motum particulis, qui sit ad totum cylindri motum ut densitas medii ad densitatem cylindri; & globus, quo tempore totam longitudinem diametri suæ uniformiter progrediendo describit, communicabit motum eundem particulis; & quo tempore duas tertias partes diametri suæ describit, communicabit motum particulis, qui sit ad totum globi motum ut densitas medii ad densitatem globi. Et propterea globus resistentiam patitur, quæ sit ad vim qua totus ejus motus vel auferri possit vel generari quo tempore duas tertias partes diametri suæ uniformiter progrediendo describit, ut densitas medii ad densitatem globi.

Cas. 2. Ponamus quod particulæ medii in globum vel cylindrum incidentes non reflectantur; & cylindrus incidendo perpendiculariter in particulas simplicem suam velocitatem ipsis communicabit, ideoque resistentiam patitur duplo minorem quam in priore casu, & resistentia globi erit etiam duplo minor quam prius.

Cas. 3. Ponamus quod particulæ medii vi reflexionis neque maxima neque nulla, sed mediocri aliqua resiliant a globo; & resistentia

ſtentia globi erit in eadem ratione mediocri inter reſiſtentiam in primo caſu & reſiſtentiam in ſecundo. *Q. E. I.*

Corol. 1. Hinc ſi globus & particulæ ſint infinite dura, & vi omni elaſtica & propterea etiam vi omni reflexionis deſtituta: reſiſtentia globi erit ad vim qua totus ejus motus vel auferri poſſit vel generari, quo tempore globus quatuor tertias partes diametri ſuæ deſcribit, ut denſitas medii ad denſitatem globi.

Corol. 2. Reſiſtentia globi, cæteris paribus, eſt in duplicata ratione velocitatis.

Corol. 3. Reſiſtentia globi, cæteris paribus, eſt in duplicata ratione diametri.

Corol. 4. Reſiſtentia globi, cæteris paribus, eſt ut denſitas medii.

Corol. 5. Reſiſtentia globi eſt in ratione quæ componitur ex duplicata ratione velocitatis & duplicata ratione diametri & ratione denſitatis medii.

Corol. 6. Et motus globi cum ejus reſiſtentia ſic exponi poteſt. Sit *AB* tempus quo globus per reſiſtentiam ſuam uniformiter continuatam totum ſuum motum amittere poteſt. Ad *AB* erigantur perpendicula *AD*, *BC*. Sitque *BC* motus ille totus, & per punctum *C* aſymptotis *AD*, *AB* deſcribatur hyperbola *CF*. Producatur *AB* ad punctum quodvis *E*. Erigatur perpendiculum *EF* hyperbolæ occurrens in *F*. Compleatur parallelogrammum *CBEG*, & agatur *AF* ipſi *BC* occurrens in *H*. Et ſi globus tempore quovis *BE*, motu ſuo primo *BC* uniformiter continuato, in medio non reſiſtente deſcribat ſpatium *CBEG* per aream parallelogrammi expoſitum, idem in medio reſiſtente deſcribet ſpatium *CBEF* per aream hyperbolæ expoſitum, & motus ejus in fine temporis illius exponetur per hyperbolæ ordinatam *EF*, amiſſa motus ejus parte *FG*. Et reſiſtentia ejus in fine temporis ejuſdem exponetur per longitudinem *BH*, amiſſa reſiſtentiæ parte *CH*. Patent hæc omnia per corol. 1. & 3. prop. v. lib. II.

Corol. 7. Hinc ſi globus tempore T per reſiſtentiam R uniformiter continuatam amittat motum ſuum totum M: idem globus tempore t in medio reſiſtente, per reſiſtentiam R in duplicata velocitatis ratione decreſcentem, amittet motus ſui M partem $\frac{tM}{T+t}$, manente

nente parte $\frac{TM}{T+t}$; & defcribet fpatium quod fit ad fpatium motu uniformi M eodem tempore t defcriptum, ut logarithmus numeri $\frac{T+t}{T}$ multiplicatus per numerum 2,302585092994 eft ad numerum $\frac{t}{T}$, propterea quod area hyperbolica $BCFE$ eft ad rectangulum $BCGE$ in hac proportione.

Scholium.

In hac propofitione expofui refiftentiam & retardationem projectilium fphæricorum in mediis non continuis, & oftendi quod hæc refiftentia fit ad vim qua totus globi motus vel tolli poffit vel generari quo tempore globus duas tertias diametri fuæ partes velocitate uniformiter continuata defcribat, ut denfitas medii ad denfitatem globi, fi modo globus & particulæ medii fint fumme elaftica & vi maxima reflectendi polleant: quodque hæc vis fit duplò minor ubi globus & particulæ medii funt infinite dura & vi reflectendi prorfus deftituta. In mediis autem continuis qualia funt aqua, oleum calidum, & argentum vivum, in quibus globus non incidit immediate in omnes fluidi particulas refiftentiam generantes, fed premit tantum proximas particulas & hæ premunt alias & hæ alias, refiftentia eft adhuc duplo minor. Globus utique in hujufmodi mediis fluidiffimis refiftentiam patitur quæ eft ad vim qua totus ejus motus vel tolli poffit vel generari quo tempore, motu illo uniformiter continuato, partes octo tertias diametri fuæ defcribat, ut denfitas medii ad denfitatem globi. Id quod in fequentibus conabimur oftendere.

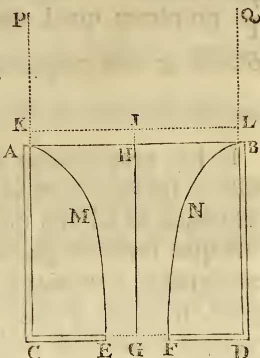
PROPOSITIO XXXVI. PROBLEMA VIII.

Aquæ de vafe cylindrico per foramen in fundo factum effluentis definire motum.

Sit $ACDB$ vas cylindricum, AB ejus orificium fuperius, CD fundum horizonti parallelum, EF foramen circulare in medio fundi, G centrum foraminis, & GH axis cylindri horizonti perpendicularis. Et finge cylindrum glaciei $APQB$ ejufdem effe latitudinis

cum

cum cavitate vasis, & axem eundem habere, & uniformi cum motu perpetuo descendere, & partes ejus quam primum attingunt superficiem *AB* liquescere, & in aquam conversas gravitate sua defluere in vas, & cataractam vel columnam aquæ *ABNFEM* cadendo formare, & per foramen *EF* transire, idemque adæquate implere. Ea vero sit uniformis velocitas glaciei descendentis ut & aquæ contiguæ in circulo *AB*, quam aqua cadendo & casu suo describendo altitudinem *IH* acquirere potest; & jaceant *IH* & *HG* in directum, & per punctum *I* ducatur recta *KL* horizonti parallela & lateribus glaciei occurrens in *K* & *L*. Et velocitas aquæ effluentis per foramen *EF* ea erit quam aqua cadendo ab *I* & casu suo describendo altitudinem *IG* acquirere potest. Ideoque per theoremata *Galilæi* erit *IG* ad *IH* in duplicata ratione velocitatis aquæ per foramen effluentis ad velocitatem aquæ in circulo *AB*, hoc est, in duplicata ratione circuli *AB* ad circulum *EF*; nam hi circuli sunt reciproce ut velocitates aquarum quæ per ipsos, eodem tempore & æquali quantitate, adæquate transeunt. De velocitate aquæ horizontem versus hic agitur. Et motus horizonti parallelus quo partes aquæ cadentis ad invicem accedunt, cum non oriatur a gravitate, nec motum horizonti perpendicularem a gravitate oriundum mutet, hic non consideratur. Supponimus quidem quod partes aquæ aliquantulum cohærent, & per cohæsionem suam inter cadendum accedant ad invicem per motus horizonti parallelos, ut unicam tantum efforment cataractam & non in plures cataractas dividantur: sed motum horizonti parallelum, a cohæsione illa oriundum, hic non consideramus.



Cas. 1. Concipe jam cavitatem totam in vase, in circuitu aquæ cadentis *ABNFEM*, glacie plenam esse, ut aqua per glaciem tanquam per infundibulum transeat. Et si aqua glaciem tantum non tangat, vel, quod perinde est, si tangat & per glaciem propter summam ejus polituram quam liberrime & sine omni resistentia labatur; hæc defluet per foramen *EF* eadem velocitate ac prius, & pondus totum columnæ aquæ *ABNFEM* impendetur in defluxum ejus gene-

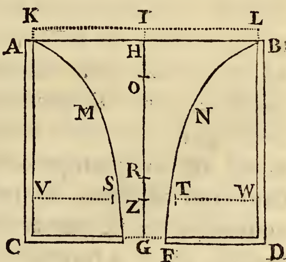
generandum uti prius, & fundum vasis sustinebit pondus glaciei columnam ambientis. LIBER SECUNDUS.

Liquescat jam glacies in vase; & effluxus aquæ, quoad velocitatem, idem manebit ac prius. Non minor erit, quia glacies in aquam resoluta conabitur descendere: non major, quia glacies in aquam resoluta non potest descendere nisi impediendo descensum aquæ alterius descensui suo æqualem. Eadem vis eandem aquæ effluentis velocitatem generare debet.

Sed foramen in fundo vasis, propter obliquos motus particularum aquæ effluentis, paulo majus esse debet quam prius. Nam particulæ aquæ jam non transeunt omnes per foramen perpendiculariter; sed a lateribus vasis undique confluentes & in foramen convergentes, obliquis transeunt motibus; & cursum suum deorsum flectentes in venam aquæ exilientis conspirant, quæ exilior est paulo infra foramen quam in ipso foramine, existente ejus diametro ad diametrum foraminis ut 5 ad 6, vel $5\frac{1}{2}$ ad $6\frac{1}{2}$ quam proxime, si modo diametros recte dimensus sum. Parabam utique laminam planam pertenuem in medio perforatam, existente circularis foraminis diametro partium quinque octavarum digiti. Et ne vena aquæ exilientis cadendo acceleraretur & acceleratione redderetur angustior, hanc laminam non fundo sed lateri vasis affixi sic, ut vena illa egrederetur secundum lineam horizonti parallelam. Dein ubi vas aqua plenum esset, aperui foramen ut aqua efflueret; & venæ diameter, ad distantiam quasi dimidii digiti a foramine quam accuratissime mensurata, prodiit partium viginti & unius quadragesimarum digiti. Erat igitur diameter foraminis hujus circularis ad diametrum venæ ut 25 ad 21 quamproxime. Aqua igitur transeundo per foramen, convergit undique, & postquam effluxit ex vase, tenuior redditur convergendo, & per attenuationem acceleratur donec ad distantiam semissis digiti a foramine pervenerit, & ad distantiam illam tenuior & celerior fit quam in ipso foramine in ratione 25×25 ad 21×21 seu 17 ad 12 quamproxime, id est in subduplicata ratione binarii ad unitatem circiter. Per experimenta vero constat quod quantitas aquæ, quæ per foramen circulare in fundo vasis factum, dato tempore effluit, ea sit quæ cum velocitate prædicta, non per foramen illud, sed per foramen circulare, cujus diameter est ad diametrum foraminis illius ut 21 ad 25, eodem tempore effluere debet. Ideo-

que aqua illa effluens velocitatem habet deorſum in ipſo foramine quam grave cadendo & caſu ſuo deſcribendo dimidiam altitudinem aquæ in vaſe ſtagnantis acquirere poteſt quamproxime. Sed poſtquam exivit ex vaſe, acceleratur convergendo donec ad diſtantiam a foramine diametro foraminis prope æqualem pervenerit, & velocitatem acquiſiverit majorem in ratione ſubduplicata binarii ad unitatem circiter; quam utique grave cadendo, & caſu ſuo deſcribendo totam altitudinem aquæ in vaſe ſtagnantis, acquirere poteſt quamproxime.

In ſequentibus igitur diameter venæ deſignetur per foramen illud minus quod vocavimus *EF*. Et plano foraminis *EF* parallelum duci intelligatur planum aliud ſuperius VW ad diſtantiam diametro foraminis æqualem circiter & foramine majore *ST* pertuſum; per quod utique vena cadat, quæ adæquate impleat foramen inferius *EF*, atque ideo cujus diameter ſit ad diametrum foraminis inferioris ut 25 ad 21 circiter. Sic enim vena per foramen inferius perpendiculariter tranſibit; & quantitas aquæ effluentis, pro magnitudine foraminis hujus, ea erit quam ſolutio problematis poſtulat quamproxime. Spatium vero, quod planis duobus & vena cadente clauditur, pro fundo vaſis haberi poteſt. Sed ut ſolutio problematis ſimplicior ſit & magis mathematica, præſtat adhibere planum ſolum inferius pro fundo vaſis, & fingere quod aqua quæ per glaciem ceu per infundibulum defluebat, & e vaſe per foramen *EF* in plano inferiore factum egrediebatur, motum ſuum perpetuo ſervet, & glacies quietem ſuam. In ſequentibus igitur ſit *ST* diameter foraminis circularis centro *Z* deſcripti per quod cataracta effluit ex vaſe ubi aqua tota in vaſe fluida eſt. Et ſit *EF* diameter foraminis per quod cataracta cadendo adæquate tranſit, ſive aqua exeat ex vaſe per foramen illud ſuperius *ST*, ſive cadat per medium glaciei in vaſe tanquam per infundibulum. Et ſit diameter foraminis ſuperioris *ST* ad diametrum inferioris *EF* ut 25 ad 21 circiter, & diſtantia perpendicularis inter plana foraminum æqualis ſit diametro foraminis minoris *EF*. Et velocitas aquæ e vaſe per foramen *ST* exeuntis ea erit in ipſo foramine



foramine deorſum quam corpus cadendo a dimidio altitudinis *IZ* acquirere poteſt: velocitas autem cataractæ utriuſque cadentis ea erit in foramine *EF*, quam corpus cadendo ab altitudine tota *IG* acquiret.

Caſ. 2. Si foramen *EF* non ſit in medio fundi vaſis, ſed fundum alibi perforetur: aqua effluet eadem cum velocitate ac prius, ſi modo eadem ſit foraminis magnitudo. Nam grave majori quidem tempore deſcendit ad eandem profunditatem per lineam obliquam quam per lineam perpendicularem, ſed deſcendendo eandem velocitatem acquirit in utroque caſu, ut *Galilæus* demonſtravit.

Caſ. 3. Eadem eſt aquæ velocitas effluentis per foramen in latere vaſis. Nam ſi foramen parvum ſit, ut intervallum inter ſuperficies *AB* & *KL* quoad ſenſum evaneſcat, & vena aquæ horizontaliter exilientis figuram parabolicam efformet: ex latere recto hujus parabolæ colligetur, quod velocitas aquæ effluentis ea ſit quam corpus ab aquæ in vaſe ſtagnantis altitudine *HG* vel *IG* cadendo acquirere potuiſſet. Facto utique experimento inveni quod, ſi altitudo aquæ ſtagnantis ſupra foramen eſſet viginti digitorum & altitudo foraminis ſupra planum horizonti parallelum eſſet quoque viginti digitorum, vena aquæ proſilientis incideret in planum illud ad diſtantiam digitorum 37 circiter a perpendiculo quod in planum illud a foramine demittebatur captam. Nam ſine reſiſtentia, vena incidere debuiſſet in planum illud ad diſtantiam digitorum 40, exiſtente venæ parabolicæ latere recto digitorum 80.

Caſ. 4. Quinetiam aqua effluens, ſi ſurſum feratur, eadem egreditur cum velocitate. Aſcendit enim aquæ exilientis vena parva motu perpendiculari ad aquæ in vaſe ſtagnantis altitudinem *GH* vel *GI*, niſi quatenus aſcenſus ejus ab aeris reſiſtentia aliquantulum impediatur; ac proinde ea effluit cum velocitate quam ab altitudine illa cadendo acquirere potuiſſet. Aquæ ſtagnantis particula unaquæque undique premitur æqualiter (per prop. XIX. lib. 2.) & preſſioni cedendo æquali impetu in omnes partes fertur, ſive deſcendat per foramen in fundo vaſis, ſive horizontaliter effluat per foramen in ejus latere, ſive egrediatur in canalem & inde aſcendat per foramen parvum in ſuperiore canalis parte factum. Et velocitatem qua aqua effluit eam eſſe, quam in hac propoſitione aſſignavimus,

mus, non ſolum ratione colligitur, ſed etiam per experimenta notiſſima jam deſcripta manifeſtum eſt.

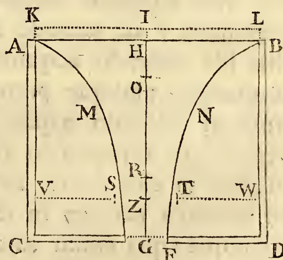
Caſ. 5. Eadem eſt aquæ effluentis velocitas ſive figura foraminis ſit circularis ſive quadrata vel triangularis aut alia quæcunque circulari æqualis. Nam velocitas aquæ effluentis non pendet a figura foraminis ſed oritur ab ejus altitudine infra planum *KL*.

Caſ. 6. Si vaſis *ABDC* pars inferior in aquam ſtagnantem immergatur, & altitudo aquæ ſtagnantis ſupra fundum vaſis ſit *GR*: velocitas quacum aqua quæ in vaſe eſt, effluet per foramen *EF* in aquam ſtagnantem, ea erit quam aqua cadendo & caſu ſuo deſcribendo altitudinem *IR* acquirere poteſt. Nam pondus aquæ omnis in vaſe quæ inferior eſt ſuperficie aquæ ſtagnantis, ſuſtinebitur in æquilibrio per pondus aquæ ſtagnantis, ideoque motum aquæ deſcendentis in vaſe minime accelerabit. Patebit etiam & hic caſus per experimenta, menſurando ſcilicet tempora quibus aqua effluit.

Corol. 1. Hinc ſi aquæ altitudo *CA* producatur ad *K*, ut ſit *AK* ad *CK* in duplicata ratione areæ foraminis in quavis fundi parte facti, ad aream circuli *AB*: velocitas aquæ effluentis æqualis erit velocitati quam aqua cadendo & caſu ſuo deſcribendo altitudinem *KC* acquirere poteſt.

Corol. 2. Et vis, qua totus aquæ exilientis motus generari poteſt, æqualis eſt ponderi cylindricæ columnæ aquæ, cujus baſis eſt foramen *EF*, & altitudo 2 *GI* vel 2 *CK*. Nam aqua exiliens, quo tempore hanc columnam æquat, pondere ſuo ab altitudine *GI* cadendo velocitatem ſuam, qua exilit, acquirere poteſt.

Corol. 3. Pondus aquæ totius in vaſe *ABDC* eſt ad ponderis partem, quæ in defluxum aquæ impenditur, ut ſumma circulorum *AB* & *EF* ad duplum circulum *EF*. Sit enim *IO* media proportionalis inter *IH* & *IG*; & aqua per foramen *EF* egrediens, quo tempore gutta cadendo ab *I* deſcribere poſſet altitudinem *IG*, æqualis erit cylindro cujus baſis eſt circulus *EF* & altitudo eſt 2 *IG*, id eſt, cylindro cujus baſis eſt circulus *AB* & altitudo eſt 2 *IO*, nam circulus *EF* eſt ad circulum *AB* in ſubduplicata ratione altitudinis *IH* ad altitudinem



titudinem *IG*, hoc eſt, in ſimplici ratione mediæ proportionalis *IO* ad altitudinem *IG*: & quo tempore gutta cadendo ab *I* deſcribere poteſt altitudinem *IH*, aqua egrediens æqualis erit cylindro cujus baſis eſt circulus *AB* & altitudo eſt $2IH$: & quo tempore gutta cadendo ab *I* per *H* ad *G* deſcribit altitudinum differentiam *HG*, aqua egrediens, id eſt, aqua tota in ſolido *ABNFEM* æqualis erit differentiæ cylindrorum, id eſt, cylindro cujus baſis eſt *AB* & altitudo $2HO$. Et propterea aqua tota in vaſe *ABDC* eſt ad aquam totam cadentem in ſolido *ABNFEM* ut *HG* ad $2HO$, id eſt, ut $HO+OG$ ad $2HO$, ſeu $IH+IO$ ad $2IH$. Sed pondus aquæ totius in ſolido *ABNFEM* in aquæ defluxum impenditur: ac proinde pondus aquæ totius in vaſe eſt ad ponderis partem quæ in defluxum aquæ impenditur, ut $IH+IO$ ad $2IH$, atque ideo ut ſumma circulorum *EF* & *AB* ad duplum circulum *EF*.

Corol. 4. Et hinc pondus aquæ totius in vaſe *ABDC* eſt ad ponderis partem alteram quam fundum vaſis ſuſtinet, ut ſumma circulorum *AB* & *EF* ad differentiam eorundem circulorum.

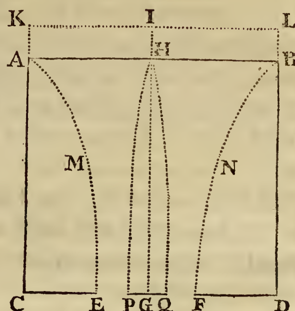
Corol. 5. Et ponderis pars, quam fundum vaſis ſuſtinet, eſt ad ponderis partem alteram, quæ in defluxum aquæ impenditur, ut differentia circulorum *AB* & *EF* ad duplum circulum minorem *EF*, ſive ut area fundi ad duplum foramen.

Corol. 6. Ponderis autem pars, qua ſola fundum urgetur, eſt ad pondus aquæ totius, quæ fundo perpendiculariter incumbit, ut circulus *AB* ad ſummam circulorum *AB* & *EF*, ſive ut circulus *AB* ad exceſſum dupli circuli *AB* ſupra fundum. Nam ponderis pars, qua ſola fundum urgetur, eſt ad pondus aquæ totius in vaſe, ut differentia circulorum *AB* & *EF* ad ſummam eorundem circulorum, per cor. 4: & pondus aquæ totius in vaſe eſt ad pondus aquæ totius quæ fundo perpendiculariter incumbit, ut circulus *AB* ad differentiam circulorum *AB* & *EF*. Itaque ex æquo perturbate, ponderis pars, qua ſola fundum urgetur, eſt ad pondus aquæ totius, quæ fundo perpendiculariter incumbit, ut circulus *AB* ad ſummam circulorum *AB* & *EF* vel exceſſum dupli circuli *AB* ſupra fundum.

Corol. 7. Si in medio foraminis *EF* locetur circellus *PQ* centro *G* deſcriptus & horizonti parallelus: pondus aquæ quam circellus ille ſuſtinet, majus eſt pondere tertiæ partis cylindri aquæ cujus baſis

De Motu Corporum

ſis eſt circellus ille & altitudo eſt *GH*. Sit enim *ABNFEM* cataracta vel columna aquæ cadentis axem habens *GH* ut ſupra, & congelari intelligatur aqua omnis in vaſe, tam in circuitu cataractæ quam ſupra circellum, cujus fluiditas ad promptiſſimum & celerrimum aquæ deſcenſum non requiritur. Et ſit *PHQ* columna aquæ ſupra circellum congelata, verticem habens *H* & altitudinem *GH*. Et finge cataractam hancce pondere ſuo toto cadere, & non incumbere in *PHQ* nec eandem premere, ſed libere & ſine frictione præterlabi, niſi forte in ipſo glaciei vertice quo cataracta ipſo cadendi initio incipiat eſſe cava.



Et quemadmodum aqua in circuitu cataractæ congelata *AMEC*, *BNFD* convexa eſt in ſuperficie interna *AME*, *BNF* verſus cataractam cadentem, ſic etiam hæc columna *PHQ* convexa erit verſus cataractam, & propterea major cono cujus baſis eſt circellus ille *PQ* & altitudo *GH*, id eſt, major tertia parte cylindri eadem baſe & altitudine deſcripti. Suſtinet autem circellus ille pondus hujus columnæ, id eſt, pondus quod pondere coni ſeu tertiæ partis cylindri illius majus eſt.

Corol. 8. Pondus aquæ quam circellus valde parvus *PQ* ſuſtinet, minor eſſe videtur pondere duarum tertiarum partium cylindri aquæ cujus baſis eſt circellus ille & altitudo eſt *HG*. Nam ſtantibus jam poſitis, deſcribi intelligatur dimidium ſphæroidis cujus baſis eſt circellus ille & ſemiaxis ſive altitudo eſt *HG*. Et hæc figura æqualis erit duabus tertiis partibus cylindri illius & comprehendet columnam aquæ congelatæ *PHQ* cujus pondus circellus ille ſuſtinet. Nam ut motus aquæ ſit maxime directus, columnæ illius ſuperficies externa concurret cum baſi *PQ* in angulo nonnihil acuto, propterea quod aqua cadendo perpetuo acceleratur & propter accelerationem fit tenuior; & cum angulus ille ſit recto minor, hæc columna ad inferiores ejus partes jacebit intra dimidium ſphæroidis. Eadem vero ſurſum acuta erit ſeu cuſpidata, ne horizontalis motus aquæ ad verticem ſphæroidis ſit infinite velocior quam ejus motus horizontem verſus. Et quo minor eſt circellus *PQ* eo acutior

acutior erit vertex columnæ; & circello in infinitum diminuto, angulus PHQ in infinitum diminuetur, & propterea columna jacebit intra dimidium sphæroïdis. Est igitur columna illa minor dimidio sphæroidis, seu duabus tertiis partibus cylindri cujus basis est circellus ille & altitudo *GH*. Sustinet autem circellus vim aquæ ponderi hujus columnæ æqualem, cum pondus aquæ ambientis in defluxum ejus impendatur.

Corol. 9. Pondus aquæ quam circellus valde parvus PQ sustinet, æquale est ponderi cylindri aquæ cujus basis est circellus ille & altitudo est $\frac{1}{2}GH$ quamproxime. Nam pondus hocce est medium arithmeticum inter pondera coni & hemisphæroidis prædictæ. At si circellus ille non sit valde parvus, sed augeatur donec æquet foramen *EF*; hic sustinebit pondus aquæ totius sibi perpendiculariter imminentis, id est, pondus cylindri aquæ cujus basis est circellus ille & altitudo est *GH*.

Corol. 10. Et (quantum sentio) pondus quod circellus sustinet, est semper ad pondus cylindri aquæ, cujus basis est circellus ille & altitudo est $\frac{1}{2}GH$, ut EFq ad $EFq - \frac{1}{2}PQq$, sive ut circulus *EF* ad excessum circuli hujus supra semissem circelli PQ quamproxime.

LEMMA IV.

Cylindri, qui secundum longitudinem suam uniformiter progreditur, resistentia ex aucta vel diminuta ejus longitudine non mutatur; ideoque eadem est cum resistentia circuli eadem diametro descripti & eadem velocitate secundum lineam rectam plano ipsius perpendicularem progredientis.

Nam latera cylindri motui ejus minime opponuntur: & cylindrus, longitudine ejus in infinitum diminuta, in circulum vertitur.

PROPO-

PROPOSITIO XXXVII. THEOREMA XXIX.

Cylindri, qui in fluido compresso infinito & non elastico secundum longitudinem suam uniformiter progreditur, resistentia, quæ oritur a magnitudine sectionis tranversæ, est ad vim qua totus ejus motus, interea dum quadruplum longitudinis suæ describit, vel tolli possit vel generari, ut densitas medii ad densitatem cylindri quamproxime.

Nam si vas *ABDC* fundo suo *CD* superficiem aquæ stagnantis tangat, & aqua ex hoc vase per canalem cylindricum *EFTS* horizonti perpendicularem in aquam stagnantem effluat, locetur autem circellus *PQ* horizonti parallelus ubivis in medio canalis, & producatur *CA* ad *K*, ut sit *AK* ad *CK* in duplicata ratione quam habet excessus orificii canalis *EF* supra circellum *PQ* ad circulum *AB*: manifestum est (per cas. 5. cas. 6. & cor. 1. prop. XXXVI.) quod velocitas aquæ transeuntis per spatium annulare inter circellum & latera vasis, ea erit quam aqua cadendo & casu suo describendo altitudinem *KC* vel *IG* acquirere potest.

Et (per corol. x. prop. XXXVI.) si vasis latitudo sit infinita, ut lineola *HI* evanescat & altitudines *IG*, *HG* æquentur: vis aquæ defluentis in circellum erit ad pondus cylindri cujus basis est circellus ille & altitudo est $\frac{1}{2}IG$, ut EFq ad $EFq - \frac{1}{2}PQq$ quam proxime. Nam vis aquæ, uniformi motu defluentis per totum canalem, eadem erit in circellum *PQ* in quacunque canalis parte locatum.

Claudantur jam canalis orificia *EF*, *ST*, & ascendat circellus in fluido undique compresso & ascensu suo cogat aquam superiorem descendere per spatium annulare inter circellum & latera canalis: & velocitas circelli ascendentis erit ad velocitatem aquæ descendentis ut differentia circulorum *EF* & *PQ* ad circulum *PQ*, & velocitas circelli ascendentis ad summam velocitatum, hoc est, ad veloci-

velocitatem relativam aquæ deſcendentis qua præterfluit circellum aſcendentem, ut differentia circulorum EF & PQ ad circulum EF, ſive ut $EFq-PQq$ ad EFq. Sit illa velocitas relativa æqualis velocitati, qua ſupra oſtenſum eſt aquam tranſire per idem ſpatium annulare dum circellus interea immotus manet, id eſt, velocitati quam aqua cadendo & caſu ſuo deſcribendo altitudinem IG acquirere poteſt: & vis aquæ in circellum aſcendentem eadem erit ac prius (per legum corol. v.) id eſt, reſiſtentia circelli aſcendentis erit ad pondus cylindri aquæ cujus baſis eſt circellus ille & altitudo eſt $\frac{1}{2}IG$, ut EFq ad $EFq-\frac{1}{2}PQq$ quamproxime. Velocitas autem circelli erit ad velocitatem, quam aqua cadendo & caſu ſuo deſcribendo altitudinem IG acquirit, ut $EFq-PQq$ ad EFq.

Augeatur amplitudo canalis in infinitum: & rationes illæ inter $EFq-PQq$ & EFq, interque EFq & $EFq-\frac{1}{2}PQq$ accedent ultimo ad rationes æqualitatis. Et propterea velocitas circelli ea nunc erit quam aqua cadendo & caſu ſuo deſcribendo altitudinem IG acquirere poteſt, reſiſtentia vero ejus æqualis evadet ponderi cylindri cujus baſis eſt circellus ille & altitudo dimidium eſt altitudinis IG, a qua cylindrus cadere debet ut velocitatem circelli aſcendentis acquirat; & hac velocitate cylindrus, tempore cadendi, quadruplum longitudinis ſuæ deſcribet. Reſiſtentia autem cylindri, hac velocitate ſecundum longitudinem ſuam progredientis, eadem eſt cum reſiſtentia circelli (per lemma IV.) ideoque æqualis eſt vi qua motus ejus, interea dum quadruplum longitudinis ſuæ deſcribit, generari poteſt quamproxime.

Si longitudo cylindri augeatur vel minuatur: motus ejus ut & tempus, quo quadruplum longitudinis ſuæ deſcribit, augebitur vel minuetur in eadem ratione; ideoque vis illa, qua motus auctus vel diminutus, tempore pariter aucto vel diminuto, generari vel tolli poſſit, non mutabitur; ac proinde etiamnum æqualis eſt reſiſtentiæ cylindri, nam & hæc quoque immutata manet per lemma IV.

Si denſitas cylindri augeatur vel minuatur: motus ejus ut & vis qua motus eodem tempore generari vel tolli poteſt, in eadem ratione augebitur vel minuetur. Reſiſtentia itaque cylindri cujuſcunque erit ad vim qua totus ejus motus, interea dum quadruplum

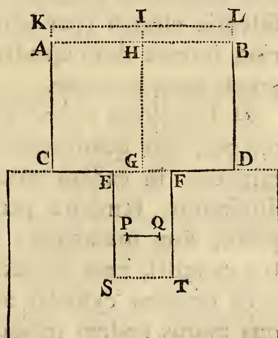
 longitu-

longitudinis suæ describit, vel generari possit vel tolli, ut densitas medii ad densitatem cylindri quamproxime. *Q. E. D.*

Fluidum autem comprimi debet ut sit continuum, continuum vero esse debet & non elasticum ut pressio omnis, quæ ab ejus compressione oritur, propagetur in instanti, & in omnes moti corporis partes æqualiter agendo resistentiam non mutet. Pressio utique, quæ a motu corporis oritur, impenditur in motum partium fluidi generandum & resistentiam creat. Pressio autem quæ oritur a compressione fluidi, utcunque fortis sit, si propagetur in instanti, nullum generat motum in partibus fluidi continui, nullam omnino inducit motus mutationem; ideoque resistentiam nec auget nec minuit. Certe actio fluidi, quæ ab ejus compressione oritur, fortior esse non potest in partes posticas corporis moti quam in ejus partes anticas, ideoque resistentiam in hac propositione descriptam minuere non potest: & fortior non erit in partes anticas quam in posticas, si modo propagatio ejus infinite velocior sit quam motus corporis pressi. Infinite autem velocior erit & propagabitur in instanti, si modo fluidum sit continuum & non elasticum.

Corol. 1. Cylindrorum, qui secundum longitudines suas in mediis continuis infinitis uniformiter progrediuntur, resistentiæ sunt in ratione quæ componitur ex duplicata ratione velocitatum & duplicata ratione diametrorum & ratione densitatis mediorum.

Corol. 2. Si amplitudo canalis non augeatur in infinitum, sed cylindrus in medio quiescente incluso secundum longitudinem suam progrediatur, & interea axis ejus cum axe canalis coincidat: resistentia ejus erit ad vim qua totus ejus motus, quo tempore quadruplum longitudinis suæ describit, vel generari possit vel tolli, in ratione quæ componitur ex ratione EFq ad $EFq - \frac{1}{2}PQq$ semel, & ratione EFq ad $EFq - PQq$ bis, & ratione densitatis medii ad densitatem cylindri.

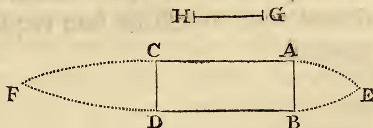


Corol. 3. Iisdem positis, & quod longitudo L sit ad quadruplum longitudinis cylindri in ratione quæ componitur ex ratione $EFq - \frac{1}{2}PQq$

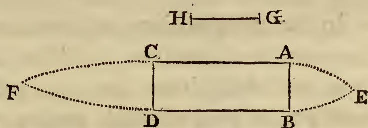
$\frac{1}{2}PQq$ ad EFq semel, & ratione $EFq - PQq$ ad EFq bis: resistentia cylindri erit ad vim qua totus ejus motus, interea dum longitudinem L describit, vel tolli possit vel generari, ut densitas medii ad densitatem cylindri.

Scholium.

In hac propositione resistentiam investigavimus quæ oritur a sola magnitudine transversæ sectionis cylindri, neglecta resistentiæ parte quæ ab obliquitate motuum oriri possit. Nam quemadmodum in casu primo propositionis XXXVI. obliquitas motuum, quibus partes aquæ in vase, undique convergebant in foramen *EF*, impedivit effluxum aquæ illius per foramen: sic in hac propositione, obliquitas motuum, quibus partes aquæ ab anteriore cylindri termino pressæ, cedunt pressioni & undique divergunt, retardat eorum transitum per loca in circuitu termini illius antecedentis versus posteriores partes cylindri, efficitque ut fluidum ad majorem distantiam commoveatur & resistentiam auget, idque in ea fere ratione qua effluxum aquæ e vase diminuit, id est, in ratione duplicata 25 ad 21 circiter. Et quemadmodum, in propositionis illius casu primo, effecimus ut partes aquæ perpendiculariter & maxima copia transirent per foramen *EF*, ponendo quod aqua omnis in vase quæ in circuitu cataractæ congelata fuerat, & cujus motus obliquus erat & inutilis, maneret sine motu: sic in hac propositione, ut obliquitas motuum tollatur, & partes aquæ motu maxime directo & brevissimo cedentes facillimum præbeant transitum cylindro, & sola maneat resistentia, quæ oritur a magnitudine sectionis transversæ, quæque diminui non potest nisi diminuendo diametrum cylindri, concipiendum est quod partes fluidi, quarum motus sunt obliqui & inutiles & resistentiam creant, quiescant inter se ad utrumque cylindri terminum, & cohæreant & cylindro jungantur. Sit $ABCD$ rectangulum, & sint AE & BE arcus duo parabolici axe AB descripti, latere autem recto quod sit ad spatium HG, describendum a cylindro cadente dum velocitatem suam acquirit, ut HG ad $\frac{1}{2}AB$. Sint etiam CF & DF arcus alii duo parabolici, axe CD & latere



 recto quod sit prioris lateris recti quadruplum descripti; & convolutione figuræ circum axem *EF* generetur solidum cujus media pars *ABDC* sit cylindrus de quo agimus, & partes extremæ *ABE* & *CDF* contineant partes fluidi inter se quiescentes & in corpora duo rigida concretas, quæ cylindro utrinque tanquam caput & cauda adhæreant. Et solidi *EACFDB*, secundum longitudinem axis sui *FE* in partes versus *E* progredientis, resistentia ea erit quamproxime quam in hac propositione descripsimus, id est, quæ rationem illam habet ad vim qua totus cylindri motus, interea dum longitudo 4*AC* motu illo uniformiter continuato describatur, vel tolli possit vel generari, quam densitas fluidi habet ad densitatem cylindri quamproxime. Et hac vi resistentia minor esse non potest quam in ratione 2. ad 3, per corol. 7. prop. XXXVI.



LEMMA V.

Si cylindrus, sphæra & sphærois, quorum latitudines sunt æquales, in medio canalis cylindrici ita locentur successive ut eorum axes cum axe canalis coincidant: hæc corpora fluxum aquæ per canalem æqualiter impedient.

Nam spatia inter canalem & cylindrum, sphæram, & sphæroidem per quæ aqua transit, sunt æqualia: & aqua per æqualia spatia æqualiter transit.

Hæc ita se habent ex hypothesi, quod aqua omnis supra cylindrum sphæram vel sphæroidem congelatur, cujus fluiditas ad celerrimum aquæ transitum non requiritur, ut in corol. VII. prop. XXXVI. explicui.

LEMMA VI.

Iisdem positis, corpora prædicta æqualiter urgentur ab aqua per canalem fluente.

Patet per lemma v. & motus legem tertiam. Aqua utique & corpora in se mutuo æqualiter agunt.

LEMMA VII.

Si aqua quiescat in canali, & hæc corpora in partes contrarias æquali velocitate per canalem ferantur: æquales erunt eorum resistentiæ inter se.

Constat ex lemmate superiore, nam motus relativi iidem inter se manent.

Scholium.

Eadem est ratio corporum omnium convexorum & rotundorum, quorum axes cum axe canalis coincidunt. Differentia aliqua ex majore vel minore frictione oriri potest; sed in his lemmatis corpora esse politissima supponimus, & medii tenacitatem & frictionem esse nullam, & quod partes fluidi, quæ motibus suis obliquis & superfluis fluxum aquæ per canalem perturbare, impedire, & retardare possunt, quiescant inter se tanquam gelu constrictæ, & corporibus ad ipsorum partes anticas & posticas adhæreant, perinde ut in scholio propositionis præcedentis exposui. Agitur enim in sequentibus de resistentia omnium minima quam corpora rotunda, datis maximis sectionibus transversis descripta, habere possunt.

Corpora fluidis innatantia, ubi moventur in directum, efficiunt ut fluidum ad partem anticam ascendat, ad posticam subsidat, præsertim si figura sint obtusa; & inde resistentiam paulo majorem sentiunt quam si capite & cauda sint acutis. Et corpora in fluidis elasticis mota, si ante & post obtusa sint, fluidum paulo magis condensant ad anticam partem & paulo magis relaxant ad posticam; & inde resistentiam paulo majorem sentiunt quam si capite & cauda sint acutis. Sed nos in his lemmatis & propositionibus non agimus

mus de fluidis elasticis, sed de non elasticis; non de insidentibus fluido, sed de alte immersis. Et ubi resistentia corporum in fluidis non elasticis innotescit, augenda erit hæc resistentia aliquantulum tam in fluidis elasticis, qualis est aer, quam in superficiebus fluidorum stagnantium, qualia sunt maria & paludes.

PROPOSITIO XXXVIII. THEOREMA XXX.

Globi, in fluido compresso infinito & non elastico uniformiter progredientis, resistentia est ad vim qua totus ejus motus, quo tempore octo tertias partes diametri suæ describit, vel tolli possit vel generari, ut densitas fluidi ad densitatem globi quamproxime.

Nam globus est ad cylindrum circumscriptum ut duo ad tria; & propterea vis illa, quæ tollere possit motum omnem cylindri interea dum cylindrus describat longitudinem quatuor diametrorum, globi motum omnem tollet interea dum globus describat duas tertias partes hujus longitudinis, id est, octo tertias partes diametri propriæ. Resistentia autem cylindri est ad hanc vim quamproxime ut densitas fluidi ad densitatem cylindri vel globi per prop. xxxvii. & resistentia globi æqualis est resistentiæ cylindri per lem. v, vi, vii. *Q. E. D.*

Corol. 1. Globorum, in mediis compressis infinitis, resistentiæ sunt in ratione quæ componitur ex duplicata ratione velocitatis, & duplicata ratione diametri, & ratione densitatis mediorum.

Corol. 2. Velocitas maxima quacum globus, vi ponderis sui comparativi, in fluido resistente potest descendere, ea est quam acquirere potest globus idem, eodem pondere, sine resistentia cadendo & casu suo describendo spatium quod sit ad quatuor tertias partes diametri suæ ut densitas globi ad densitatem fluidi. Nam globus tempore casus sui, cum velocitate cadendo acquisita, describet spatium quod erit ad octo tertias diametri suæ, ut densitas globi ad densitatem fluidi; & vis ponderis motum hunc generans, erit ad vim quæ motum eundem generare possit, quo tempore globus octo tertias diametri suæ eadem velocitate describit, ut densitas fluidi

fluidi ad denſitatem globi: ideoque per hanc propoſitionem, vis ponderis æqualis erit vi reſiſtentiæ, & propterea globum accelerare non poteſt.

Corol. 3. Data & denſitate globi & velocitate ejus ſub initio motus, ut & denſitate fluidi compreſſi quieſcentis in qua globus movetur; datur ad omne tempus & velocitas globi & ejus reſiſtentia & ſpatium ab eo deſcriptum, per corol. VII. prop. XXXV.

Corol. 4. Globus in fluido compreſſo quieſcente ejuſdem ſecum denſitatis movendo, dimidiam motus ſui partem prius amittet quam longitudinem duarum ipſius diametrorum deſcripſerit, per idem corol. VII.

PROPOSITIO XXXIX. THEOREMA XXXI.

Globi, per fluidum in canali cylindrico clauſum & compreſſum uniformiter progredientis, reſiſtentia eſt ad vim, qua totus ejus motus, interea dum octo tertias partes diametri ſuæ deſcribit, vel generari poſſit vel tolli, in ratione quæ componitur ex ratione orificii canalis ad exceſſum hujus orificii ſupra dimidium circuli maximi globi, & ratione duplicata orificii canalis ad exceſſum hujus orificii ſupra circulum maximum globi, & ratione denſitatis fluidi ad denſitatem globi quamproxime.

Patet per corol. 2. prop. XXXVII. procedit vero demonſtratio quemadmodum in propoſitione præcedente.

Scholium.

In propoſitionibus duabus noviſſimis (perinde ut in lem. v.) ſuppono quod aqua omnis congelatur quæ globum præcedit, & cujus fluiditas auget reſiſtentiam globi. Si aqua illa omnis liqueſcat, augebitur reſiſtentia aliquantulum. Sed augmentum illud in his propoſitionibus parvum erit & negligi poteſt, propterea quod convexa ſuperficies globi totum fere officium glaciei faciat.

PROPO-

PROPOSITIO XL. PROBLEMA IX.

Globi, in medio fluidissimo compresso progredientis, invenire resistentiam per phænomena.

Sit A pondus globi in vacuo, B pondus ejus in medio resistente, D diameter globi, F spatium quod sit ad $\frac{4}{3}$ D ut densitas globi ad densitatem medii, id est, ut A ad A — B, G tempus quo globus pondere B sine resistentia cadendo describit spatium F, & H velocitas quam globus hocce casu suo acquirit. Et erit H velocitas maxima quacum globus, pondere suo B, in medio resistente potest descendere, per corol. 2. prop. XXXVIII. & resistentia, quam globus ea cum velocitate descendens patitur, æqualis erit ejus ponderi B: resistentia vero, quam patitur in alia quacunque velocitate, erit ad pondus B in duplicata ratione velocitatis hujus ad velocitatem illam maximam H, per corol. 1. prop. XXXVIII.

Hæc est resistentia quæ oritur ab inertia materiæ fluidi. Ea vero quæ oritur ab elasticitate, tenacitate, & frictione partium ejus, sic investigabitur.

Demittatur globus ut pondere suo B in fluido descendat; & sit P tempus cadendi, idque in minutis secundis si tempus G in minutis secundis habeatur. Inveniatur numerus absolutus N qui congruit logarithmo $0,4342944819 \frac{2P}{G}$, sitque L logarithmus numeri $\frac{N+1}{N}$: & velocitas cadendo acquisita erit $\frac{N-1}{N+1}H$, altitudo autem descripta erit $\frac{2PF}{G} - 1,3862943611F + 4,605170186LF$. Si fluidum satis profundum sit, negligi potest terminus $4,605170186LF$; & erit $\frac{2PF}{G} - 1,3862943611F$ altitudo descripta quamproxime. Patent hæc per libri secundi propositionem nonam & ejus corollaria, ex hypothesi quod globus nullam aliam patiatur resistentiam nisi quæ oritur ab inertia materiæ. Si vero aliam insuper resistentiam patiatur, descensus erit tardior, & ex retardatione innotescet quantitas hujus resistentiæ.

Ut corporis in fluido cadentis velocitas & descensus facilius innotescant, composui tabulam sequentem, cujus columna prima denotat tempora descensus, secunda exhibet velocitates cadendo acquisitas existente velocitate maxima 100000000, tertia exhibet spatia temporibus illis cadendo descripta, existente 2 F spatio quod corpus tempore G cum velocitate maxima describit, & quarta exhibet spatia iisdem temporibus cum velocitate maxima descripta. Numeri in quarta columna sunt $\frac{2P}{G}$, & subducendo numerum 1,3862944—4,6051702 L, inveniuntur numeri in tertia columna, & multiplicandi sunt hi numeri per spatium F ut habeantur spatia cadendo descripta. Quinta his insuper adjecta est columna, quæ continet spatia descripta iisdem temporibus a corpore, vi ponderis sui comparativi B, in vacuo cadente.

Tempora P	*Velocitates cadentis in fluido.*	*Spatia cadendo descripta in fluido.*	*Spatia motu maximo descripta.*	*Spatia cadendo descripta in vacuo.*
0,001 G	$99999\frac{29}{30}$	0,000001 F	0,002 F	0,000001 F
0,01 G	999967	0,0001 F	0,02 F	0,0001 F
0,1 G	9966799	0,0099834 F	0,2 F	0,01 F
0,2 G	19737532	0,0397361 F	0,4 F	0,04 F
0,3 G	29131261	0,0886815 F	0,6 F	0,09 F
0,4 G	37994896	0,1559070 F	0,8 F	0,16 F
0,5 G	46211716	0,2402290 F	1,0 F	0,25 F
0,6 G	53704957	0,3402706 F	1,2 F	0,36 F
0,7 G	60436778	0,4545405 F	1,4 F	0,49 F
0,8 G	66403677	0,5815071 F	1,6 F	0,64 F
0,9 G	71629787	0,7196609 F	1,8 F	0,81 F
1 G	76159416	0,8675617 F	2 F	1 F
2 G	96402758	2,6500055 F	4 F	4 F
3 G	99505475	4,6186570 F	6 F	9 F
4 G	99932930	6,6143765 F	8 F	16 F
5 G	99990920	8,6137964 F	10 F	25 F
6 G	99998771	10,6137179 F	12 F	36 F
7 G	99999834	12,6137073 F	14 F	49 F
8 G	99999980	14,6137059 F	16 F	64 F
9 G	99999997	16,6137057 F	18 F	81 F
10 G	$99999999\frac{3}{5}$	18,6137056 F	20 F	100 F

Scholium.

Ut reſiſtentias fluidorum inveſtigarem per experimenta, paravi vas ligneum quadratum, longitudine & latitudine interna digitorum novem pedis *Londinenſis*, profunditate pedum novem cum ſemiſſe, idemque implevi aqua pluviali; & globis ex cera & plumbo incluſo formatis, notavi tempora deſcenſus globorum, exiſtente deſcenſus altitudine 112 digitorum pedis. Pes ſolidus cubicus *Londinenſis* continet 76 libras *Romanas* aquæ pluvialis, & pedis hujus digitus ſolidus continet $\frac{19}{36}$ uncias libræ hujus ſeu grana $253\frac{1}{3}$; & globus aqueus diametro digiti unius deſcriptus continet grana 132,645 in medio aeris, vel grana 132,8 in vacuo; & globus quilibet alius eſt ut exceſſus ponderis ejus in vacuo ſupra pondus ejus in aqua.

Exper. 1. Globus, cujus pondus erat $156\frac{1}{4}$ granorum in aere & 77 granorum in aqua, altitudinem totam digitorum 112 tempore minutorum quatuor ſecundorum deſcripſit. Et experimento repetito, globus iterum cecidit eodem tempore minutorum quatuor ſecundorum.

Pondus globi in vacuo eſt $156\frac{13}{38}$ *gran.* & exceſſus hujus ponderis ſupra pondus globi in aqua eſt $79\frac{13}{38}$ *gran.* Unde prodit globi diameter 0,84224 partium digiti. Eſt autem ut exceſſus ille ad pondus globi in vacuo, ita denſitas aquæ ad denſitatem globi, & ita partes octo tertiæ diametri globi (*viz.* 2,24597 *dig.*) ad ſpatium 2F, quod proinde erit 4,4256 *dig.* Globus tempore minuti unius ſecundi, toto ſuo pondere granorum $156\frac{13}{38}$, cadendo in vacuo deſcribet digitos $193\frac{1}{3}$; & pondere granorum 77, eodem tempore, ſine reſiſtentia cadendo in aqua deſcribet digitos 95,219; & tempore G, quod ſit ad minutum unum ſecundum in ſubduplicata ratione ſpatii F ſeu 2,2128 *dig.* ad 95,219 *dig.* deſcribet 2,2128 *dig.* & velocitatem maximam H acquiret quacum poteſt in aqua deſcendere. Eſt igitur tempus G $0'',15244$. Et hoc tempore G, cum velocitate illa maxima H, globus deſcribet ſpatium 2F digitorum 4,4256; ideoque tempore minutorum quatuor ſecundorum deſcribet ſpatium digitorum 116,1245. Subducatur ſpatium 1,3862944F ſeu 3,0676 *dig.* & manebit ſpatium 113,0569 digitorum quod globus cadendo in aqua, in vaſe ampliſſimo, tempore minutorum quatuor

tuor ſecundorum deſcribet. Hoc ſpatium, ob anguſtiam vaſis lignei prædicti, minui debet in ratione quæ componitur ex ſubduplicata ratione orificii vaſis ad exceſſum orificii hujus ſupra ſemicirculum maximum globi & ex ſimplici ratione orificii ejuſdem ad exceſſum ejus ſupra circulum maximum globi, id eſt, in ratione 1 ad 0,9914. Quo facto, habebitur ſpatium 112,08 digitorum, quod globus cadendo in aqua in hoc vaſe ligneo tempore minutorum quatuor ſecundorum per theoriam deſcribere debuit quamproxime. Deſcripſit vero digitos 112 per experimentum.

Exper. 2. Tres globi æquales, quorum pondera ſeorſim erant $76\frac{1}{3}$ granorum in aere & $5\frac{1}{16}$ granorum in aqua, ſucceſſive demittebantur; & unuſquiſque cecidit in aqua tempore minutorum ſecundorum quindecim, caſu ſuo deſcribens altitudinem digitorum 112.

Computum ineundo prodeunt pondus globi in vacuo $76\frac{5}{12}$ *gran.* exceſſus hujus ponderis ſupra pondus in aqua $71\frac{17}{48}$ *gran.* diameter globi 0,81296 *dig.* octo tertiæ partes hujus diametri 2,16789 *dig.* ſpatium 2 F 2,3217 *dig.* ſpatium quod globus pondere $5\frac{1}{16}$ *gran.* tempore 1″ ſine reſiſtentia cadendo deſcribat 12,808 *dig.* & tempus G 0″,301056. Globus igitur, velocitate maxima quacum poteſt in aqua vi ponderis $5\frac{1}{16}$ *gran.* deſcendere, tempore 0″,301056 deſcribet ſpatium 2,3217 *dig.* & tempore 15″ ſpatium 115,678 *dig.* Subducatur ſpatium 1,3862944 F ſeu 1,609 *dig.* & manebit ſpatium 114,069 *dig.* quod proinde globus eodem tempore in vaſe latiſſimo cadendo deſcribere debet. Propter anguſtiam vaſis noſtri detrahi debet ſpatium 0,895 *dig.* circiter. Et ſic manebit ſpatium 113,174 *dig.* quod globus cadendo in hoc vaſe, tempore 15″ deſcribere debuit per theoriam quamproxime. Deſcripſit vero digitos 112 per experimentum. Differentia eſt inſenſibilis.

Exper. 3. Globi tres æquales, quorum pondera ſeorſim erant 121 *gran.* in aere & 1 *gran.* in aqua, ſucceſſive demittebantur; & cadebant in aqua temporibus 46″, 47″, & 50″, deſcribentes altitudinem digitorum 112.

Per theoriam hi globi cadere debuerunt tempore 40″ circiter. Quod tardius ceciderunt, utrum minori proportioni reſiſtentiæ, quæ a vi inertiæ in tardis motibus oritur, ad reſiſtentiam quæ oritur ab aliis cauſis tribuendum ſit; an potius bullulis nonnullis globo adhærentibus, vel rarefactioni ceræ ad calorem vel tempeſtatis vel

manus globum demittentis, vel etiam erroribus insensibilibus in ponderandis globis in aqua, incertum esse puto. Ideoque pondus globi in aqua debet esse plurium granorum, ut experimentum certum & fide dignum reddatur.

Exper. 4. Experimenta hactenus descripta cœpi, ut investigarem resistentias fluidorum, antequam theoria in propositionibus proxime præcedentibus exposita mihi innotesceret. Postea, ut theoriam inventam examinarem, paravi vas ligneum latitudine interna digitorum $8\frac{2}{3}$, profunditate pedum quindecim cum triente. Deinde ex cera & plumbo incluso globos quatuor formavi, singulos pondere $139\frac{1}{4}$ granorum in aere & $7\frac{1}{8}$ granorum in aqua. Et hos demisi ut tempora cadendi in aqua per pendulum, ad semi-minuta secunda oscillans, mensurarem. Globi, ubi ponderabantur & postea cadebant, frigidi erant & aliquamdiu frigidi manserant; quia calor ceram rarefacit, & per rarefactionem diminuit pondus globi in aqua, & cera rarefacta non statim ad densitatem pristinam per frigus reducitur. Antequam caderent, immergebantur penitus in aquam; ne pondere partis alicujus ex aqua extantis descensus eorum sub initio acceleraretur. Et ubi penitus immersi quiescebant, demittebantur quam cautissime, ne impulsum aliquem a manu demittente acciperent. Ceciderunt autem successive temporibus oscillationum $47\frac{1}{2}$, $48\frac{1}{2}$, 50 & 51, describentes altitudinem pedum quindecim & digitorum duorum. Sed tempestas jam paulo frigidior erat quam cum globi ponderabantur, ideoque iteravi experimentum alio die, & globi ceciderunt temporibus oscillationum 49, $49\frac{1}{2}$, 50 & 53, ac tertio temporibus oscillationum $49\frac{1}{2}$, 50, 51 & 53. Et experimento sæpius capto, globi ceciderunt maxima ex parte temporibus oscillationum $49\frac{1}{2}$ & 50. Ubi tardius cecidere, suspicor eosdem retardatos fuisse impingendo in latera vasis.

Jam computum per theoriam ineundo, prodeunt pondus globi in vacuo $139\frac{3}{8}$ granorum. Excessus hujus ponderis supra pondus globi in aqua $132\frac{11}{40}$ *gran.* Diameter globi 0,99868 *dig.* Octo tertiæ partes diametri 2,66315 *dig.* Spatium 2 F 2,8066 *dig.* Spatium quod globus pondere $7\frac{1}{8}$ granorum, tempore minuti unius secundi, sine resistentia cadendo describit 9,88164 *dig.* Et tempus G 0″,376843. Globus igitur, velocitate maxima, quacum potest in aqua vi ponderis $7\frac{1}{8}$ granorum descendere, tempore 0″,376843 describit

ſcribit ſpatium 2,8066 digitorum, & tempore 1″ ſpatium 7,44766 digitorum, & tempore 25″ ſeu oſcillationum 50 ſpatium 186,1915 *dig.* Subducatur ſpatium 1,386294 F, ſeu 1,9454 *dig.* & manebit ſpatium 184,2461 *dig.* quod globus eodem tempore in vaſe latiſſimo deſcribet. Ob anguſtiam vaſis noſtri, minuatur hoc ſpatium in ratione quæ componitur ex ſubduplicata ratione orificii vaſis ad exceſſum hujus orificii ſupra ſemicirculum maximum globi, & ſimplici ratione ejuſdem orificii ad exceſſum ejus ſupra circulum maximum globi; & habebitur ſpatium 181,86 digitorum, quod globus in hoc vaſe tempore oſcillationum 50 deſcribere debuit per theoriam quamproxime. Deſcripſit vero ſpatium 182 digitorum tempore oſcillationum $49\frac{1}{2}$ vel 50 per experimentum.

Exper. 5. Globi quatuor pondere $154\frac{3}{8}$ *gran.* in aere & $21\frac{1}{2}$ *gran.* in aqua ſæpe demiſſi, cadebant tempore oſcillationum $28\frac{1}{2}$, 29, $29\frac{1}{2}$ & 30, & nonnunquam 31, 32 & 33, deſcribentes altitudinem pedum quindecim & digitorum duorum.

Per theoriam cadere debuerunt tempore oſcillationum 29 quamproxime.

Exper. 6. Globi quinque pondere $212\frac{3}{8}$ *gran.* in aere & $79\frac{1}{2}$ in aqua ſæpe demiſſi, cadebant tempore oſcillationum 15, $15\frac{1}{2}$, 16, 17 & 18, deſcribentes altitudinem pedum quindecim & digitorum duorum.

Per theoriam cadere debuerunt tempore oſcillationum 15 quamproxime.

Exper. 7. Globi quatuor pondere $293\frac{3}{8}$ *gran.* in aere & $35\frac{7}{8}$ *gran.* in aqua ſæpe demiſſi, cadebant tempore oſcillationum $29\frac{1}{2}$, 30, $30\frac{1}{2}$, 31, 32 & 33, deſcribentes altitudinem pedum quindecim & digiti unius cum ſemiſſe.

Per theoriam cadere debuerunt tempore oſcillationum 28 quamproxime.

Cauſam inveſtigando cur globorum, ejuſdem ponderis & magnitudinis, aliqui citius alii tardius caderent, in hanc incidi; quod globi, ubi primum demittebantur & cadere incipiebant, oſcillarent circum centra, latere illo quod forte gravius eſſet primum deſcendente, & motum oſcillatorium generante. Nam per oſcillationes ſuas globus majorem motum communicat aquæ, quam ſi ſine oſcillationibus deſcenderet; & communicando, amittit partem motus

proprii quo descendere deberet: & pro majore vel minore oscillatione, magis vel minus retardatur. Quinetiam globus recedit semper a latere suo quod per oscillationem descendit, & recedendo appropinquat lateribus vasis & in latera nonnunquam impingitur. Et hæc oscillatio in globis gravioribus fortior est, & in majoribus aquam magis agitat. Quapropter, ut oscillatio globorum minor redderetur, globos novos ex cera & plumbo construxi, infigendo plumbum in latus aliquod globi prope superficiem ejus; & globum ita demisi, ut latus gravius, quoad fieri potuit, esset infimum ab initio descensus. Sic oscillationes factæ sunt multo minores quam prius, & globi temporibus minus inæqualibus ceciderunt, ut in experimentis sequentibus.

Exper. 8. Globi quatuor, pondere granorum 139 in aere & $6\frac{1}{2}$ in aqua, sæpe demissi, ceciderunt temporibus oscillationum non plurium quam 52, non pauciorum quam 50, & maxima ex parte tempore oscillationum 51 circiter, describentes altitudinem digitorum 182.

Per theoriam cadere debuerunt tempore oscillationum 52 circiter.

Exper. 9. Globi quatuor, pondere granorum $273\frac{1}{4}$ in aere & $140\frac{3}{4}$ in aqua, sæpius demissi, ceciderunt temporibus oscillationum non pauciorum quam 12, non plurium quam 13, describentes altitudinem digitorum 182.

Per theoriam vero hi globi cadere debuerunt tempore oscillationum $11\frac{1}{3}$ quamproxime.

Exper. 10. Globi quatuor, pondere granorum 384 in aere & $119\frac{1}{2}$ in aqua, sæpe demissi, cadebant temporibus oscillationum $17\frac{3}{4}$, 18, $18\frac{1}{2}$ & 19, describentes altitudinem digitorum $181\frac{1}{2}$. Et ubi ceciderunt tempore oscillationum 19, nonnunquam audivi impulsum eorum in latera vasis antequam ad fundum pervenerunt.

Per theoriam vero cadere debuerunt tempore oscillationum $15\frac{5}{9}$ quamproxime.

Exper. 11. Globi tres æquales, pondere granorum 48 in aere & $3\frac{29}{32}$ in aqua, sæpe demissi, ceciderunt temporibus oscillationum $43\frac{1}{2}$, 44, $44\frac{1}{2}$, 45 & 46, & maxima ex parte 44 & 45, describentes altitudinem digitorum $182\frac{1}{2}$ quamproxime.

Per

Per theoriam cadere debuerunt tempore oscillationum $46\frac{1}{9}$ circiter.

Exper. 12. Globi tres æquales, pondere granorum 141 in aere & $4\frac{3}{8}$ in aqua, aliquoties demissi, ceciderunt temporibus oscillationum 61, 62, 63, 64 & 65, describentes altitudinem digitorum 182.

Et per theoriam cadere debuerunt tempore oscillationum $64\frac{1}{2}$ quamproxime.

Per hæc experimenta manifestum est quod, ubi globi tarde ceciderunt, ut in experimentis secundis, quartis, quintis, octavis, undecimis ac duodecimis, tempora cadendi recte exhibentur per theoriam: at ubi globi velocius ceciderunt, ut in experimentis sextis, nonis ac decimis, resistentia paulo major extitit quam in duplicata ratione velocitatis. Nam globi inter cadendum oscillant aliquantulum; & hæc oscillatio in globis levioribus & tardius cadentibus, ob motus languorem cito cessat; in gravioribus autem & majoribus, ob motus fortitudinem diutius durat, & non nisi post plures oscillationes ab aqua ambiente cohiberi potest. Quinetiam globi, quo velociores sunt, eo minus premuntur a fluido ad posticas suas partes; & si velocitas perpetuo augeatur, spatium vacuum tandem a tergo relinquent, nisi compressio fluidi simul augeatur. Debet autem compressio fluidi (per prop. XXXII. & XXXIII.) augeri in duplicata ratione velocitatis, ut resistentia sit in eadem duplicata ratione. Quoniam hoc non fit, globi velociores paulo minus premuntur a tergo, & defectu pressionis hujus, resistentia eorum fit paulo major quam in duplicata ratione velocitatis.

Congruit igitur theoria cum phænomenis corporum cadentium in aqua, reliquum est ut examinemus phænomena cadentium in aere.

Exper. 13. A culmine ecclesiæ Sancti *Pauli*, in urbe *Londini*, mense Junio 1710. globi duo vitrei simul demittebantur, unus argenti vivi plenus, alter aeris; & cadendo describebant altitudinem pedum *Londinensium* 220. Tabula lignea ad unum ejus terminum polis ferreis suspendebatur, ad alterum pessulo ligneo incumbebat; & globi duo huic tabulæ impositi simul demittebantur, subtrahendo pessulum ope fili ferrei ad terram usque demissi ut tabula polis ferreis solummodo innixa super iisdem devolveretur, & eodem temporis momento pendulum ad minuta secunda oscillans, per filum illud

De Motu Corporum

illud ferreum tractum demitteretur & oscillare inciperet. Diametri & pondera globorum ac tempora cadendi exhibentur in tabula sequente.

Globorum mercurio plenorum			*Globorum aere plenorum.*		
Pondera	*Diametri*	*Tempora cadendi.*	*Pondera*	*Diametri*	*Tempora cadendi.*
908 *gran.*	0,8 *digit.*	4″	510 *gran.*	5,1 *digit.*	8″$\frac{1}{2}$
983	0,8	4 —	642	5,2	8
866	0,8	4	599	5,1	8
747	0,75	4 +	515	5,0	8$\frac{1}{4}$
808	0,75	4	483	5,0	8$\frac{1}{2}$
784	0,75	4 +	641	5,2	8

Cæterum tempora observata corrigi debent. Nam globi mercuriales (per theoriam *Galilæi*) minutis quatuor secundis describent pedes *Londinenses* 257, & pedes 220 minutis tantum 3″ 42‴. Tabula lignea utique, detracto pessulo, tardius devolvebatur quam par erat, & tarda sua devolutione impediebat descensum globorum sub initio. Nam globi incumbebant tabulæ prope medium ejus, & paulo quidem propiores erant axi ejus quam pessulo. Et hinc tempora cadendi prorogata fuerunt minutis tertiis octodecim circiter, & jam corrigi debent detrahendo illa minuta, præsertim in globis majoribus qui tabulæ devolventi paulo diutius incumbebant propter magnitudinem diametrorum. Quo facto tempora, quibus globi sex majores cecidere, evadent 8″ 12‴, 7″ 42‴, 7″ 42‴, 7″ 57‴, 8″ 12‴, & 7″ 42‴.

Globorum igitur aere plenorum quintus, diametro digitorum quinque pondere granorum 483 constructus, cecidit tempore 8″ 12‴, describendo altitudinem pedum 220. Pondus aquæ huic globo æqualis est 16600 granorum; & pondus aeris eidem æqualis est $\frac{16600}{860}$ *gran.* seu 19$\frac{3}{10}$ *gran.* ideoque pondus globi in vacuo est 502$\frac{3}{10}$ *gran.* & hoc pondus est ad pondus aeris globo æqualis, ut 502$\frac{3}{10}$ ad 19$\frac{3}{10}$, & ita sunt 2 F ad octo tertias partes diametri globi, id est, ad 13$\frac{1}{3}$ digitos. Unde 2 F prodeunt 28 *ped.* 11 *dig.* Globus cadendo in vacuo, toto suo pondere 502$\frac{3}{10}$ granorum, tempore minuti unius secundi describit digitos 193$\frac{1}{3}$ ut supra, & pondere 483 *gran.* describit digitos 185,905, & eodem pondere 483 *gran.* etiam

in

in vacuo defcribit fpatium F feu 14 *ped.* 5½ *dig.* tempore 57‴ 58⁗, & velocitatem maximam acquirit quacum poffit in aere defcendere. Hac velocitate globus, tempore 8″ 12‴, defcribet fpatium pedum 245 & digitorum 5⅓. Aufer 1,3863 F feu 20 *ped.* 0½ *dig.* & manebunt 225 *ped.* 5 *dig.* Hoc fpatium igitur globus, tempore 8″ 12‴, cadendo defcribere debuit per theoriam. Defcripfit vero fpatium 220 pedum per experimentum. Differentia infenfibilis eft.

Similibus computis ad reliquos etiam globos aere plenos applicatis, confeci tabulam fequentem.

Globorum pondera.	*Diametri.*	*Tempora cadendi ab altitudine pedum 220.*		*Spatia defcribenda per theoriam.*		*Exceffus.*	
510 *gran.*	5,1 *dig.*	8″	12‴	226 *ped.*	11 *dig.*	6 *ped.*	11 *dig.*
642	5,2	7	42	230	9	10	9
599	5,1	7	42	227	10	7	10
515	5	7	57	224	5	4	5
483	5	8	12	225	5	5	5
641	5,2	7	42	230	7	10	7

Exper. 14. Anno 1719. menfe Julio, D. Defaguliers hujufmodi experimenta iterum cepit, formando veficas porcorum in orbem fphæricum ope fphæræ ligneæ concavæ, ambientis quam madefactæ implere cogebantur inflando aerem; & hafce arefactas & exemptas demittendo ab altiore loco in templi ejufdem turri rotunda fornicata, nempe ab altitudine pedum 272; & eodem temporis momento demittendo etiam globum plumbeum cujus pondus erat duarum librarum Romanarum circiter. Et interea aliqui ftantes in fuprema parte templi, ubi globi demittebantur, notabant tempora tota cadendi, & alii ftantes in terra notabant differentiam temporum inter cafum globi plumbei & cafum veficæ. Tempora autem menfurabantur pendulis ad dimidia minuta fecunda ofcillantibus. Et eorum qui in terra ftabant unus habebat horologium cum elatere ad fingula minuta fecunda quater vibrante; alius habebat machinam aliam affabre conftructam cum pendulo etiam ad fingula minuta fecunda quater vibrante. Et fimilem machinam habebat unus eorum qui ftabant in fummitate templi. Et hæc inftrumenta ita formabantur,

ut motus eorum pro lubitu vel inciperent vel ſiſterentur. Globus autem plumbeus cadebat tempore minutorum ſecundorum quatuor cum quadrante circiter. Et addendo hoc tempus ad prædictam temporis differentiam, colligebatur tempus totum quo veſica cecidit. Tempora, quibus veſicæ quinque poſt caſum globi plumbei prima vice ceciderunt, erant $14\frac{3}{4}''$, $12\frac{3}{4}''$, $14\frac{5}{8}''$, $17\frac{3}{4}''$, & $16\frac{7}{8}''$, & ſecunda vice $14\frac{1}{2}''$, $14\frac{1}{4}''$, $14''$, $19''$, & $16\frac{3}{4}''$. Addantur $4\frac{1}{4}''$, tempus utique quo globus plumbeus cecidit, & tempora tota, quibus veſicæ quinque ceciderunt, erant prima vice $19''$, $17''$, $18\frac{7}{8}''$, $22''$, & $21\frac{1}{8}''$; & ſecunda vice, $18\frac{3}{4}''$, $18\frac{1}{2}''$, $18\frac{1}{4}''$, $23\frac{1}{4}''$, & $21''$. Tempora autem in ſummitate templi notata, erant prima vice $19\frac{3}{8}''$, $17\frac{1}{4}''$, $18\frac{3}{4}''$, $22\frac{1}{8}''$, & $21\frac{5}{8}''$; & ſecunda vice $19''$, $18\frac{5}{8}''$, $18\frac{3}{8}''$, $24''$, & $21\frac{1}{4}''$. Cæterum veſicæ non ſemper recta cadebant, ſed nonnunquam volitabant, & hinc inde oſcillabantur inter cadendum. Et his motibus tempora cadendi prorogata ſunt & aucta nonnunquam dimidio minuti unius ſecundi, nonnunquam minuto ſecundo toto. Cadebant autem rectius veſica ſecunda & quarta prima vice; & prima ac tertia ſecunda vice. Veſica quinta rugoſa erat & per rugas ſuas nonnihil retardabatur. Diametros veſicarum deducebam ex earum circumferentiis filo tenuiſſimo bis circundato menſuratis. Et theoriam contuli cum experimentis in tabula ſequente, aſſumendo denſitatem aëris eſſe ad denſitatem aquæ pluvialis ut 1 ad 860, & computando ſpatia quæ globi per theoriam deſcribere debuerunt cadendo.

Veſicarum pondera.	*Diametri.*	*Tempora cadendi ab altitudine pedum 272.*	*Spatia iiſdem temporibus deſcribenda per theoriam.*		*Differentia inter theor. & exper.*	
128 *gran.*	5,28 *dig.*	$19''$	271 *ped.*	11 *dig.*	— 0 *ped.*	1 *dig.*
156	5,19	17	272	$0\frac{1}{2}$	+ 0	$0\frac{1}{2}$
$137\frac{1}{2}$	5,3	$18\frac{1}{2}$	272	7	+ 0	7
$97\frac{1}{2}$	5,26	22	277	4	+ 5	4
$99\frac{1}{8}$	5	$21\frac{1}{8}$	282	0	+ 10	0

Globorum igitur tam in aëre quam in aqua motorum reſiſtentia prope omnis per theoriam noſtram recte exhibetur, ac denſitati fluidorum, paribus globorum velocitatibus ac magnitudinibus, proportionalis eſt.

In

In ſcholio, quod ſectioni ſextæ ſubjunctum eſt, oſtendimus per experimenta pendulorum quod globorum æqualium & æquivelocium in aëre, aqua, & argento vivo motorum reſiſtentiæ ſunt ut fluidorum denſitates. Idem hic oſtendimus magis accurate per experimenta corporum cadentium in aëre & aqua. Nam pendula ſingulis oſcillationibus motum cient in fluido motui penduli redeuntis ſemper contrarium, & reſiſtentia ab hoc motu oriunda, ut & reſiſtentia fili quo pendulum ſuſpendebatur, totam penduli reſiſtentiam majorem reddiderunt quam reſiſtentia quæ per experimenta corporum cadentium prodiit. Etenim per experimenta pendulorum in ſcholio illo expoſita, globus ejuſdem denſitatis cum aqua, deſcribendo longitudinem ſemidiametri ſuæ in aëre, amittere deberet motus ſui partem $\frac{1}{3342}$. At per theoriam in hac ſeptima ſectione expoſitam & experimentis cadentium confirmatam, globus idem deſcribendo longitudinem eandem, amittere deberet motus ſui partem tantum $\frac{1}{4586}$, poſito quod denſitas aquæ ſit ad denſitatem aëris ut 860 ad 1. Reſiſtentiæ igitur per experimenta pendulorum majores prodiere (ob cauſas jam deſcriptas) quam per experimenta globorum cadentium, idque in ratione 4 ad 3 circiter. Attamen cum pendulorum in aëre, aqua & argento vivo oſcillantium reſiſtentiæ a cauſis ſimilibus ſimiliter augeantur, proportio reſiſtentiarum in his mediis, tam per experimenta pendulorum, quam per experimenta corporum cadentium, ſatis recte exhibebitur. Et inde concludi poteſt quod corporum in fluidis quibuſcunque fluidiſſimis motorum reſiſtentiæ, cæteris paribus, ſunt ut denſitates fluidorum.

His ita ſtabilitis, dicere jam licet quamnam motus ſui partem globus quilibet, in fluido quocunque projectus, dato tempore amittet quamproxime. Sit D diameter globi, & V velocitas ejus ſub initio motus, & T tempus, quo globus velocitate V in vacuo deſcribet ſpatium, quod ſit ad ſpatium $\frac{8}{3}$D ut denſitas globi ad denſitatem fluidi: & globus in fluido illo projectus, tempore quovis alio t, amittet velocitatis ſuæ partem $\frac{tV}{T+t}$, manente parte $\frac{TV}{T+t}$, & deſcribet ſpatium, quod ſit ad ſpatium uniformi velocitate V eodem tempore deſcriptum in vacuo, ut logarithmus numeri $\frac{T+t}{T}$ multiplicatus per

numerum

numerum 2,302585093 eſt ad numerum $\frac{t}{T}$, per corol. VII. prop. XXXV. In motibus tardis reſiſtentia poteſt eſſe paulo minor, propterea quod figura globi paulo aptior ſit ad motum quam figura cylindri eadem diametro deſcripti. In motibus velocibus reſiſtentia poteſt eſſe paulo major, propterea quod elaſticitas & compreſſio fluidi non augeantur in duplicata ratione velocitatis. Sed hujuſmodi minutias hic non expendo.

Et quamvis aër, aqua, argentum vivum & ſimilia fluida, per diviſionem partium in infinitum, ſubtiliarentur & fierent media infinite fluida; tamen globis projectis haud minus reſiſterent. Nam reſiſtentia, de qua agitur in propoſitionibus præcedentibus, oritur ab inertia materiæ; & inertia materiæ corporibus eſſentialis eſt & quantitati materiæ ſemper proportionalis. Per diviſionem partium fluidi, reſiſtentia quæ oritur a tenacitate & frictione partium diminui quidem poteſt: ſed quantitas materiæ per diviſionem partium ejus non diminuitur; & manente quantitate materiæ, manet ejus vis inertiæ, cui reſiſtentia, de qua hic agitur, ſemper proportionalis eſt. Ut hæc reſiſtentia diminuatur, diminui debet quantitas materiæ in ſpatiis per quæ corpora moventur. Et propterea ſpatia cœleſtia, per quæ globi planetarum & cometarum in omnes partes liberrime & ſine omni motus diminutione ſenſibili perpetuo moventur, fluido omni corporeo deſtituuntur, ſi forte vapores longe tenuiſſimos & trajectos lucis radios excipias.

Projectilia utique motum cient in fluidis progrediendo, & hic motus oritur ab exceſſu preſſionis fluidi ad projectilis partes anticas ſupra preſſionem ad ejus partes poſticas, & non minor eſſe poteſt in mediis infinite fluidis quam in aere, aqua & argento vivo pro denſitate materiæ in ſingulis. Hic autem preſſionis exceſſus, pro quantitate ſua, non tantum motum ciet in fluido, ſed etiam agit in projectile ad motum ejus retardandum: & propterea reſiſtentia in omni fluido eſt ut motus in fluido a projectili excitatus, nec minor eſſe poteſt in æthere ſubtiliſſimo pro denſitate ætheris, quam in aëre, aqua & argento vivo pro denſitatibus horum fluidorum.

SECTIO

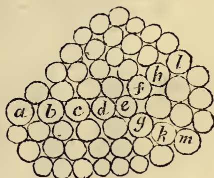
SECTIO VIII.

De motu per fluida propagato.

PROPOSITIO XLI. THEOREMA XXXII.

Pressio non propagatur per fluidum secundum lineas rectas, nisi ubi particulæ fluidi in directum jacent.

Si jaceant particulæ *a*, *b*, *c*, *d*, *e* in linea recta, potest quidem pressio directe propagari ab *a* ad *e*; at particula *e* urgebit particulas oblique positas *f* & *g* oblique, & particulæ illæ *f* & *g* non sustinebunt pressionem illatam, nisi fulciantur a particulis ulterioribus *h* & *k*; quatenus autem fulciuntur, premunt particulas fulcientes; & hæ non sustinebunt pressionem nisi fulciantur ab ulterioribus *l* & *m* easque premant, & sic deinceps in infinitum. Pressio igitur, quam primum propagatur ad particulas quæ non in directum jacent, divaricare incipiet & oblique propagabitur in infinitum; & postquam incipit oblique propagari, si inciderit in particulas ulteriores, quæ non in directum jacent, iterum divaricabit; idque toties, quoties in particulas non accurate in directum jacentes inciderit. *Q. E. D.*



Corol. Si pressionis, a dato puncto per fluidum propagatæ, pars aliqua obstaculo intercipiatur; pars reliqua, quæ non intercipitur, divaricabit in spatia pone obstaculum. Id quod sic etiam demonstrari potest. A puncto *A* propagetur pressio quaquaversum, idque si fieri potest secundum lineas rectas, & obstaculo *NBCK* perforato in *BC*, intercipiatur ea omnis, præter partem coniformem *APQ*, quæ per foramen circulare *BC* transit. Planis transversis *de*, *fg*, *hi* distinguatur conus *APQ* in frusta; & interea dum conus *ABC*, pressionem propagando, urget frustum conicum ulterius *degf* in superficie *de*, & hoc frustum urget frustum proximum *fgih* in superficie *fg*, & frustum illud urget frustum tertium, & sic deinceps in infinitum; manifestum est (per motus legem tertiam) quod fru-

stum

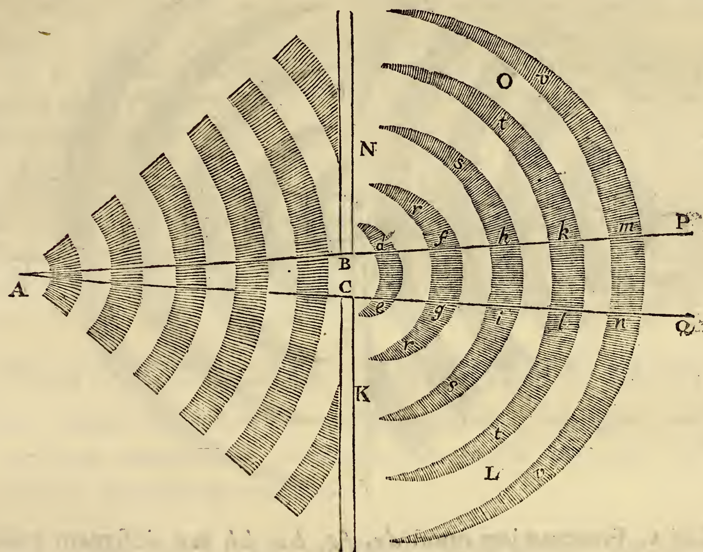
ſtum primum *defg*, reactione fruſti ſecundi *fghi*, tantum urgebitur & premetur in ſuperficie *fg*, quantum urget & premit fruſtum illud ſecundum. Fruſtum igitur *degf* inter conum *Ade* & fruſtum *fhig* comprimitur utrinque, & propterea (per corol. VI. prop. XIX.) figuram ſuam ſervare nequit, niſi vi eadem comprimatur undique. Eodem igitur impetu quo premitur in ſuperficiebus *de*, *fg*, conabitur cedere ad latera *df*, *eg*; ibique (cum rigidum non ſit, ſed omnimodo fluidum) excurret ac dilatabitur, niſi fluidum ambiens adſit, quo conatus iſte cohibeatur. Proinde conatu excurrendi, premet tam fluidum ambiens ad latera *df*, *eg* quam fruſtum *fghi* eodem impetu; & propterea preſſio non minus propagabitur a lateribus *df*, *eg* in ſpatia *NO*, *KL* hinc inde, quam propagatur a ſuperficie *fg* verſus *PQ*. *Q. E. D.*

PROPO-

PROPOSITIO XLII. THEOREMA XXXIII.

Motus omnis per fluidum propagatus divergit a recto tramite in ſpatia immota.

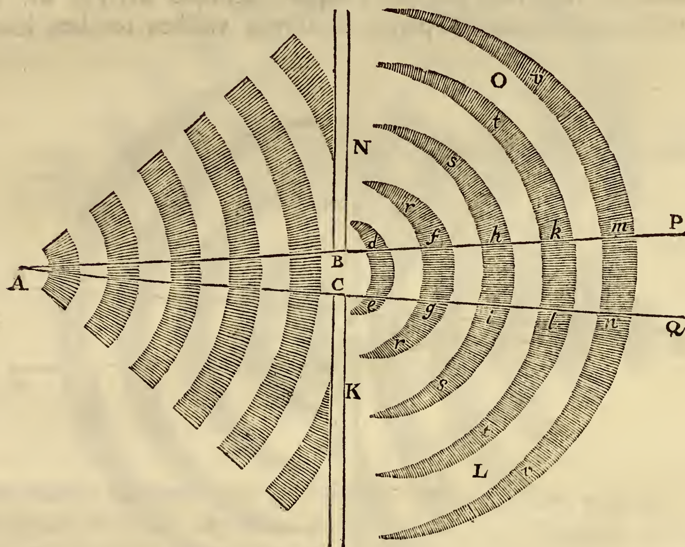
Caſ. 1. Propagetur motus a puncto *A* per foramen *BC*, pergatque, ſi fieri poteſt, in ſpatio conico *BCQP*, ſecundum lineas rectas divergentes a puncto *A*. Et ponamus primo quod motus iſte ſit undarum in ſuperficie ſtagnantis aquæ. Sintque *de*, *fg*, *hi*, *kl*, &c. undarum ſingularum partes altiſſimæ, vallibus totidem inter-



mediis ab invicem diſtinctæ. Igitur quoniam aqua in undarum jugis altior eſt quam in fluidi partibus immotis *LK*, *NO*, defluet eadem de jugorum terminis *e*, *g*, *i*, *l*, &c. *d*, *f*, *h*, *k*, &c. hinc inde verſus *KL* & *NO*: & quoniam in undarum vallibus depreſſior eſt quam in fluidi partibus immotis *KL*, *NO*; defluet eadem de partibus illis immotis in undarum valles. Defluxu priore undarum juga, poſteriore valles hinc inde dilatantur & propagantur verſus *KL* & *NO*.

De Motu Corporum

NO. Et quoniam motus undarum ab *A* versus *PQ* fit per continuum defluxum jugorum in valles proximos, ideoque celerior non est quam pro celeritate descensus; & descensus aquæ hinc inde versus *KL* & *NO* eadem velocitate peragi debet; propagabitur dilatatio undarum hinc inde versus *KL* & *NO* eadem velocitate qua undæ ipsæ ab *A* versus *PQ* recta progrediuntur. Proindeque spatium totum hinc inde versus *KL* & *NO* ab undis dilatatis *rfgr*, *shis*, *tklt*, *vmnv*, &c. occupabitur. *Q. E. D.* Hæc ita se habere quilibet in aqua stagnante experiri potest.



Cas. 2. Ponamus jam quod *de*, *fg*, *hi*, *kl*, *mn* designent pulsus a puncto *A* per medium elasticum successive propagatos. Pulsus propagari concipe per successivas condensationes & rarefactiones medii, sic ut pulsus cujusque pars densissima sphæricam occupet superficiem circa centrum *A* descriptam, & inter pulsus successivos æqualia intercedant intervalla. Designent autem lineæ *de*, *fg*, *hi*, *kl*, &c. densissimas pulsuum partes, per foramen *BC* propagatas. Et quoniam medium ibi densius est quam in spatiis hinc inde versus *KL* & *NO*, dilatabit sese tam versus spatia illa *KL*, *NO* utrinque sita,

ſita, quam verſus pulſuum rariora intervalla; eoque pacto rarius ſemper evadens e regione intervallorum ac denſius e regione pulſuum, participabit eorundem motum. Et quoniam pulſuum progreſſivus motus oritur a perpetua relaxatione partium denſiorum verſus antecedentia intervalla rariora; & pulſus eadem fere celeritate ſeſe in medii partes quieſcentes *KL*, *NO* hinc inde relaxare debent; pulſus illi eadem fere celeritate ſeſe dilatabunt undique in ſpatia immota *KL*, *NO*, qua propagantur directe a centro *A*; ideoque ſpatium totum *KLON* occupabunt. *Q. E. D.* Hoc experimur in ſonis, qui vel monte interpoſito audiuntur, vel in cubiculum per feneſtram admiſſi ſeſe in omnes cubiculi partes dilatant, inque angulis omnibus audiuntur, non tam reflexi a parietibus oppoſitis, quam a feneſtra directe propagati, quantum ex ſenſu judicare licet.

Caſ. 3. Ponamus denique quod motus cujuſcunque generis propagetur ab *A* per foramen *BC*: & quoniam propagatio iſta non fit, niſi quatenus partes medii centro *A* propiores urgent commoventque partes ulteriores; & partes quæ urgentur fluidæ ſunt, ideoque recedunt quaquaverſum in regiones ubi minus premuntur: recedent eædem verſus medii partes omnes quieſcentes, tam laterales *KL* & *NO*, quam anteriores *PQ*, eoque pacto motus omnis, quam primum per foramen *BC* tranſiit, dilatari incipiet & inde tanquam a principio & centro, in partes omnes directe propagari. *Q. E. D.*

PROPOSITIO XLIII. THEOREMA XXXIV.

Corpus omne tremulum in medio elaſtico propagabit motum pulſuum undique in directum; in medio vero non elaſtico motum circularem excitabit.

Caſ. 1. Nam partes corporis tremuli vicibus alternis eundo & redeundo, itu ſuo urgebunt & propellent partes medii ſibi proximas, & urgendo compriment eaſdem & condenſabunt; dein reditu ſuo ſinent partes compreſſas recedere & ſeſe expandere. Igitur partes medii corpori tremulo proximæ ibunt & redibunt per vices, ad inſtar partium corporis illius tremuli: & qua ratione partes corporis hujus agitabant haſce medii partes, hæ ſimilibus tremoribus agitatæ agitabunt partes ſibi proximas, eæque ſimiliter agitatæ agitabunt ulteriores, & ſic deinceps in infinitum. Et quemadmodum

medii partes primæ eundo condensantur & redeundo relaxantur, sic partes reliquæ quoties eunt condensabuntur, & quoties redeunt sese expandent. Et propterea non omnes ibunt & simul redibunt (sic enim determinatas ab invicem distantias servando, non rarefierent & condensarentur per vices) sed accedendo ad invicem ubi condensantur, & recedendo ubi rarefiunt, aliquæ earum ibunt dum aliæ redeunt; idque vicibus alternis in infinitum. Partes autem euntes & eundo condensatæ, ob motum suum progressivum, quo feriunt obstacula, sunt pulsus; & propterea pulsus successivi a corpore omni tremulo in directum propagabuntur; idque æqualibus circiter ab invicem distantiis, ob æqualia temporis intervalla, quibus corpus tremoribus suis singulis singulos pulsus excitat. Et quanquam corporis tremuli partes eant & redeant secundum plagam aliquam certam & determinatam, tamen pulsus inde per medium propagati sese dilatabunt ad latera, per propositionem præcedentem; & a corpore illo tremulo tanquam centro communi, secundum superficies propemodum sphæricas & concentricas, undique propagabuntur. Cujus rei exemplum aliquod habemus in undis, quæ si digito tremulo excitentur, non solum pergent hinc inde secundum plagam motus digiti, sed, in modum circulorum concentricorum, digitum statim cingent & undique propagabuntur. Nam gravitas undarum supplet locum vis elasticæ.

Cas. 2. Quod si medium non sit elasticum: quoniam ejus partes a corporis tremuli partibus vibratis pressæ condensari nequeunt, propagabitur motus in instanti ad partes ubi medium facillime cedit; hoc est, ad partes quas corpus tremulum alioqui vacuas a tergo relinqueret. Idem est casus cum casu corporis in medio quocunque projecti. Medium cedendo projectilibus, non recedit in infinitum; sed in circulum eundo, pergit ad spatia quæ corpus relinquit a tergo. Igitur quoties corpus tremulum pergit in partem quamcunque, medium cedendo perget per circulum ad partes quas corpus relinquit; & quoties corpus regreditur ad locum priorem, medium inde repelletur & ad locum suum priorem redibit. Et quamvis corpus tremulum non sit firmum, sed modis omnibus flexile, si tamen magnitudine datum maneat, quoniam tremoribus suis nequit medium ubivis urgere, quin alibi eidem simul cedat; efficiet ut medium,

um,

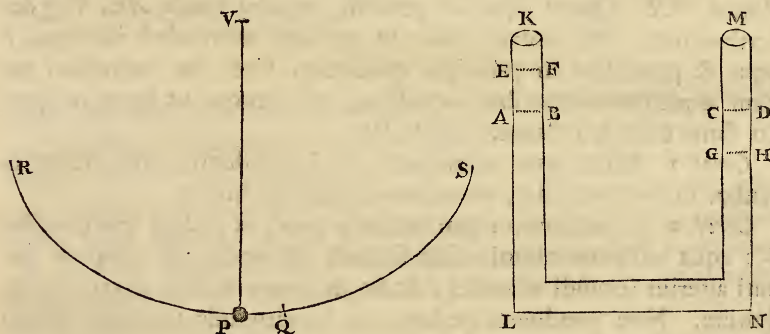
um, recedendo a partibus ubi premitur, pergat ſemper in orbem ad partes quæ eidem cedunt. *Q. E. D.*

Corol. Hallucinantur igitur qui credunt agitationem partium flammæ ad preſſionem, per medium ambiens, ſecundum lineas rectas propagandum conducere. Debebit ejuſmodi preſſio non ab agitatione ſola partium flammæ, ſed a totius dilatatione derivari.

PROPOSITIO XLIV. THEOREMA XXXV.

Si aqua in canalis cruribus erectis KL, MN *vicibus alternis aſcendat & deſcendat; conſtruatur autem pendulum cujus longitudo inter punctum ſuſpenſionis & centrum oſcillationis æquetur ſemiſſi longitudinis aquæ in canali: dico quod aqua aſcendet & deſcendet iiſdem temporibus quibus pendulum oſcillatur.*

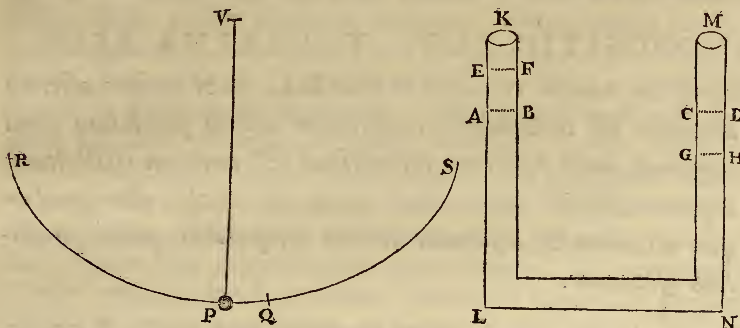
Longitudinem aquæ menſuro ſecundum axes canalis & crurum, eandem ſummæ horum axium æquando; & reſiſtentiam aquæ, quæ oritur ab attritu canalis, hic non conſidero. Deſignent igitur *AB*, *CD* mediocrem altitudinem aquæ in crure utroque; & ubi aqua



in crure *KL* aſcendit ad altitudinem *EF*, deſcenderit aqua in crure *MN* ad altitudinem *GH*. Sit autem *P* corpus pendulum, *VP* filum, *V* punctum ſuſpenſionis, *RPQS* cyclois quam pendulum deſcribat, *P* ejus punctum infimum, *PQ* arcus altitudini *AE* æqualis.

De Motu Corporum

lis. Vis, qua motus aquæ alternis vicibus acceleratur & retardatur, est excessus ponderis aquæ in alterutro crure supra pondus in altero, ideoque, ubi aqua in crure *KL* ascendit ad *EF*, & in crure altero descendit ad *GH*, vis illa est pondus duplicatum aquæ *EABF*, & propterea est ad pondus aquæ totius ut *AE* seu *PQ* ad *VP* seu



PR. Vis etiam, qua pondus *P* in loco quovis *Q* acceleratur & retardatur in cycloide (per corol. prop. LI.) est ad ejus pondus totum, ut ejus distantia *PQ* a loco infimo *P*, ad cycloidis longitudinem *PR*. Quare aquæ & penduli, æqualia spatia *AE*, *PQ* describentium, vires motrices sunt ut pondera movenda; ideoque, si aqua & pendulum in principio quiescunt, vires illæ movebunt eadem æqualiter temporibus æqualibus, efficientque ut motu reciproco simul eant & redeant. *Q. E. D.*

Corol. 1. Igitur aquæ ascendentis & descendentis, sive motus intensior sit sive remissior, vices omnes sunt isochronæ.

Corol. 2. Si longitudo aquæ totius in canali sit pedum *Parisiensium* $6\frac{1}{9}$: aqua tempore minuti unius secundi descendet, & tempore minuti alterius secundi ascendet; & sic deinceps vicibus alternis in infinitum. Nam pendulum pedum $3\frac{1}{18}$ longitudinis tempore minuti unius secundi oscillatur.

Corol. 3. Aucta autem vel diminuta longitudine aquæ, augetur vel diminuitur tempus reciprocationis in longitudinis ratione subduplicata.

PROPO-

PROPOSITIO XLV. THEOREMA XXXVI.

Undarum velocitas eſt in ſubduplicata ratione latitudinum.

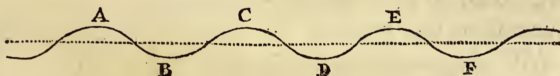
Conſequitur ex conſtructione propoſitionis ſequentis.

PROPOSITIO XLVI. PROBLEMA X.

Invenire velocitatem undarum.

Conſtituatur pendulum cujus longitudo, inter punctum ſuſpenſionis & centrum oſcillationis, æquetur latitudini undarum: & quo tempore pendulum illud oſcillationes ſingulas peragit, eodem undæ progrediendo latitudinem ſuam propemodum conficient.

Undarum latitudinem voco menſuram tranſverſam, quæ vel vallibus imis, vel ſummis culminibus interjacet. Deſignet *ABCDEF* ſuperficiem aquæ ſtagnantis, undis ſucceſſivis aſcendentem ac deſcendentem; ſintque *A*, *C*, *E*, &c. undarum culmina, & *B*, *D*, *F*, &c. valles intermedii. Et quoniam motus undarum fit per aquæ ſucceſſivum aſcenſum & deſcenſum, ſic ut ejus partes *A*, *C*, *E*, &c.



quæ nunc altiſſimæ ſunt, mox fiant infimæ; & vis motrix, qua partes altiſſimæ deſcendunt & infimæ aſcendunt, eſt pondus aquæ elevatæ; alternus ille aſcenſus & deſcenſus analogus erit motui reciproco aquæ in canali, eaſdemque temporis leges obſervabit: & propterea (per prop. XLIV.) ſi diſtantiæ inter undarum loca altiſſima *A*, *C*, *E* & infima *B*, *D*, *F* æquentur duplæ penduli longitudini; partes altiſſimæ *A*, *C*, *E*, tempore oſcillationis unius evadent infimæ, & tempore oſcillationis alterius denuo aſcendent. Igitur inter tranſitum undarum ſingularum tempus erit oſcillationum duarum; hoc eſt, unda deſcribet latitudinem ſuam, quo tempore pendulum illud bis oſcillatur; ſed eodem tempore pendulum, cujus longitudo quadrupla eſt, ideoque æquat undarum latitudinem, oſcillabitur ſemel. *Q. E. I.*

Corol.

De Motu Corporum

Corol. 1. Igitur undæ, quæ pedes *Parisienses* $3\frac{1}{18}$ latæ sunt, tempore minuti unius secundi progrediendo latitudinem suam conficient; ideoque tempore minuti unius primi percurrent pedes $183\frac{1}{3}$, & horæ spatio pedes 11000 quamproxime.

Corol. 2. Et undarum majorum vel minorum velocitas augebitur vel diminuetur in subduplicata ratione latitudinis.

Hæc ita se habent ex hypothesi quod partes aquæ recta ascendunt vel recta descendunt; sed ascensus & descensus ille verius fit per circulum, ideoque tempus hac propositione non nisi quamproxime definitum esse affirmo.

PROP. XLVII. THEOR. XXXVII.

Pulsibus per fluidum propagatis, singulæ fluidi particulæ, motu reciproco brevissimo euntes & redeuntes, accelerantur semper & retardantur pro lege oscillantis penduli.

Designent *AB*, *BC*, *CD*, &c. pulsuum successivorum æquales distantias; *ABC* plagam motus pulsuum ab *A* versus *B* propagati; *E*, *F*, *G* puncta tria physica medii quiescentis in recta *AC* ad æquales ab invicem distantias sita; *Ee*, *Ff*, *Gg* spatia æqualia perbrevia per quæ puncta illa motu reciproco singulis vibrationibus eunt & redeunt; ε, φ, γ loca quævis intermedia eorundem punctorum; & *EF*, *FG* lineolas physicas seu medii partes lineares punctis illis interjectas, & successive translatas in loca $\varepsilon\varphi$, $\varphi\gamma$ & *ef*, *fg*. Rectæ *Ee* æqualis ducatur recta *PS*. Bisecetur eadem in *O*, centroque *O* & intervallo *OP* describatur circulus *SIPi*. Per hujus circumferentiam totam cum partibus suis exponatur tempus totum vibrationis unius

unius cum ipsius partibus proportionalibus; sic ut completo tempore quovis *PH* vel *PHSh*, si demittatur ad *PS* perpendiculum *HL* vel *hl*, & capiatur *E*ε æqualis *PL* vel *Pl*, punctum physicum *E* reperiatur in ε. Hac lege punctum quodvis *E*, eundo ab *E* per ε ad *e*, & inde redeundo per ε ad *E*, iisdem accelerationis ac retardationis gradibus vibrationes singulas peraget cum oscillante pendulo. Probandum est quod singula medii puncta physica tali motu agitari debeant. Fingamus igitur medium tali motu a causa quacunque cieri, & videamus quid inde sequatur.

In circumferentia *PHSh* capiantur æquales arcus *HI*, *IK* vel *hi*, *ik*, eam habentes rationem ad circumferentiam totam quam habent æquales rectæ *EF*, *FG* ad pulsuum intervallum totum *BC*. Et demissis perpendiculis *IM*, *KN* vel *im*, *kn*; quoniam puncta *E*, *F*, *G* motibus similibus successive agitantur, & vibrationes suas integras ex itu & reditu compositas interea peragunt dum pulsus transfertur a *B* ad *C*; si *PH* vel *PHSh* sit tempus ab initio motus puncti *E*, erit *PI* vel *PHSi* tempus ab initio motus puncti *F*, & *PK* vel *PHSk* tempus ab initio motus puncti *G*; & propterea *E*ε, *F*φ, *G*γ erunt ipsis *PL*, *PM*, *PN* in itu punctorum, vel ipsis *Pl*, *Pm*, *Pn* in punctorum reditu, æquales respective. Unde εγ seu $EG + G\gamma - E\varepsilon$ in itu punctorum æqualis erit $EG - LN$, in reditu autem æqualis $EG + ln$. Sed εγ latitudo est seu expansio partis medii *EG* in loco εγ; & propterea expansio partis illius in itu est ad ejus expansionem mediocrem, ut $EG - LN$ ad *EG*; in reditu autem ut $EG + ln$ seu $EG + LN$ ad *EG*. Quare cum sit *LN* ad *KH* ut *IM* ad radium *OP*, & *KH* ad *EG* ut circumferentia *PHShP* ad *BC*, id est, si ponatur V pro radio circuli circumferentiam habentis æqualem intervallo pulsuum *BC*, ut *OP* ad V; & ex æquo *LN* ad *EG* ut *IM* ad V: erit expansio partis *EG* punctive physici *F* in loco εγ ad expansionem mediocrem, quam pars illa habet in loco suo primo *EG*, ut $V - IM$ ad V in itu, utque $V + im$ ad V in reditu. Unde vis elastica puncti *F* in loco εγ est ad vim ejus elasticam mediocrem in loco *EG*, ut $\frac{1}{V - IM}$ ad $\frac{1}{V}$ in itu, in reditu vero ut $\frac{1}{V + im}$ ad $\frac{1}{V}$. Et eodem argumento vires elasticæ punctorum physico-

physicorum E & G in itu, sunt ut $\frac{1}{V-HL}$ & $\frac{1}{V-KN}$ ad $\frac{1}{V}$; & virium differentia ad medii vim elasticam mediocrem, ut $\frac{HL-KN}{VV-V\times HL-V\times KN+HL\times KN}$ ad $\frac{1}{V}$. Hoc est, ut $\frac{HL-KN}{VV}$ ad $\frac{1}{V}$, sive ut $HL-KN$ ad V, si modo (ob angustos limites vibrationum) supponamus HL & KN indefinite minores esse quantitate V. Quare cum quantitas V detur, differentia virium est ut $HL-KN$, hoc est (ob proportionales $HL-KN$ ad HK, & OM ad OI vel OP, datasque HK & OP) ut OM; id est, si Ff bisecetur in Ω, ut $\Omega\varphi$. Et eodem argumento differentia virium elasticarum punctorum physicorum ε & γ, in reditu lineolæ physicæ $\varepsilon\gamma$ est ut $\Omega\varphi$. Sed differentia illa (id est, excessus vis elasticæ puncti ε supra vim elasticam puncti γ) est vis qua interjecta medii lineola physica $\varepsilon\gamma$ acceleratur in itu & retardatur in reditu; & propterea vis acceleratrix lineolæ physicæ $\varepsilon\gamma$, est ut ipsius distantia a medio vibrationis loco Ω. Proinde tempus (per prop. XXXVIII. lib. I.) recte exponitur per arcum PI; & medii pars linearis $\varepsilon\gamma$ lege præscripta movetur, id est, lege oscillantis penduli: estque par ratio partium omnium linearium ex quibus medium totum componitur. *Q. E. D.*

Corol. Hinc patet quod numerus pulsuum propagatorum idem sit cum numero vibrationum corporis tremuli, neque multiplicatur in eorum progressu. Nam lineola physica $\varepsilon\gamma$, quamprimum ad locum suum primum redierit, quiescet; neque deinceps movebitur, nisi vel ab impetu corporis tremuli, vel ab impetu pulsuum qui a corpore tremulo propagantur, motu novo cieatur. Quiescet igitur quamprimum pulsus a corpore tremulo propagari desinunt.

PROPOSITIO XLVIII. THEOREMA XXXVIII.

Pulsuum in fluido elastico propagatorum velocitates sunt in ratione composita ex subduplicata ratione vis elasticæ directe & subduplicata ratione densitatis inverse; si modo fluidi vis elastica ejusdem condensationi proportionalis esse supponatur.

Cas. 1. Si media sint homogenea, & pulsuum distantiæ in his mediis æquentur inter se, sed motus in uno medio intensior sit: con-

tractiones & dilatationes partium analogarum erunt ut iidem motus. Accurata quidem non est hæc proportio. Veruntamen nisi contractiones & dilatationes sint valde intensæ, non errabit sensibiliter, ideoque pro physice accurata haberi potest. Sunt autem vires elasticæ motrices ut contractiones & dilatationes; & velocitates partium æqualium simul genitæ sunt ut vires. Ideoque æquales & correspondentes pulsuum correspondentium partes itus & reditus suos per spatia contractionibus & dilatationibus proportionalia, cum velocitatibus quæ sunt ut spatia, simul peragent: & propterea pulsus, qui tempore itus & reditus unius latitudinem suam progrediendo conficiunt, & in loca pulsuum proxime præcedentium semper succedunt, ob æqualitatem distantiarum, æquali cum velocitate in medio utroque progredientur.

Cas. 2. Sin pulsuum distantiæ seu longitudines sint majores in uno medio quam in altero; ponamus quod partes correspondentes spatia latitudinibus pulsuum proportionalia singulis vicibus eundo & redeundo describant: & æquales erunt earum contractiones & dilatationes. Ideoque si media sint homogenea, æquales erunt etiam vires illæ elasticæ motrices quibus reciproco motu agitantur. Materia autem his viribus movenda est ut pulsuum latitudo; & in eadem ratione est spatium per quod singulis vicibus eundo & redeundo moveri debent. Estque tempus itus & reditus unius in ratione composita ex ratione subduplicata materiæ & ratione subduplicata spatii, atque ideo ut spatium. Pulsus autem temporibus itus & reditus unius eundo latitudines suas conficiunt, hoc est, spatia temporibus proportionalia percurrunt; & propterea sunt æquiveloces.

Cas. 3. In mediis igitur densitate & vi elastica paribus, pulsus omnes sunt æquiveloces. Quod si medii vel densitas vel vis elastica intendatur, quoniam vis motrix in ratione vis elasticæ, & materia movenda in ratione densitatis augetur; tempus, quo motus iidem peragantur ac prius, augebitur in subduplicata ratione densitatis, ac diminuetur in subduplicata ratione vis elasticæ. Et propterea velocitas pulsuum erit in ratione composita ex ratione subduplicata densitatis medii inverse & ratione subduplicata vis elasticæ directe. *Q. E. D.*

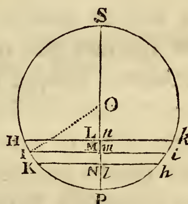
Hæc propositio ulterius patebit ex constructione sequentis.

PROPOSITIO XLIX. PROBLEMA XI.

Datis medii denſitate & vi elaſtica, invenire velocitatem pulſuum.

Fingamus medium ab incumbente pondere pro more aëris noſtri comprimi; ſitque A altitudo medii homogenei, cujus pondus adæquet pondus incumbens, & cujus denſitas eadem ſit cum denſitate medii compreſſi, in quo pulſus propagantur. Conſtitui autem intelligatur pendulum, cujus longitudo inter punctum ſuſpenſionis & centrum oſcillationis ſit A: & quo tempore pendulum illud oſcillationem integram ex itu & reditu compoſitam peragit, eodem pulſus eundo conficiet ſpatium circumferentiæ circuli radio A deſcripti æquale.

Nam ſtantibus quæ in propoſitione XLVII. conſtructa ſunt, ſi linea quævis phyſica *EF*, ſingulis vibrationibus deſcribendo ſpatium *PS*, urgeatur in extremis itus & reditus cujuſque locis *P* & *S*, a vi elaſtica quæ ipſius ponderi æquetur; peraget hæc vibrationes ſingulas quo tempore eadem in cycloide, cujus perimeter tota longitudini *PS* æqualis eſt, oſcillari poſſet: id adeo quia vires æquales æqualia corpuſcula per æqualia ſpatia ſimul impellent.



Quare cum oſcillationum tempora ſint in ſubduplicata ratione longitudinis pendulorum, & longitudo penduli æquetur dimidio arcui cycloidis totius; foret tempus vibrationis unius ad tempus oſcillationis penduli, cujus longitudo eſt A, in ſubduplicata ratione longitudinis $\frac{1}{2}$ *PS* ſeu *PO* ad longitudinem A. Sed vis elaſtica, qua lineola phyſica *EG*, in locis ſuis extremis *P*, *S* exiſtens, urgetur, erat (in demonſtratione propoſitionis XLVII.) ad ejus vim totam elaſticam ut *HL*—*KN* ad V, hoc eſt (cum punctum *K* jam

K jam incidat in *P*) ut *HK* ad V: & vis illa tota, hoc eſt pondus incumbens, quo lineola *EG* comprimitur, eſt ad pondus lineolæ ut ponderis incumbentis altitudo A ad lineolæ longitudinem *EG*; ideoque ex æquo, vis qua lineola *EG* in locis ſuis *P* & *S* urgetur, eſt ad lineolæ illius pondus ut $HK \times A$ ad $V \times EG$, ſive ut $PO \times A$ ad VV, nam *HK* erat ad *EG* ut *PO* ad V. Quare cum tempora, quibus æqualia corpora per æqualia ſpatia impelluntur, ſint reciproce in ſubduplicata ratione virium, erit tempus vibrationis unius, urgente vi illa elaſtica, ad tempus vibrationis, urgente vi ponderis, in ſubduplicata ratione VV ac $PO \times A$, atque ideo ad tempus oſcillationis penduli cujus longitudo eſt A in ſubduplicata ratione VV ad $PO \times A$, & ſubduplicata ratione *PO* ad A conjunctim; id eſt, in ratione integra V ad A. Sed tempore vibrationis unius ex itu & reditu compoſitæ, pulſus progrediendo conficit latitudinem ſuam *BC*. Ergo tempus, quo pulſus percurrit ſpatium *BC*, eſt ad tempus oſcillationis unius ex itu & reditu compoſitæ, ut V ad A, id eſt, ut *BC* ad circumferentiam circuli cujus radius eſt A. Tempus autem, quo pulſus percurret ſpatium *BC*, eſt ad tempus quo percurret longitudinem huic circumferentiæ æqualem, in eadem ratione; ideoque tempore talis oſcillationis pulſus percurret longitudinem huic circumferentiæ æqualem. *Q. E. D.*

Liber Secundus.

Corol. 1. Velocitas pulſuum ea eſt, quam acquirunt gravia æqualiter accelerato motu cadendo, & caſu ſuo deſcribendo dimidium altitudinis A. Nam tempore caſus hujus, cum velocitate cadendo acquiſita, pulſus percurret ſpatium quod erit æquale toti altitudini A; ideoque tempore oſcillationis unius ex itu & reditu compoſitæ percurret ſpatium æquale circumferentiæ circuli radio A deſcripti: eſt enim tempus caſus ad tempus oſcillationis ut radius circuli ad ejuſdem circumferentiam.

Corol. 2. Unde cum altitudo illa A ſit ut fluidi vis elaſtica directe & denſitas ejuſdem inverſe; velocitas pulſuum erit in ratione compoſita ex ſubduplicata ratione denſitatis inverſe & ſubduplicata ratione vis elaſticæ directe.

PROPOSITIO L. PROBLEMA XII.

Invenire pulsuum distantias.

Corporis, cujus tremore pulsus excitantur, inveniatur numerus vibrationum dato tempore. Per numerum illum dividatur spatium quod pulsus eodem tempore percurrere possit, & pars inventa erit pulsus unius latitudo. *Q. E. I.*

Scholium.

Spectant propositiones novissimæ ad motum lucis & sonorum. Lux enim cum propagetur secundum lineas rectas, in actione sola (per prop. XLI. & XLII.) consistere nequit. Soni vero propterea quod a corporibus tremulis oriantur, nihil aliud sunt quam aëris pulsus propagati, per prop. XLIII. Confirmatur id ex tremoribus quos excitant in corporibus objectis, si modo vehementes sint & graves, quales sunt soni tympanorum. Nam tremores celeriores & breviores difficilius excitantur. Sed & sonos quosvis, in chordas corporibus sonoris unisonas impactos, excitare tremores notissimum est. Confirmatur etiam ex velocitate sonorum. Nam cum pondera specifica aquæ pluvialis & argenti vivi sint ad invicem ut 1 ad $13\frac{2}{3}$ circiter, & ubi mercurius in *Barometro* altitudinem attingit digitorum *Anglicorum* 30, pondus specificum aëris & aquæ pluvialis sint ad invicem ut 1 ad 870 circiter: erunt pondera specifica aëris & argenti vivi ut 1 ad 11890. Proinde cum altitudo argenti vivi sit 30 digitorum, altitudo aëris uniformis, cujus pondus aërem nostrum subjectum comprimere posset, erit 356700 digitorum, seu pedum *Anglicorum* 29725. Estque hæc altitudo illa ipsa quam in constructione superioris problematis nominavimus A. Circuli radio 29725 pedum descripti circumferentia est pedum 186768. Et cum pendulum digitos $39\frac{1}{5}$ longum oscillationem ex itu & reditu compositam tempore minutorum duorum secundorum, uti notum est, absolvat; pendulum pedes 29725 seu digitos 356700 longum oscillationem consimilem tempore minutorum secundorum $190\frac{3}{4}$ absolvere debebit. Eo igitur tempore sonus progrediendo conficiet pedes 186768, ideoque tempore minuti unius secundi pedes 979.

Cæterum

Cæterum in hoc computo nulla habetur ratio crassitudinis solidarum particularum aëris, per quam sonus utique propagatur in instanti. Cum pondus aëris sit ad pondus aquæ ut 1 ad 870, & sales sint fere duplo densiores quam aqua; si particulæ aëris ponantur esse ejusdem circiter densitatis cum particulis vel aquæ vel salium, & raritas aëris oriatur ab intervallis particularum: diameter particulæ aëris erit ad intervallum inter centra particularum, ut 1 ad 9 vel 10 circiter, & ad intervallum inter particulas ut 1 ad 8 vel 9. Proinde ad pedes 979, quos sonus tempore minuti unius secundi juxta calculum superiorem conficiet, addere licet pedes $\frac{979}{9}$ seu 109 circiter, ob crassitudinem particularum aëris: & sic sonus tempore minuti unius secundi conficiet pedes 1088 circiter.

His adde quod vapores in aëre latentes, cum sint alterius elateris & alterius toni, vix aut ne vix quidem participant motum aëris veri quo soni propagantur. His autem quiescentibus, motus ille celerius propagabitur per solum aërem verum, idque in subduplicata ratione minoris materiæ. Ut si atmosphæra constet ex decem partibus aëris veri & una parte vaporum, motus sonorum celerior erit in subduplicata ratione 11 ad 10, vel in integra circiter ratione 21 ad 20, quam si propagaretur per undecim partes aëris veri: ideoque motus sonorum supra inventus, augendus erit in hac ratione. Quo pacto sonus, tempore minuti unius secundi, conficiet pedes 1142.

Hæc ita se habere debent tempore verno & autumnali, ubi aër per calorem temperatum rarescit & ejus vis elastica nonnihil intenditur. At hyberno tempore, ubi aër per frigus condensatur, & ejus vis elastica remittitur, motus sonorum tardior esse debet in subduplicata ratione densitatis; & vicissim æstivo tempore debet esse velocior.

Constat autem per experimenta quod soni tempore minuti unius secundi eundo conficiunt pedes *Londinenses* plus minus 1142, *Parisienses* vero 1070.

Cognita sonorum velocitate innotescunt etiam intervalla pulsuum. Invenit utique *D. Sauveur*, factis a se experimentis, quod fistula aperta, cujus longitudo est pedum *Parisiensium* plus minus quinque, sonum edit ejusdem toni cum sono chordæ quæ tempore minuti unius secundi centies recurrit. Sunt igitur pulsus plus minus centum in spatio pedum *Parisiensium* 1070, quos sonus tempore minuti

nuti

nuti unius secundi percurrit; ideoque pulsus unus occupat spatium pedum *Parisiensium* quasi $10\frac{7}{10}$, id est, duplam circiter longitudinem fistulæ. Unde versimile est quod latitudines pulsuum, in omnium apertarum fistularum sonis, æquentur duplis longitudinibus fistularum.

Porro cur soni cessante motu corporis sonori statim cessant, neque diutius audiuntur ubi longissime distamus a corporibus sonoris, quam cum proxime absumus, patet ex corollario propositionis XLVII. libri hujus. Sed & cur soni in tubis stentorophonicis valde augentur ex allatis principiis manifestum est. Motus enim omnis reciprocus singulis recursibus a causa generante augeri solet. Motus autem in tubis dilatationem sonorum impedientibus, tardius amittitur & fortius recurrit, & propterea a motu novo singulis recursibus impresso magis augetur. Et hæc sunt præcipua phænomena sonorum.

SECTIO IX.

De motu circulari fluidorum.

HYPOTHESIS.

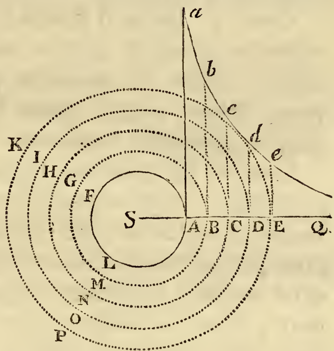
Resistentiam, quæ oritur ex defectu lubricitatis partium fluidi, cæteris paribus, proportionalem esse velocitati, qua partes fluidi separantur ab invicem.

PROPOSITIO LI. THEOREMA XXXIX.

Si cylindrus solidus infinite longus in fluido uniformi & infinito circa axem positione datum uniformi cum motu revolvatur, & ab hujus impulsu solo agatur fluidum in orbem, perseveret autem fluidi pars unaquæque uniformiter in motu suo; dico quod tempora periodica partium fluidi sunt ut ipsarum distantiæ ab axe cylindri.

Sit *AFL* cylindrus uniformiter circa axem *S* in orbem actus, & circulis concentricis *BGM*, *CHN*, *DIO*, *EKP*, &c. distinguatur fluidum

ſluidum in orbes cylindricos innumeros concentricos ſolidos ejuſdem craſſitudinis. Et quoniam homogeneum eſt fluidum, impreſſiones contiguorum orbium in ſe mutuo factæ erunt (per hypotheſin) ut eorum tranſlationes ab invicem, & ſuperficies contiguæ in quibus impreſſiones fiunt. Si impreſſio in orbem aliquem major eſt vel minor ex parte concava quam ex parte convexa; prævalebit impreſſio fortior, & motum orbis vel accelerabit vel retardabit, prout in eandem regionem cum ipſius motu vel in contrariam dirigitur. Proinde ut orbis unuſquiſque in motu ſuo uniformiter perſeveret, debent impreſſiones ex parte utraque ſibi invicem æquari & fieri in regiones contrarias. Unde cum impreſſiones ſunt ut contiguæ ſuperficies & harum tranſlationes ab invicem, erunt tranſlationes inverſe ut ſuperficies, hoc eſt, inverſe ut ſuperficierum diſtantiæ ab axe. Sunt autem differentiæ motuum angularium circa axem ut hæ tranſlationes applicatæ ad diſtantias, ſive ut tranſlationes directe & diſtantiæ inverſe; hoc eſt, conjunctis rationibus, ut quadrata diſtantiarum inverſe. Quare ſi ad infinitæ rectæ *SABCDEQ* partes ſingulas erigantur perpendicula *Aa*, *Bb*, *Cc*, *Dd*, *Ee*, &c. ipſarum *SA*, *SB*, *SC*, *SD*, *SE*, &c. quadratis reciproce proportionalia, & per terminos perpendicularium duci intelligatur linea curva hyperbolica; erunt ſummæ differentiarum, hoc eſt, motus toti angulares, ut reſpondentes ſummæ linearum *Aa*, *Bb*, *Cc*, *Dd*, *Ee*, id eſt,



ſi ad conſtituendum medium uniformiter fluidum, orbium numerus augeatur & latitudo minuatur in infinitum, ut areæ hyperbolicæ his ſummis analogæ *AaQ*, *BbQ*, *CcQ*, *DdQ*, *EeQ*, &c. Et tempora motibus angularibus reciproce proportionalia, erunt etiam his areis reciproce proportionalia. Eſt igitur tempus periodicum particulæ cujuſvis *D* reciproce ut area *DdQ*; hoc eſt (per notas curvarum quadraturas) directe ut diſtantia *SD*. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc motus angulares particularum fluidi ſunt reciproce ut ipſarum diſtantiæ ab axe cylindri, & velocitates abſolutæ ſunt æquales.

Corol.

Corol. 2. Si fluidum in vase cylindrico longitudinis infinitæ contineatur, & cylindrum alium interiorem contineat, revolvatur autem cylindrus uterque circa axem communem, sintque revolutionum tempora ut ipsorum semidiametri, & perseveret fluidi pars unaquæque in motu suo: erunt partium singularum tempora periodica ut ipsarum distantiæ ab axe cylindrorum.

Corol. 3. Si cylindro & fluido ad hunc modum motis addatur vel auferatur communis quilibet motus angularis; quoniam hoc novo motu non mutatur attritus mutuus partium fluidi, non mutabuntur motus partium inter se. Nam translationes partium ab invicem pendent ab attritu. Pars quælibet in eo perseverabit motu, qui, attritu utrinque in contrarias partes facto, non magis acceleratur quam retardatur.

Corol. 4. Unde si toti cylindrorum & fluidi systemati auferatur motus omnis angularis cylindri exterioris, habebitur motus fluidi in cylindro quiescente.

Corol. 5. Igitur si fluido & cylindro exteriore quiescentibus, revolvatur cylindrus interior uniformiter; communicabitur motus circularis fluido, & paulatim per totum fluidum propagabitur; nec prius desinet augeri quam fluidi partes singulæ motum corollario quarto definitum acquirant.

Corol. 6. Et quoniam fluidum conatur motum suum adhuc latius propagare, hujus impetu circumagetur etiam cylindrus exterior nisi violenter detentus; & accelerabitur ejus motus quoad usque tempora periodica cylindri utriusque æquentur inter se. Quod si cylindrus exterior violenter detineatur, conabitur is motum fluidi retardare; & nisi cylindrus interior vi aliqua extrinsecus impressa motum illum conservet, efficiet ut idem paulatim cesset.

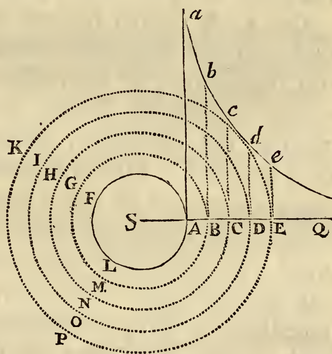
Quæ omnia in aqua profunda stagnante experiri licet.

PROPO-

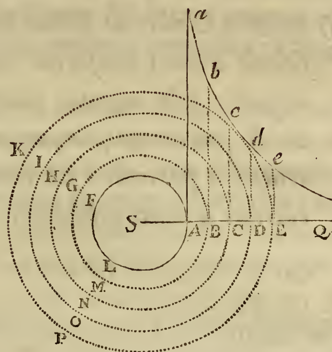
PROPOSITIO LII. THEOREMA XL.

Si ſphæra ſolida, in fluido uniformi & infinito, circa axem poſitione datum uniformi cum motu revolvatur, & ab hujus impulſu ſolo agatur fluidum in orbem; perſeveret autem fluidi pars unaquæque uniformiter in motu ſuo: dico quod tempora periodica partium fluidi erunt ut quadrata diſtantiarum a centro ſphæræ.

Caſ. 1. Sit *AFL* ſphæra uniformiter circa axem *S* in orbem acta, & circulis concentricis *BGM*, *CHN*, *DIO*, *EKP*, &c. diſtinguatur fluidum in orbes innumeros concentricos ejuſdem craſſitudinis. Finge autem orbes illos eſſe ſolidos; & quoniam homogeneum eſt fluidum, impreſſiones contiguorum orbium in ſe mutuo factæ, erunt (per hypotheſin) ut eorum tranſlationes ab invicem & ſuperficies contiguæ in quibus impreſſiones fiunt. Si impreſſio in orbem aliquem major eſt vel minor ex parte concava quam ex parte convexa; prævalebit impreſſio fortior, & velocitatem orbis vel accelerabit vel retardabit, prout in eandem regionem cum ipſius motu vel in contrariam dirigitur. Proinde ut orbis unuſquiſque in motu ſuo perſeveret uniformiter, debebunt impreſſiones ex parte utraque ſibi invicem æquari, & fieri in regiones contrarias. Unde cum impreſſiones ſint ut contiguæ ſuperficies & harum tranſlationes ab invicem; erunt tranſlationes inverſe ut ſuperficies, hoc eſt, inverſe ut quadrata diſtantiarum ſuperficierum a centro. Sunt autem differentiæ motuum angularium circa axem ut hæ tranſlationes applicatæ ad diſtantias, ſive ut tranſlationes directe & diſtantiæ inverſe; hoc eſt, conjunctis rationibus ut cubi diſtantiarum inverſe. Quare ſi ad rectæ infinitæ *SABCDEQ* partes ſingulas erigantur perpendicula *Aa*, *Bb*, *Cc*,



Dd, *Ee*, &c. ipſarum *SA*, *SB*, *SC*, *SD*, *SE*, &c. cubis reciproce proportionalia, erunt ſummæ differentiarum, hoc eſt, motus toti angulares, ut reſpondentes ſummæ linearum *Aa*, *Bb*, *Cc*, *Dd*, *Ee*: id eſt (ſi ad conſtituendum medium uniformiter fluidum, numerus orbium augeatur & latitudo minuatur in infinitum) ut areæ hyperbolicæ his ſummis analogæ *AaQ*, *BbQ*, *CcQ*, *DdQ*, *EeQ*, &c. Et tempora periodica motibus angularibus reciproce proportionalia erunt etiam his areis reciproce proportionalia. Eſt igitur tempus periodicum orbis cujuſvis *DIO* reciproce ut area *DdQ*, hoc eſt, per notas curvarum quadraturas, directe ut quadratum diſtantiæ *SD*. Id quod volui primo demonſtrare.



Caſ. 2. A centro ſphæræ ducantur infinitæ rectæ quam plurimæ, quæ cum axe datos contineant angulos, æqualibus differentiis ſe mutuo ſuperantes; & his rectis circa axem revolutis concipe orbes in annulos innumeros ſecari; & annulus unuſquiſque habebit annulos quatuor ſibi contiguos, unum interiorem, alterum exteriorem & duos laterales. Attritu interioris & exterioris non poteſt annulus unuſquiſque, niſi in motu juxta legem caſus primi facto, æqualiter & in partes contrarias urgeri. Patet hoc ex demonſtratione caſus primi. Et propterea annulorum ſeries quælibet a globo in infinitum recta pergens, movebitur pro lege caſus primi, niſi quatenus impeditur ab attritu annulorum ad latera. At in motu hac lege facto attritus annulorum ad latera nullus eſt; neque ideo motum, quo minus hac lege fiat, impediet. Si annuli, qui a centro æqualiter diſtant, vel citius revolverentur vel tardius juxta polos quam juxta eclipticam; tardiores accelerarentur, & velociores retardarentur ab attritu mutuo, & ſic vergerent ſemper tempora periodica ad æqualitatem, pro lege caſus primi. Non impedit igitur hic attritus quo minus motus fiat ſecundum legem caſus primi, & propterea lex illa obtinebit: hoc eſt, annulorum ſingulorum tempora periodica erunt ut quadrata diſtantiarum ipſorum a centro globi. Quod volui ſecundo demonſtrare.

Caſ.

Cas. 3. Dividatur jam annulus unusquisque sectionibus transversis in particulas innumeras constituentes substantiam absolute & uniformiter fluidam ; & quoniam hæ sectiones non spectant ad legem motus circularis, sed ad constitutionem fluidi solummodo conducunt, perseverabit motus circularis ut prius. His sectionibus annuli omnes quam minimi asperitatem & vim attritus mutui aut non mutabunt, aut mutabunt æqualiter. Et manente causarum proportione manebit effectuum proportio, hoc est, proportio motuum & periodicorum temporum. *Q. E. D.* Cæterum cum motus circularis, & inde orta vis centrifuga, major sit ad eclipticam quam ad polos; debebit causa aliqua adesse qua particulæ singulæ in circulis suis retineantur; ne materia, quæ ad eclipticam est, recedat semper a centro & per exteriora vorticis migret ad polos, indeque per axem ad eclipticam circulatione perpetua revertatur.

Corol. 1. Hinc motus angulares partium fluidi circa axem globi, sunt reciproce ut quadrata distantiarum a centro globi, & velocitates absolutæ reciproce ut eadem quadrata applicata ad distantias ab axe.

Corol. 2. Si globus in fluido quiescente similari & infinito circa axem positione datum uniformi cum motu revolvatur, communicabitur motus fluido in morem vorticis, & motus iste paulatim propagabitur in infinitum ; neque prius cessabit in singulis fluidi partibus accelerari, quam tempora periodica singularum partium sint ut quadrata distantiarum a centro globi.

Corol. 3. Quoniam vorticis partes interiores ob majorem suam velocitatem atterunt & urgent exteriores, motumque ipsis ea actione perpetuo communicant, & exteriores illi eandem motus quantitatem in alios adhuc exteriores simul transferunt, eaque actione servant quantitatem motus sui plane invariatam ; patet quod motus perpetuo transfertur a centro ad circumferentiam vorticis, & per infinitatem circumferentiæ absorbetur. Materia inter sphæricas duas quasvis superficies vortici concentricas nunquam accelerabitur, eo quod motum omnem a materia interiore acceptum transfert semper in exteriorem.

Corol. 4. Proinde ad conservationem vorticis constanter in eodem movendi statu, requiritur principium aliquod activum, a quo globus eandem semper quantitatem motus accipiat, quam imprimit in materiam

teriam vorticis. Sine tali principio necesse est ut globus & vorticis partes interiores, propagantes semper motum suum in exteriores, neque novum aliquem motum recipientes, tardescant paulatim & in orbem agi desinant.

Corol. 5. Si globus alter huic vortici ad certam ab ipsius centro distantiam innataret, & interea circa axem inclinatione datum vi aliqua constanter revolveretur; hujus motu raperetur fluidum in vorticem: & primo revolveretur hic vortex novus & exiguus una cum globo circa centrum alterius, & interea latius serperet ipsius motus, & paulatim propagaretur in infinitum, ad modum vorticis primi. Et eadem ratione, qua hujus globus raperetur motu vorticis alterius, raperetur etiam globus alterius motu hujus, sic ut globi duo circa intermedium aliquod punctum revolverentur, seque mutuo ob motum illum circularem fugerent, nisi per vim aliquam cohibiti. Postea si vires constanter impressæ, quibus globi in motibus suis perseverant, cessarent, & omnia legibus mechanicis permitterentur, languesceret paulatim motus globorum (ob rationem in corol. 3. & 4. assignatam) & vortices tandem conquiescerent.

Corol. 6. Si globi plures datis in locis circum axes positione datos certis cum velocitatibus constanter revolverentur, fierent vortices totidem in infinitum pergentes. Nam globi singuli eadem ratione, qua unus aliquis motum suum propagat in infinitum, propagabunt etiam motus suos in infinitum, adeo ut fluidi infiniti pars unaquæque eo agitetur motu qui ex omnium globorum actionibus resultat. Unde vortices non definientur certis limitibus, sed in se mutuo paulatim excurrent; globique per actiones vorticum in se mutuo perpetuo movebuntur de locis suis, uti in corollario superiore expositum est; neque certam quamvis inter se positionem servabunt, nisi per vim aliquam retenti. Cessantibus autem viribus illis quæ in globos constanter impressæ conservant hosce motus, materia ob rationem in corollario tertio & quarto assignatam, paulatim requiescet & in vortices agi desinet.

Corol. 7. Si fluidum similare claudatur in vase sphærico, ac globi in centro consistentis uniformi rotatione agatur in vorticem, globus autem & vas in eandem partem circa axem eundem revolvantur, sintque eorum tempora periodica ut quadrata semidiametrorum: partes fluidi non prius perseverabunt in motibus suis sine accelera-

tione

tione & retardatione, quam ſint eorum tempora periodica ut quadrata diſtantiarum a centro vorticis. Alia nulla vorticis conſtitutio poteſt eſſe permanens.

Corol. 8. Si vas, fluidum incluſum, & globus ſervent hunc motum, & motu præterea communi angulari circa axem quemvis datum revolvantur; quoniam hoc motu novo non mutatur attritus partium fluidi in ſe invicem, non mutabuntur motus partium inter ſe. Nam tranſlationes partium inter ſe pendent ab attritu. Pars quælibet in eo perſeverabit motu, quo fit ut attritu ex uno latere non magis tardetur quam acceleretur attritu ex altero.

Corol. 9. Unde ſi vas quieſcat ac detur motus globi, dabitur motus fluidi. Nam concipe planum tranſire per axem globi & motu contrario revolvi; & pone ſummam temporis revolutionis hujus & revolutionis globi eſſe ad tempus revolutionis globi, ut quadratum ſemidiametri vaſis ad quadratum ſemidiametri globi: & tempora periodica partium fluidi reſpectu plani hujus erunt ut quadrata diſtantiarum ſuarum a centro globi.

Corol. 10. Proinde ſi vas vel circa axem eundem cum globo, vel circa diverſum aliquem data cum velocitate quacunque moveatur, dabitur motus fluidi. Nam ſi ſyſtemati toti auferatur vaſis motus angularis, manebunt motus omnes iidem inter ſe qui prius, per corol. VIII. Et motus iſti per corol. IX. dabuntur.

Corol. 11. Si vas & fluidum quieſcant & globus uniformi cum motu revolvatur, propagabitur motus paulatim per fluidum totum in vas, & circumagetur vas niſi violenter detentum, neque prius deſinent fluidum & vas accelerari, quam ſint eorum tempora periodica æqualia temporibus periodicis globi. Quod ſi vas vi aliqua detineatur vel revolvatur motu quovis conſtanti & uniformi, deveniet medium paulatim ad ſtatum motus in corollariis VIII. IX. & X. definiti, nec in alio unquam ſtatu quocunque perſeverabit. Deinde vero ſi, viribus illis ceſſantibus quibus vas & globus certis motibus revolvebantur, permittatur ſyſtema totum legibus mechanicis; vas & globus in ſe invicem agent mediante fluido, neque motus ſuos in ſe mutuo per fluidum propagare prius ceſſabunt, quam eorum tempora periodica æquentur inter ſe, & ſyſtema totum ad inſtar corporis unius ſolidi ſimul revolvatur.

Scholium.

In his omnibus ſuppono fluidum ex materia quoad denſitatem & fluiditatem uniformi conſtare. Tale eſt in quo globus idem eodem cum motu, in eodem temporis intervallo, motus ſimiles & æquales, ad æquales ſemper a ſe diſtantias, ubivis in fluido conſtitutus, propagare poſſit. Conatur quidem materia per motum ſuum circularem recedere ab axe vorticis, & propterea premit materiam omnem ulteriorem. Ex hac preſſione fit attritus partium fortior & ſeparatio ab invicem difficilior; & per conſequens diminuitur materiæ fluiditas. Rurſus ſi partes fluidi ſunt alicubi craſſiores ſeu majores, fluiditas ibi minor erit, ob pauciores ſuperficies in quibus partes ſeparentur ab invicem. In hujuſmodi caſibus deficientem fluiditatem vel lubricitate partium vel lentore aliave aliqua conditione reſtitui ſuppono. Hoc niſi fiat, materia ubi minus fluida eſt magis cohærebit & ſegnior erit, ideoque motum tardius recipiet & longius propagabit quam pro ratione ſuperius aſſignata. Si figura vaſis non ſit ſphærica, movebuntur particulæ in lineis non circularibus ſed conformibus eidem vaſis figuræ, & tempora periodica erunt ut quadrata mediocrium diſtantiarum a centro quamproxime. In partibus inter centrum & circumferentiam, ubi latiora ſunt ſpatia, tardiores erunt motus, ubi anguſtiora velociores, neque tamen particulæ velociores petent circumferentiam. Arcus enim deſcribent minus curvos, & conatus recedendi a centro non minus diminuetur per decrementum hujus curvaturæ, quam augebitur per incrementum velocitatis. Pergendo a ſpatiis anguſtioribus in latiora recedent paulo longius a centro, ſed iſto receſſu tardeſcent; & accedendo poſtea de latioribus ad anguſtiora accelerabuntur, & ſic per vices tardeſcent & accelerabuntur particulæ ſingulæ in perpetuum. Hæc ita ſe habebunt in vaſe rigido. Nam in fluido infinito conſtitutio vorticum innoteſcit per propoſitionis hujus corollarium ſextum.

Proprietates autem vorticum hac propoſitione inveſtigare conatus ſum, ut pertentarem ſiqua ratione phænomena cœleſtia per vortices explicari poſſint. Nam phænomenon eſt, quod planetarum circa jovem revolventium tempora periodica ſunt in ratione ſeſquiplicata diſtantiarum a centro jovis; & eadem regula obtinet in planetis qui circa ſolem revolvuntur. Obtinent autem hæ regulæ in planetis

tis utrisque quam accuratissime, quatenus observationes astronomicæ hactenus prodidere. Ideoque si planetæ illi a vorticibus circa jovem & solem revolventibus deferantur, debebunt etiam hi vortices eadem lege revolvi. Verum tempora periodica partium vorticis prodierunt in ratione duplicata distantiarum a centro motus: neque potest ratio illa diminui & ad rationem sesquiplicatam reduci, nisi vel materia vorticis eo fluidior sit quo longius distat a centro, vel resistentia, quæ oritur ex defectu lubricitatis partium fluidi, ex aucta velocitate qua partes fluidi separantur ab invicem, augeatur in majori ratione quam ea est in qua velocitas augetur. Quorum tamen neutrum rationi consentaneum videtur. Partes crassiores & minus fluidæ, nisi graves sint in centrum, circumferentiam petent; & verisimile est quod, etiamsi demonstrationum gratia hypothesin talem initio sectionis hujus proposuerim, ut resistentia velocitati proportionalis esset, tamen resistentia in minori sit ratione quam ea velocitatis est. Quo concesso, tempora periodica partium vorticis erunt in majori quam duplicata ratione distantiarum ab ipsius centro. Quod si vortices (uti aliquorum est opinio) celerius moveantur prope centrum, dein tardius usque ad certum limitem, tum denuo celerius juxta circumferentiam; certe nec ratio sesquiplicata neque alia quævis certa ac determinata obtinere potest. Viderint itaque philosophi quo pacto phænomenon illud rationis sesquiplicatæ per vortices explicari possit.

PROPOSITIO LIII. THEOREMA XLI.

Corpora, quæ in vortice delata in orbem redeunt, ejusdem sunt densitatis cum vortice, & eadem lege cum ipsius partibus quoad velocitatem & cursus determinationem moventur.

Nam si vorticis pars aliqua exigua, cujus particulæ seu puncta physica datum servant situm inter se, congelari supponatur: hæc, quoniam neque quoad densitatem suam, neque quoad vim insitam aut figuram suam mutatur, movebitur eadem lege ac prius: & contra, si vorticis pars congelata & solida ejusdem sit densitatis cum reliquo vortice, & resolvatur in fluidum; movebitur hæc eadem lege ac prius, nisi quatenus ipsius particulæ jam fluidæ factæ moveantur

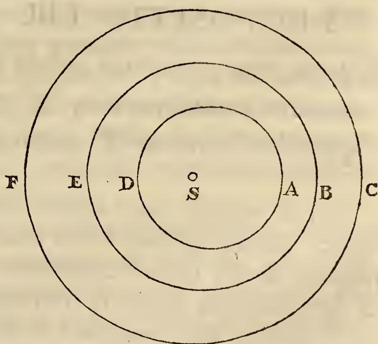
De Motu Corporum inter ſe. Negligatur igitur motus particularum inter ſe, tanquam ad totius motum progreſſivum nil ſpectans, & motus totius idem erit ac prius. Motus autem idem erit cum motu aliarum vorticis partium a centro æqualiter diſtantium, propterea quod ſolidum in fluidum reſolutum fit pars vorticis cæteris partibus conſimilis. Ergo ſolidum, ſi ſit ejuſdem denſitatis cum materia vorticis, eodem motu cum ipſius partibus movebitur, in materia proxime ambiente relative quieſcens. Sin denſius ſit, jam magis conabitur recedere a centro vorticis quam prius; ideoque vorticis vim illam, qua prius in orbita ſua tanquam in æquilibrio conſtitutum retinebatur, jam ſuperans, recedet a centro & revolvendo deſcribet ſpiralem, non amplius in eundem orbem rediens. Et eodem argumento ſi rarius ſit, accedet ad centrum. Igitur non redibit in eundem orbem niſi ſit ejuſdem denſitatis cum fluido. Eo autem in caſu oſtenſum eſt, quod revolveretur eadem lege cum partibus fluidi a centro vorticis æqualiter diſtantibus. *Q. E. D.*

Corol. 1. Ergo ſolidum quod in vortice revolvitur & in eundem orbem ſemper redit, relative quieſcit in fluido cui innatat.

Corol. 2. Et ſi vortex ſit quoad denſitatem uniformis, corpus idem ad quamlibet a centro vorticis diſtantiam revolvi poteſt.

Scholium.

Hinc liquet planetas a vorticibus corporeis non deferri. Nam planetæ ſecundum hypotheſin *Copernicæam* circa ſolem delati revolvuntur in ellipſibus umbilicum habentibus in ſole, & radiis ad ſolem ductis areas deſcribunt temporibus proportionales. At partes vorticis tali motu revolvi nequeunt. Deſignent *AD*, *BE*, *CF*, orbes tres circa ſolem *S* deſcriptos, quorum extimus *CF* circulus ſit ſoli concentricus, & interiorum duorum aphelia ſint *A*, *B* & perihelia *D*, *E*. Ergo corpus quod revolvitur in orbe *CF*, radio ad ſolem ducto areas temporibus proportionales



portionales describendo, movebitur uniformi cum motu. Corpus autem, quod revolvitur in orbe *BE*, tardius movebitur in aphelio *B* & velocius in perihelio *E*, secundum leges astronomicas; cum tamen secundum leges mechanicas materia vorticis in spatio angustiore inter *A* & *C* velocius moveri debeat quam in spatio latiore inter *D* & *F*; id est, in aphelio velocius quam in perihelio. Quæ duo repugnant inter se. Sic in principio signi virginis, ubi aphelium martis jam versatur, distantia inter orbes martis & veneris est ad distantiam eorundem orbium in principio signi piscium ut ternarius ad binarium circiter, & propterea materia vorticis inter orbes illos in principio piscium debet esse velocior quam in principio virginis in ratione ternarii ad binarium. Nam quo angustius est spatium per quod eadem materiæ quantitas eodem revolutionis unius tempore transit, eo majori cum velocitate transire debet. Igitur si terra in hac materia cœlesti relative quiescens ab ea deferretur, & una circa solem revolveretur, foret hujus velocitas in principio piscium ad ejusdem velocitatem in principio virginis in ratione sesquialtera. Unde solis motus diurnus apparens in principio virginis major esset quam minutorum primorum septuaginta, & in principio piscium minor quam minutorum quadraginta & octo: cum tamen (experientia teste) apparens iste solis motus major sit in principio piscium quam in principio virginis, & propterea terra velocior in principio virginis quam in principio piscium. Itaque hypothesis vorticum cum phænomenis astronomicis omnino pugnat, & non tam ad explicandos quam ad perturbandos motus cœlestes conducit. Quomodo vero motus isti in spatiis liberis sine vorticibus peraguntur intelligi potest ex libro primo, & in mundi systemate jam plenius docebitur.

DE
MUNDI SYSTEMATE.
LIBER TERTIUS.

IN libris præcedentibus principia philosophiæ tradidi, non tamen philosophica sed mathematica tantum, ex quibus videlicet in rebus philosophicis disputari possit. Hæc sunt motuum & virium leges & conditiones, quæ ad philosophiam maxime spectant. Eadem tamen, ne sterilia videantur, illustravi scholiis quibusdam philosophicis, ea tractans quæ generalia sunt, & in quibus philosophia maxime fundari videtur, uti corporum densitatem & resistentiam, spatia corporibus vacua, motumque lucis & sonorum. Superest ut ex iisdem principiis doceamus constitutionem systematis mundani. De hoc argumento composueram librum tertium methodo populari, ut a pluribus legeretur. Sed quibus principia posita satis intellecta non fuerint, ii vim consequentiarum minime percipient, neque præjudicia deponent, quibus a multis retro annis insueverunt: & propterea ne res in disputationes trahatur, summam libri illius transtuli in propositiones, more mathematico, ut ab iis solis legantur qui principia prius evolverint. Veruntamen quoniam propositiones ibi quam plurimæ occurrant, quæ lectoribus etiam mathematice doctis moram nimiam injicere possint, auctor esse nolo ut quisquam eas omnes evolvat; suffecerit siquis definitiones, leges motuum & sectiones tres priores libri primi sedulo legat, dein transeat ad hunc librum de mundi systemate, & reliquas librorum priorum propositiones hic citatas pro lubitu consulat.

REGULÆ

REGULÆ PHILOSOPHANDI.

REGULA I.

Causas rerum naturalium non plures admitti debere, quam quæ & veræ sint & earum phænomenis explicandis sufficiant.

Dicunt utique philosophi: Natura nihil agit frustra, & frustra fit per plura quod fieri potest per pauciora. Natura enim simplex est & rerum causis superfluis non luxuriat.

REGULA II.

Ideoque effectuum naturalium ejusdem generis eædem assignandæ sunt causæ, quatenus fieri potest.

Uti respirationis in homine & in bestia; descensus lapidum in *Europa* & in *America*; lucis in igne culinari & in sole; reflexionis lucis in terra & in planetis.

REGULA III.

Qualitates corporum quæ intendi & remitti nequeunt, quæque corporibus omnibus competunt in quibus experimenta instituere licet, pro qualitatibus corporum universorum habendæ sunt.

Nam qualitates corporum non nisi per experimenta innotescunt, ideoque generales statuendæ sunt quotquot cum experimentis ge-

De Mundi Systemate

neraliter quadrant; & quæ minui non possunt, non possunt auferri. Certe contra experimentorum tenorem somnia temere confingenda non sunt, nec a naturæ analogia recedendum est, cum ea simplex esse soleat & sibi semper consona. Extensio corporum non nisi per sensus innotescit, nec in omnibus sentitur: sed quia sensibilibus omnibus competit, de universis affirmatur. Corpora plura dura esse experimur. Oritur autem durities totius a duritie partium, & inde non horum tantum corporum quæ sentiuntur, sed aliorum etiam omnium particulas indivisas esse duras merito concludimus. Corpora omnia impenetrabilia esse non ratione sed sensu colligimus. Quæ tractamus, impenetrabilia inveniuntur, & inde concludimus impenetrabilitatem esse proprietatem corporum universorum. Corpora omnia mobilia esse, & viribus quibusdam (quas vires inertiæ vocamus) perseverare in motu vel quiete, ex hisce corporum visorum proprietatibus colligimus. Extensio, durities, impenetrabilitas, mobilitas & vis inertiæ totius oritur ab extensione, duritie, impenetrabilitate, mobilitate & viribus inertiæ partium: & inde concludimus omnes omnium corporum partes minimas extendi & duras esse & impenetrabiles & mobiles & viribus inertiæ præditas. Et hoc est fundamentum philosophiæ totius. Porro corporum partes divisas & sibi mutuo contiguas ab invicem separari posse, ex phænomenis novimus, & partes indivisas in partes minores ratione distingui posse ex mathematica certum est. Utrum vero partes illæ distinctæ & nondum divisæ per vires naturæ dividi & ab invicem separari possint, incertum est. At si vel unico constaret experimento quod particula aliqua indivisa, frangendo corpus durum & solidum, divisionem pateretur: concluderemus vi hujus regulæ, quod non solum partes divisæ separabiles essent, sed etiam quod indivisæ in infinitum dividi possent.

Denique si corpora omnia in circuitu terræ gravia esse in terram, idque pro quantitate materiæ in singulis, & lunam gravem esse in terram pro quantitate materiæ suæ, & vicissim mare nostrum grave esse in lunam, & planetas omnes graves esse in se mutuo, & cometarum similem esse gravitatem in solem, per experimenta & observationes astronomicas universaliter constet: dicendum erit per hanc regulam quod corpora omnia in se mutuo gravitant. Nam & fortius erit argumentum ex phænomenis de gravitate universali, quam

de

de corporum impenetrabilitate: de qua utique in corporibus cœlestibus nullum experimentum, nullam prorsus observationem habemus. Attamen gravitatem corporibus essentialem esse minime affirmo. Per vim insitam intelligo solam vim inertiæ. Hæc immutabilis est. Gravitas recedendo a terra, diminuitur.

REGULA IV.

In philosophia experimentali, propositiones ex phænomenis per inductionem collectæ, non obstantibus contrariis hypothesibus, pro veris aut accurate aut quamproxime haberi debent, donec alia occurrerint phænomena, per quæ aut accuratiores reddantur aut exceptionibus obnoxiæ.

Hoc fieri debet ne argumentum inductionis tollatur per hypotheses.

PHÆNO-

De Mundi Systemate

PHÆNOMENA.

PHÆNOMENON I.

Planetas circumjoviales, radiis ad centrum jovis ductis, areas describere temporibus proportionales, eorumque tempora periodica, stellis fixis quiescentibus, esse in ratione sesquiplicata distantiarum ab ipsius centro.

Constat ex observationibus astronomicis. Orbes horum planetarum non differunt sensibiliter a circulis jovi concentricis, & motus eorum in his circulis uniformes deprehenduntur. Tempora vero periodica esse in sesquiplicata ratione semidiametrorum orbium consentiunt astronomi; & idem ex tabula sequente manifestum est.

Satellitum jovialium tempora periodica.

$1^d. 18^h. 27'. 34''.$ $3^d. 13^h. 13'. 42''.$ $7^d. 3^h. 42'. 36''.$ $16^d. 16^h. 32'. 9''.$

Distantiæ satellitum a centro jovis.

Ex observationibus	1	2	3	4	
Borelli	$5\frac{2}{3}$	$8\frac{2}{3}$	14	$24\frac{2}{3}$	Semidiam. Jovis
Townlei *per microm.*	5,52	8,78	13,47	24,72	
Cassini *per telescop.*	5	8	13	23	
Cassini *per eclips. satell.*	$5\frac{2}{3}$	9	$14\frac{23}{60}$	$25\frac{3}{10}$	
Ex temporibus periodicis.	5,667	9,017	14,384	25,299	

Elongationes satellitum jovis & diametrum ejus D. *Pound* micrometris optimis determinavit ut sequitur. Elongatio maxima heliocentrica satellitis quarti a centro jovis micrometro in tubo quindecim pedes longo capta fuit, & prodiit in mediocri jovis a terra distantia $8'. 16''$ circiter. Ea satellitis tertii micrometro in telescopio pedes

pedes 123 longo capta fuit, & prodiit in eadem jovis a terra diſtantia 4′. 42″. Elongationes maximæ reliquorum ſatellitum in eadem jovis a terra diſtantia ex temporibus periodicis prodeunt 2′. 56″. 47‴, & 1′. 51″. 6‴.

Diameter jovis micrometro in teleſcopio pedes 123 longo ſæpius capta fuit, & ad mediocrem jovis a ſole vel terra diſtantiam reducta, ſemper minor prodiit quam 40″, nunquam minor quam 38″, ſæpius 39″. In teleſcopiis brevioribus hæc diameter eſt 40″ vel 41″. Nam lux jovis per inæqualem refrangibilitatem nonnihil dilatatur, & hæc dilatatio minorem habet rationem ad diametrum jovis in longioribus & perfectoribus teleſcopiis quam in brevioribus & minus perfectis. Tempora quibus ſatellites duo, primus ac tertius, tranſibant per corpus jovis, ab initio ingreſſus ad initium exitus, & ab ingreſſu completo ad exitum completum, obſervata ſunt ope teleſcopii ejuſdem longioris. Et diameter jovis in mediocri ejus a terra diſtantia prodiit per tranſitum primi ſatellitis $37\frac{1}{8}$″, & per tranſitum tertii $37\frac{3}{8}$″. Tempus etiam quo umbra primi ſatellitis tranſiit per corpus jovis obſervatum fuit, & inde diameter jovis in mediocri ejus a terra diſtantia prodiit 37″ circiter. Aſſumamus diametrum ejus eſſe $37\frac{1}{4}$″ quamproxime; & elongationes maximæ ſatellitis primi, ſecundi, tertii, & quarti æquales erunt ſemidiametris jovis 5,965, 9,494, 15,141, & 26,63 reſpective.

PHÆNOMENON II.

Planetas circumſaturnios, radiis ad ſaturnum ductis, areas deſcribere temporibus proportionales, & eorum tempora periodica, ſtellis fixis quieſcentibus, eſſe in ratione ſeſquiplicata diſtantiarum ab ipſius centro.

Caſſinus utique ex obſervationibus ſuis diſtantias eorum a centro ſaturni & periodica tempora hujuſmodi eſſe ſtatuit.

Satellitum ſaturniorum tempora periodica.

$1^{d}. 21^{h}. 18'. 27''$. $2^{d}. 17^{h}. 41'. 22''$. $4^{d}. 12^{h}. 25'. 12''$. $15^{d}. 22^{h}. 41'. 14''$. $79^{d}. 7^{h}. 48'. 00''$.

Diſtantiæ

Distantiæ satellitum a centro saturni in semidiametris annuli.

Ex observationibus	$1\frac{19}{20}$.	$2\frac{1}{2}$.	$3\frac{1}{2}$.	8.	24.
Ex temporibus periodicis.	1,93.	2,47.	3,45.	8.	23,35.

Quarti satellitis elongatio maxima a centro saturni ex observationibus colligi solet esse semidiametrorum octo quamproxime. At elongatio maxima satellitis hujus a centro saturni, micrometro optimo in telescopio Hugeniano pedes 123 longo capta, prodiit semidiametrorum octo cum septem decimis partibus semidiametri. Et ex hac observatione & temporibus periodicis, distantiæ satellitum a centro saturni in semidiametris annuli sunt 2,1. 2,69 3,75. 8,7. & 25,35. Saturni diameter in eodem telescopio erat ad diametrum annuli ut 3 ad 7, & diameter annuli diebus Maii 28 & 29 anni 1719. prodiit 43″. Et inde diameter annuli in mediocri saturni a terra distantia est 42″, & diameter saturni 18″. Hæc ita sunt in telescopiis longissimis & optimis, propterea quod magnitudines apparentes corporum cœlestium in longioribus telescopiis majorem habeant proportionem ad dilatationem lucis in terminis illorum corporum quam in brevioribus. Si rejiciatur lux omnis erratica, manebit diameter saturni haud major quam 16″.

PHÆNOMENON III.

Planetas quinque primarios mercurium, venerem, martem, jovem & saturnum orbibus suis solem cingere.

Mercurium & venerem circa solem revolvi ex eorum phasibus lunaribus demonstratur. Plena facie lucentes ultra solem siti sunt; dimidiata e regione solis; falcata cis solem, per discum ejus ad modum macularum nonnunquam transeuntes. Ex martis quoque plena facie prope solis conjunctionem, & gibbosa in quadraturis, certum est, quod is solem ambit. De jove etiam & saturno idem ex eorum phasibus semper plenis demonstratur: hos enim luce a sole mutuata splendere ex umbris satellitum in ipsos projectis manifestum est.

PHÆ-

PHÆNOMENON IV.

Planetarum quinque primariorum, & vel ſolis circa terram vel terræ circa ſolem tempora periodica, ſtellis fixis quieſcentibus, eſſe in ratione ſeſquiplicata mediocrium diſtantiarum a ſole.

Hæc a *Keplero* inventa ratio in confeſſo eſt apud omnes. Eadem utique ſunt tempora periodica, eædemque orbium dimenſiones, ſive ſol circa terram, ſive terra circa ſolem revolvatur. Ac de menſura quidem temporum periodicorum convenit inter aſtronomos univerſos. Magnitudines autem orbium *Keplerus* & *Bullialdus* omnium diligentiſſime ex obſervationibus determinaverunt: & diſtantiæ mediocres, quæ temporibus periodicis reſpondent, non differunt ſenſibiliter a diſtantiis quas illi invenerunt, ſuntque inter ipſas ut plurimum intermediæ; uti in tabula ſequente videre licet.

Planetarum ac telluris tempora periodica circa ſolem reſpectu fixarum, in diebus & partibus decimalibus diei.

♄	♃	♂	♁	♀	☿
10759,275.	4332,514.	686,9785.	365,2565.	224,6176.	87,9692.

Planetarum ac telluris diſtantiæ mediocres a ſole.

	♄	♃	♂	♁	♀	☿
Secundum *Keplerum*	951000.	519650.	152350.	100000.	72400.	38806.
Secundum *Bullialdum*	954198.	522520.	152350.	100000.	72398.	38585.
Secundum tempora periodica	954006.	520096.	152369.	100000.	72333.	38710.

De diſtantiis mercurii & veneris a ſole diſputandi non eſt locus, cum hæ per eorum elongationes a ſole determinentur. De diſtantiis etiam ſuperiorum planetarum a ſole tollitur omnis diſputatio per eclipſes ſatellitum jovis. Etenim per eclipſes illas determinatur poſitio umbræ quam jupiter projicit, & eo nomine habetur jovis longitudo heliocentrica. Ex longitudinibus autem heliocentrica & geocentrica inter ſe collatis determinatur diſtantia jovis.

PHÆNOMENON V.

Planetas primarios, radiis ad terram ductis, areas describere temporibus minime proportionales; at radiis ad solem ductis, areas temporibus proportionales percurrere.

Nam respectu terræ nunc progrediuntur, nunc stationarii sunt, nunc etiam regrediuntur: At solis respectu semper progrediuntur, idque propemodum uniformi cum motu, sed paulo celerius tamen in periheliis ac tardius in apheliis, sic ut arearum æquabilis sit descriptio. Propositio est astronomis notissima, & in jove apprime demonstratur per eclipses satellitum, quibus eclipsibus heliocentricas planetæ hujus longitudines & distantias a sole determinari diximus.

PHÆNOMENON VI.

Lunam radio ad centrum terræ ducto, aream tempori proportionalem describere.

Patet ex lunæ motu apparente cum ipsius diametro apparente collato. Perturbatur autem motus lunaris aliquantulum a vi solis, sed errorum insensibiles minutias in hisce phænomenis negligo.

PROPO-

PROPOSITIONES.

PROPOSITIO I. THEOREMA I.

Vires, quibus planetæ circumjoviales perpetuo retrahuntur a motibus rectilineis & in orbibus ſuis retinentur, reſpicere centrum jovis, & eſſe reciproce ut quadrata diſtantiarum locorum ab eodem centro.

Patet pars prior propoſitionis per phænomenon primum, & propoſitionem ſecundam vel tertiam libri primi: & pars poſterior per phænomenon primum, & corollarium ſextum propoſitionis quartæ ejuſdem libri.

Idem intellige de planetis qui ſaturnum comitantur, per phænomenon ſecundum.

PROPOSITIO II. THEOREMA II.

Vires, quibus planetæ primarii perpetuo retrahuntur a motibus rectilineis, & in orbibus ſuis retinentur, reſpicere ſolem, & eſſe reciproce ut quadrata diſtantiarum ab ipſius centro.

Patet pars prior propoſitionis per phænomenon quintum, & propoſitionem ſecundam libri primi: & pars poſterior per phænomenon quartum, & propoſitionem quartam ejuſdem libri. Accuratiſſime autem demonſtratur hæc pars propoſitionis per quietem apheliorum. Nam aberratio quam minima a ratione duplicata (per corol. I. prop. XLV. lib. I.) motum apſidum in ſingulis revolutionibus notabilem, in pluribus enormem efficere deberet.

PROPOSITIO III. THEOREMA III.

Vim, qua luna retinetur in orbe suo, respicere terram, & esse reciproce ut quadratum distantiæ locorum ab ipsius centro.

Patet assertionis pars prior per phænomenon sextum, & propositionem secundam vel tertiam libri primi: & pars posterior per motum tardissimum lunaris apogæi. Nam motus ille, qui singulis revolutionibus est graduum tantum trium & minutorum trium in consequentia, contemni potest. Patet enim (per corol. 1. prop. XLV. lib. 1.) quod si distantia lunæ a centro terræ sit ad semidiametrum terræ ut D ad 1; vis a qua motus talis oriatur sit reciproce ut $D^{2\frac{4}{243}}$, id est, reciproce ut ea ipsius D dignitas cujus index est $2\frac{4}{243}$, hoc est, in ratione distantiæ paulo majore quam duplicata inverse, sed quæ partibus $59\frac{3}{4}$ propius ad duplicatam quam ad triplicatam accedit. Oritur vero ab actione solis (uti posthac dicetur) & propterea hic negligendus est. Actio solis quatenus lunam distrahit a terra, est ut distantia lunæ a terra quamproxime; ideoque (per ea quæ dicuntur in corol. 2. prop. XLV. lib. 1.) est ad lunæ vim centripetam ut 2 ad 357,45 circiter, seu 1 ad $178\frac{29}{40}$. Et neglecta solis vi tantilla, vis reliqua qua luna retinetur in orbe erit reciproce ut D^2. Id quod etiam plenius constabit conferendo hanc vim cum vi gravitatis, ut fit in propositione sequente.

Corol. Si vis centripeta mediocris qua luna retinetur in orbe augeatur primo in ratione $177\frac{29}{40}$ ad $178\frac{29}{40}$, deinde etiam in ratione duplicata semidiametri terræ ad mediocrem distantiam centri lunæ a centro terræ: habebitur vis centripeta lunaris ad superficiem terræ, posito quod vis illa descendendo ad superficiem terræ perpetuo augeatur in reciproca altitudinis ratione duplicata.

PROPOSITIO IV. THEOREMA IV.

Lunam gravitare in terram, & vi gravitatis retrahi semper a motu rectilineo, & in orbe suo retineri.

Lunæ distantia mediocris a terra in syzygiis est semidiametrorum terrestrium, secundum *Ptolemæum* & plerosque astronomorum 59, secundum

ſecundum *Vendelinum* & *Hugenium* 60, ſecundum *Copernicum* $60\frac{1}{3}$, ſecundum *Streetum* $60\frac{2}{5}$, & ſecundum *Tychonem* $56\frac{1}{2}$. Aſt *Tycho*, & quotquot ejus tabulas refractionum ſequuntur, conſtituendo refractiones ſolis & lunæ (omnino contra naturam lucis) majores quam fixarum, idque ſcrupulis quaſi quatuor vel quinque, auxerunt parallaxin lunæ ſcrupulis totidem, hoc eſt, quaſi duodecima vel decima quinta parte totius parallaxeos. Corrigatur iſte error, & diſtantia evadet quaſi $60\frac{1}{2}$ ſemidiametrorum terreſtrium, fere ut ab aliis aſſignatum eſt. Aſſumamus diſtantiam mediocrem ſexaginta ſemidiametrorum in ſyzygiis; & lunarem periodum reſpectu fixarum compleri diebus 27, horis 7, minutis primis 43, ut ab aſtronomis ſtatuitur; atque ambitum terræ eſſe pedum Pariſienſium 123249600, uti a *Gallis* menſurantibus definitum eſt: & ſi luna motu omni privari fingatur ac dimitti, ut urgente vi illa omni, qua (per corol. prop. III.) in orbe ſuo retinetur, deſcendat in terram; hæc ſpatio minuti unius primi cadendo deſcribet pedes Pariſienſes $15\frac{1}{12}$. Colligitur hoc ex calculo vel per propoſitionem XXXVI. libri primi, vel (quod eodem recidit) per corollarium nonum propoſitionis quartæ ejuſdem libri, confecto. Nam arcus illius quem luna tempore minuti unius primi, medio ſuo motu, ad diſtantiam ſexaginta ſemidiametrorum terreſtrium deſcribat, ſinus verſus eſt pedum Pariſienſium $15\frac{1}{12}$ circiter, vel magis accurate pedum 15. dig. 1. & lin. $1\frac{4}{9}$. Unde cum vis illa accedendo ad terram augeatur in duplicata diſtantiæ ratione inverſa, ideoque ad ſuperficiem terræ major ſit partibus 60×60 quam ad lunam; corpus vi illa in regionibus noſtris cadendo, deſcribere deberet ſpatio minuti unius primi pedes Pariſienſes $60 \times 60 \times 15\frac{1}{12}$, & ſpatio minuti unius ſecundi pedes $15\frac{1}{12}$, vel magis accurate pedes 15. dig. 1. & lin. $1\frac{4}{9}$. Et eadem vi gravia revera deſcendunt in terram. Nam penduli, in latitudine Lutetiæ Pariſiorum ad ſingula minuta ſecunda oſcillantis, longitudo eſt pedum trium Pariſienſium & linearum $8\frac{1}{2}$, ut obſervavit *Hugenius*. Et altitudo, quam grave tempore minuti unius ſecundi cadendo deſcribit, eſt ad dimidiam longitudinem penduli hujus in duplicata ratione circumferentiæ circuli ad diametrum ejus (ut indicavit etiam *Hugenius*) ideoque eſt pedum Pariſienſium 15. dig. 1. lin. $1\frac{7}{9}$. Et propterea vis qua luna in orbe ſuo retinetur, ſi deſcendatur in ſuperficiem terræ, æqualis evadit vi gravitatis apud nos, ideoque (per reg. I.

&

&. II.) eſt illa ipſa vis quam nos gravitatem dicere ſolemus. Nam ſi gravitas ab ea diverſa eſſet, corpora viribus utriſque conjunctis terram petendo duplo velocius deſcenderent, & ſpatio minuti unius ſecundi cadendo deſcriberent pedes Pariſienſes $30\frac{1}{6}$: omnino contra experientiam.

Calculus hic fundatur in hypotheſi quod terra quieſcit. Nam ſi terra & luna moveantur circum ſolem, & interea quoque circum commune gravitatis centrum revolvantur: manente lege gravitatis diſtantia centrorum lunæ ac terræ ab invicem erit $60\frac{1}{2}$ ſemidiametrorum terreſtrium circiter; uti computationem ineunti patebit. Computatio autem iniri poteſt per prop. LX. lib. I.

Scholium.

Demonſtratio propoſitionis ſic fuſius explicari poteſt. Si lunæ plures circum terram revolverentur, perinde ut fit in ſyſtemate ſaturni vel jovis: harum tempora periodica (per argumentum inductionis) obſervarent legem planetarum a *Keplero* detectam, & propterea harum vires centripetæ forent reciproce ut quadrata diſtantiarum a centro terræ, per prop. I. hujus. Et ſi earum infima eſſet parva, & vertices altiſſimorum montium prope tangeret: hujus vis centripeta qua retineretur in orbe, gravitates corporum in verticibus illorum montium (per computationem præcedentem) æquaret quamproxime, efficeretque ut eadem lunula, ſi motu omni quo pergit in orbe ſuo privaretur, defectu vis centrifugæ qua in orbe permanſerat, deſcenderet in terram, idque eadem cum velocitate qua gravia cadunt in illorum montium verticibus, propter æqualitatem virium quibus deſcendunt. Et ſi vis illa qua lunula illa infima deſcendit, diverſa eſſet a gravitate, & lunula illa etiam gravis eſſet in terram more corporum in verticibus montium: eadem lunula vi utraque conjuncta duplo velocius deſcenderet. Quare cum vires utræque, & hæ corporum gravium, & illæ lunarum, centrum terræ reſpiciant, & ſint inter ſe ſimiles & æquales, eædem (per reg. I. & II.) eandem habebunt cauſam. Et propterea vis illa, qua luna retinetur in orbe ſuo, ea ipſa erit quam nos gravitatem dicere ſolemus: idque maxime ne lunula in vertice montis vel gravitate careat, vel duplo velocius cadat quam corpora gravia ſolent cadere.

PROPO-

PROPOSITIO V. THEOREMA V.

Planetas circumjoviales gravitare in jovem, circumsaturnios in saturnum, & circumsolares in solem, & vi gravitatis suæ retrahi semper a motibus rectilineis, & in orbibus curvilineis retineri.

Nam revolutiones planetarum circumjovialium circa jovem, circumsaturniorum circa saturnum, & mercurii ac veneris reliquorumque circumsolarium circa solem sunt phænomena ejusdem generis cum revolutione lunæ circa terram; & propterea (per reg. II.) a causis ejusdem generis dependent: præsertim cum demonstratum sit quod vires, a quibus revolutiones illæ dependent, respiciant centra jovis, saturni ac solis, & recedendo a jove, saturno & sole decrescant eadem ratione ac lege, qua vis gravitatis decrescit in recessu a terra.

Corol. 1. Gravitas igitur datur in planetas universos. Nam venerem, mercurium, cæterosque esse corpora ejusdem generis cum jove & saturno, nemo dubitat. Et cum attractio omnis per motus legem tertiam mutua sit, jupiter in satellites suos omnes, saturnus in suos, terraque in lunam, & sol in planetas omnes primarios gravitabit.

Corol. 2. Gravitatem, quæ planetam unumquemque respicit, esse reciproce ut quadratum distantiæ locorum ab ipsius centro.

Corol. 3. Graves sunt planetæ omnes in se mutuo per corol. 1. & 2. Et hinc jupiter & saturnus prope conjunctionem se invicem attrahendo, sensibiliter perturbant motus mutuos, sol perturbat motus lunares, sol & luna perturbant mare nostrum, ut in sequentibus explicabitur.

Scholium.

Hactenus vim illam qua corpora cœlestia in orbibus suis retinentur centripetam appellavimus. Eandem jam gravitatem esse constat, & propterea gravitatem in posterum vocabimus. Nam causa vis illius centripetæ, qua luna retinetur in orbe, extendi debet ad omnes planetas per reg. I, II. & IV.

PROPO-

PROPOSITIO VI. THEOREMA VI.

Corpora omnia in planetas ſingulos gravitare, & pondera eorum in eundem quemvis planetam, paribus diſtantiis a centro planetæ, proportionalia eſſe quantitati materiæ in ſingulis.

Deſcenſus gravium omnium in terram (dempta ſaltem inæquali retardatione quæ ex aëris perexigua reſiſtentia oritur) æqualibus temporibus fieri, jamdudum obſervarunt alii; & accuratiſſime quidem notare licet æqualitatem temporum in pendulis. Rem tentavi in auro, argento, plumbo, vitro, arena, ſale communi, ligno, aqua, tritico. Comparabam pyxides duas ligneas rotundas & æquales. Unam implebam ligno, & idem auri pondus ſuſpendebam (quam potui exacte) in alterius centro oſcillationis. Pyxides ab æqualibus pedum undecim filis pendentes, conſtituebant pendula, quoad pondus, figuram, & aëris reſiſtentiam omnino paria: & paribus oſcillationibus, juxta poſitæ, ibant una & redibant diutiſſime. Proinde copia materiæ in auro (per corol. 1. & 6. prop. XXIV. lib. II.) erat ad copiam materiæ in ligno, ut vis motricis actio in totum aurum ad ejuſdem actionem in totum lignum; hoc eſt, ut pondus ad pondus. Et ſic in cæteris. In corporibus ejuſdem ponderis differentia materiæ, quæ vel minor eſſet quam pars milleſima materiæ totius, his experimentis manifeſto deprehendi potuit. Jam vero naturam gravitatis in planetas eandem eſſe atque in terram, non eſt dubium. Elevari enim fingantur corpora hæc terreſtria ad uſque orbem lunæ, & una cum luna motu omni privata demitti, ut in terram ſimul cadant; & per jam ante oſtenſa certum eſt quod temporibus æqualibus deſcribent æqualia ſpatia cum luna, ideoque quod ſunt ad quantitatem materiæ in luna, ut pondera ſua ad ipſius pondus. Porro quoniam ſatellites jovis temporibus revolvuntur quæ ſunt in ratione ſeſquiplicata diſtantiarum a centro jovis, erunt eorum gravitates acceleratrices in jovem reciproce ut quadrata diſtantiarum a centro jovis; & propterea in æqualibus a jove diſtantiis, eorum gravitates acceleratrices evaderent æquales. Proinde temporibus æqualibus ab æqualibus altitudinibus cadendo, deſcriberent æqualia ſpatia; perinde

ut

ut ſit in gravibus in hac terra noſtra. Et eodem argumento planetæ circumſolares, ab æqualibus a ſole diſtantiis demiſſi, deſcenſu ſuo in ſolem æqualibus temporibus æqualia ſpatia deſcriberent. Vires autem, quibus corpora inæqualia æqualiter accelerantur, ſunt ut corpora; hoc eſt, pondera ut quantitates materiæ in planetis. Porro jovis & ejus ſatellitum pondera in ſolem proportionalia eſſe quantitatibus materiæ eorum patet ex motu ſatellitum quam maxime regulari; per corol 3. prop. LXV. lib. I. Nam ſi horum aliqui magis traherentur in ſolem, pro quantitate materiæ ſuæ, quam cæteri: motus ſatellitum (per corol. 2. prop. LXV. lib. I.) ex inæqualitate attractionis perturbarentur. Si, paribus a ſole diſtantiis, ſatelles aliquis gravior eſſet in ſolem pro quantitate materiæ ſuæ, quam jupiter pro quantitate materiæ ſuæ, in ratione quacunque data, puta *d* ad *e*: diſtantia inter centrum ſolis & centrum orbis ſatellitis, major ſemper foret quam diſtantia inter centrum ſolis & centrum jovis in ratione ſubduplicata quam proxime; uti calculo quodam inito inveni. Et ſi ſatelles minus gravis eſſet in ſolem in ratione illa *d* ad *e*, diſtantia centri orbis ſatellitis a ſole minor foret quam diſtantia centri jovis a ſole in ratione illa ſubduplicata. Ideoque ſi in æqualibus a ſole diſtantiis, gravitas acceleratrix ſatellitis cujuſvis in ſolem major eſſet vel minor quam gravitas acceleratrix jovis in ſolem, parte tantum milleſima gravitatis totius; foret diſtantia centri orbis ſatellitis a ſole major vel minor quam diſtantia jovis a ſole parte $\frac{1}{2000}$ diſtantiæ totius, id eſt, parte quinta diſtantiæ ſatellitis extimi a centro jovis: quæ quidem orbis eccentricitas foret valde ſenſibilis. Sed orbes ſatellitum ſunt jovi concentrici, & propterea gravitates acceleratrices jovis & ſatellitum in ſolem æquantur inter ſe. Et eodem argumento pondera ſaturni & comitum ejus in ſolem, in æqualibus a ſole diſtantiis, ſunt ut quantitates materiæ in ipſis: & pondera lunæ ac terræ in ſolem vel nulla ſunt, vel earum maſſis accurate proportionalia. Aliqua autem ſunt per corol. I. & 3. prop. V.

Quinetiam pondera partium ſingularum planetæ cujuſque in alium quemcunque ſunt inter ſe ut materia in partibus ſingulis. Nam ſi partes aliquæ plus gravitarent, aliæ minus, quam pro quantitate materiæ: planeta totus, pro genere partium quibus maximæ abundet, gravitaret magis vel minus quam pro quantitate materiæ totius.

Sed nec refert utrum partes illæ externæ ſint vel internæ. Nam ſi verbi gratia corpora terreſtria, quæ apud nos ſunt, in orbem lunæ elevari fingantur, & conferantur cum corpore lunæ: ſi horum pondera eſſent ad pondera partium externarum lunæ ut quantitates materiæ in iiſdem, ad pondera vero partium internarum in majori vel minori ratione, forent eadem ad pondus lunæ totius in majori vel minori ratione: contra quam ſupra oſtenſum eſt.

Corol. 1. Hinc pondera corporum non pendent ab eorum formis & texturis. Nam ſi cum formis variari poſſent; forent majora vel minora, pro varietate formarum, in æquali materia: omnino contra experientiam.

Corol. 2. Corpora univerſa, quæ circa terram ſunt, gravia ſunt in terram; & pondera omnium, quæ æqualiter a centro terræ diſtant, ſunt ut quantitates materiæ in iiſdem. Hæc eſt qualitas omnium in quibus experimenta inſtituere licet, & propterea per reg. III. de univerſis affirmanda eſt. Si æther aut corpus aliud quodcunque vel gravitate omnino deſtitueretur, vel pro quantitate materiæ ſuæ minus gravitaret: quoniam id (ex mente *Ariſtotelis*, *Carteſii* & aliorum) non differt ab aliis corporibus niſi in forma materiæ, poſſet idem per mutationem formæ gradatim tranſmutari in corpus ejuſdem conditionis cum iis, quæ pro quantitate materiæ quam maxime gravitant, & viciſſim corpora maxime gravia, formam illius gradatim induendo, poſſent gravitatem ſuam gradatim amittere. Ac proinde pondera penderent a formis corporum, poſſentque cum formis variari, contra quam probatum eſt in corollario ſuperiore.

Corol. 3. Spatia omnia non ſunt æqualiter plena. Nam ſi ſpatia omnia æqualiter plena eſſent, gravitas ſpecifica fluidi quo regio aëris impleretur, ob ſummam denſitatem materiæ, nil cederet gravitati ſpecificæ argenti vivi, vel auri, vel corporis alterius cujuſcunque denſiſſimi; & propterea nec aurum neque aliud quodcunque corpus in aëre deſcendere poſſet. Nam corpora in fluidis, niſi ſpecifice graviora ſint, minime deſcendunt. Quod ſi quantitas materiæ in ſpatio dato per rarefactionem quamcunque diminui poſſit, quidni diminui poſſit in infinitum?

Corol. 4. Si omnes omnium corporum particulæ ſolidæ ſint ejuſdem denſitatis, neque ſine poris rarefieri poſſint, vacuum datur.

Ejuſdem

Ejusdem densitatis esse dico, quarum vires inertiæ sunt ut magnitudines.

Corol. 5. Vis gravitatis diversi est generis a vi magnetica. Nam attractio magnetica non est ut materia attracta. Corpora aliqua magis trahuntur, alia minus, plurima non trahuntur. Et vis magnetica in uno & eodem corpore intendi potest & remitti, estque nonnunquam longe major pro quantitate materiæ quam vis gravitatis, & in recessu a magnete descrescit in ratione distantiæ non duplicata, sed fere triplicata, quantum ex crassis quibusdam observationibus animadvertere potui.

PROPOSITIO VII. THEOREMA VII.

Gravitatem in corpora universa fieri, eamque proportionalem esse quantitati materiæ in singulis.

Planetas omnes in se mutuo graves esse jam ante probavimus, ut & gravitatem in unumquemque seorsim spectatum esse reciproce ut quadratum distantiæ locorum a centro planetæ. Et inde consequens est (per prop. LXIX. lib. I. & ejus corollaria) gravitatem in omnes proportionalem esse materiæ in iisdem.

Porro cum planetæ cujusvis *A* partes omnes graves sint in planetam quemvis *B*, & gravitas partis cujusque sit ad gravitatem totius, ut materia partis ad materiam totius, & actioni omni reactio (per motus legem tertiam) æqualis sit; planeta *B* in partes omnes planetæ *A* vicissim gravitabit, & erit gravitas sua in partem unamquamque ad gravitatem suam in totum, ut materia partis ad materiam totius. *Q. E. D.*

Corol. I. Oritur igitur & componitur gravitas in planetam totum ex gravitate in partes singulas. Cujus rei exempla habemus in attractionibus magneticis & electricis. Oritur enim attractio omnis in totum ex attractionibus in partes singulas. Res intelligetur in gravitate, concipiendo planetas plures minores in unum globum coire & planetam majorem componere. Nam vis totius ex viribus partium componentium oriri debebit. Siquis objiciat quod corpora omnia, quæ apud nos sunt, hac lege gravitare deberent in se mutuo, cum tamen ejusmodi gravitas neutiquam sentiatur: respondeo quod

 gravitas

gravitas in hæc corpora, cum ſit ad gravitatem in terram totam ut ſunt hæc corpora ad terram totam, longe minor eſt quam quæ ſentiri poſſit.

Corol. 2. Gravitatio in ſingulas corporis particulas æquales eſt reciproce ut quadratum diſtantiæ locorum a particulis. Patet per corol 3. prop. LXXIV. lib. I.

PROPOSITIO VIII. THEOREMA VIII.

Si globorum duorum in ſe mutuo gravitantium materia undique in regionibus, quæ a centris æqualiter diſtant, homogenea ſit: erit pondus globi alterutrius in alterum reciproce ut quadratum diſtantiæ inter centra.

Poſtquam inveniſſem gravitatem in planetam totum oriri & componi ex gravitatibus in partes; & eſſe in partes ſingulas reciproce proportionalem quadratis diſtantiarum a partibus: dubitabam an reciproca illa proportio duplicata obtineret accurate in vi tota ex viribus pluribus compoſita, an vero quam proxime. Nam fieri poſſet ut proportio, quæ in majoribus diſtantiis ſatis accurate obtineret, prope ſuperficiem planetæ ob inæquales particularum diſtantias & ſitus diſſimiles, notabiliter erraret. Tandem vero, per prop. LXXV. & LXXVI. libri primi & ipſarum corollaria, intellexi veritatem propoſitionis de qua hic agitur.

Corol. 1. Hinc inveniri & inter ſe comparari poſſunt pondera corporum in diverſos planetas. Nam pondera corporum æqualium circum planetas in circulis revolventium ſunt (per corol. 2. prop. IV. lib. I.) ut diametri circulorum directe & quadrata temporum periodicorum inverſe; & pondera ad ſuperficies planetarum, aliaſve quaſvis a centro diſtantias, majora ſunt vel minora (per hanc propoſitionem) in duplicata ratione diſtantiarum inverſa. Sic ex temporibus periodicis veneris circum ſolem dierum 224 & horarum $16\frac{3}{4}$, ſatellitis extimi circumjovialis circum jovem dierum 16 & horarum $16\frac{8}{15}$, ſatellitis Hugeniani circum ſaturnum dierum 15 & horarum $22\frac{2}{3}$, & lunæ circum terram dierum 27. hor. 7. min. 43, collatis cum diſtantia mediocri veneris a ſole & cum elongationibus maximis heliocentricis ſatellitis extimi circumjovialis a centro jovis 8′. 16″. ſatellitis

Huge-

Hugeniani a centro saturni 3'. 4''. & lunæ a centro terræ 10'. 33''. computum ineundo inveni quod corporum æqualium & a centro solis, jovis, saturni ac terræ æqualiter distantium pondera sint in solem, jovem, saturnum ac terram ut 1, $\frac{1}{1067}$, $\frac{1}{3021}$, & $\frac{1}{169282}$ respective, & auctis vel diminutis distantiis, pondera diminuuntur vel augentur in duplicata ratione: pondera æqualium corporum in solem, jovem, saturnum ac terram in distantiis 10000, 997, 791, & 109 ab eorum centris, atque ideo in eorum superficiebus, erunt ut 10000, 943, 529, & 435 respective. Quanta sint pondera corporum in superficie lunæ dicetur in sequentibus.

Corol. 2. Innotescit etiam quantitas materiæ in planetis singulis. Nam quantitates materiæ in planetis sunt ut eorum vires in æqualibus distantiis ab eorum centris, id est, in sole, jove, saturno ac terra sunt ut 1, $\frac{1}{1067}$, $\frac{1}{3021}$, & $\frac{1}{169282}$ respective. Si parallaxis solis statuatur major vel minor quam 10''. 30''', debebit quantitas materiæ in terra augeri vel diminui in triplicata ratione.

Corol. 3. Innotescunt etiam densitates planetarum. Nam pondera corporum æqualium & homogeneorum in sphæras homogeneas sunt in superficiebus sphærarum ut sphærarum diametri, per prop. LXXII. lib. I. ideoque sphærarum heterogenearum densitates sunt ut pondera illa applicata ad sphærarum diametros. Erant autem veræ solis, jovis, saturni ac terræ diametri ad invicem ut 10000, 997, 791, & 109, & pondera in eosdem ut 10000, 943, 529 & 435 respective, & propterea densitates sunt ut 100, $94\frac{1}{2}$, 67 & 400. Densitas terræ quæ prodit ex hoc computo non pendet a parallaxi solis, sed determinatur per parallaxin lunæ, & propterea hic recte definitur. Est igitur sol paulo densior quam jupiter, & jupiter quam saturnus, & terra quadruplo densior quam sol. Nam per ingentem suum calorem sol rarescit. Luna vero densior est quam terra, ut in sequentibus patebit.

Corol. 4. Densiores igitur sunt planetæ qui sunt minores, cæteris paribus. Sic enim vis gravitatis in eorum superficiebus ad æqualitatem magis accedit. Sed & densiores sunt planetæ, cæteris paribus, qui sunt soli propiores; ut jupiter saturno, & terra jove. In diversis utique distantiis a sole collocandi erant planetæ ut quilibet pro gradu densitatis calore solis majore vel minore frueretur. Aqua nostra, si terra locaretur in orbe saturni, rigesceret, si in orbe mer-

curii

curii in vapores ſtatim abiret. Nam lux ſolis, cui calor proportionalis eſt, ſeptuplo denſior eſt in orbe mercurii quam apud nos: & thermometro expertus ſum quod ſeptuplo ſolis æſtivi calore aqua ebullit. Dubium vero non eſt quin materia mercurii ad calorem accommodetur, & propterea denſior ſit hac noſtra; cum materia omnis denſior ad operationes naturales obeundas majorem calorem requirat.

PROPOSITIO IX. THEOREMA IX.

Gravitatem pergendo a ſuperficiebus planetarum deorſum decreſcere in ratione diſtantiarum a centro quam proxime.

Si materia planetæ quoad denſitatem uniformis eſſet, obtineret hæc propoſitio accurate: per prop. LXXIII. lib. I. Error igitur tantus eſt, quantus ab inæquabili denſitate oriri poſſit.

PRPOSITIO X. THEOREMA X.

Motus planetarum in cœlis diutiſſime conſervari poſſe.

In ſcholio propoſitionis XL. lib. II. oſtenſum eſt quod globus aquæ congelatæ, in aëre noſtro libere movendo & longitudinem ſemidiametri ſuæ deſcribendo, ex reſiſtentia aëris amitteret motus ſui partem $\frac{1}{4586}$. Obtinet autem eadem proportio quam proxime in globis utcunque magnis & velocibus. Jam vero globum terræ noſtræ denſiorem eſſe, quam ſi totus ex aqua conſtaret, ſic colligo. Si globus hicce totus eſſet aqueus, quæcunque rariora eſſent quam aqua, ob minorem ſpecificam gravitatem emergerent & ſupernatarent. Eaque de cauſa globus terreus aquis undique coopertus, ſi rarior eſſet quam aqua, emergeret alicubi, & aqua omnis inde defluens congregaretur in regione oppoſita. Et par eſt ratio terræ noſtræ maribus magna ex parte circumdatæ. Hæc ſi denſior non eſſet, emergeret ex maribus, & parte ſui pro gradu levitatis extaret ex aqua, maribus omnibus in regionem oppoſitam confluentibus. Eodem argumento maculæ ſolares leviores ſunt quam materia lucida ſolaris cui ſupernatant. Et in formatione qualicunque planetarum, ex aqua materia omnis gravior, quo tempore maſſa fluida erat,

centrum

centrum petebat. Unde cum terra communis ſuprema quaſi duplo gravior ſit quam aqua, & paulo inferius in fodinis quaſi triplo vel quadruplo aut etiam quintuplo gravior reperiatur: veriſimile eſt quod copia materiæ totius in terra quaſi quintuplo vel ſextuplo major ſit quam ſi tota ex aqua conſtaret; præſertim cum terram quaſi quadruplo denſiorem eſſe quam jovem jam ante oſtenſum ſit. Quare ſi jupiter paulo denſior ſit quam aqua, hic ſpatio dierum triginta, quibus longitudinem 459 ſemidiametrorum ſuarum deſcribit, amitteret in medio ejuſdem denſitatis cum aëre noſtro motus ſui partem fere decimam. Verum cum reſiſtentia mediorum minuatur in ratione ponderis ac denſitatis, ſic ut aqua, quæ partibus $13\frac{2}{3}$ levior eſt quam argentum vivum, minus reſiſtat in eadem ratione; & aer, qui partibus 860 levior eſt quam aqua, minus reſiſtat in eadem ratione: ſi aſcendatur in cœlos ubi pondus medii, in quo planetæ moventur, diminuitur in immenſum, reſiſtentia prope ceſſabit. Oſtendimus utique in ſcholio ad prop. XXII. lib. II. quod ſi aſcenderetur ad altitudinem milliarium ducentorum ſupra terram, aër ibi rarior foret quam ad ſuperficiem terræ in ratione 30 ad 0,0000000000003998, ſeu 75000000000000 ad 1 circiter. Et hinc ſtella jovis in medio ejuſdem denſitatis cum aere illo ſuperiore revolvendo, tempore annorum 1000000, ex reſiſtentia medii non amitteret motus ſui partem decimam centeſimam milleſimam. In ſpatiis utique terræ proximis, nihil invenitur quod reſiſtentiam creet præter aërem exhalationes & vapores. His ex vitro cavo cylindrico diligentiſſime exhauſtis gravia intra vitrum liberrime & ſine omni reſiſtentia ſenſibili cadunt; ipſum aurum & pluma tenuiſſima ſimul demiſſa æquali cum velocitate cadunt, & caſu ſuo deſcribendo altitudinem pedum quatuor ſex vel octo ſimul incidunt in fundum, ut experientia compertum eſt. Et propterea ſi in cœlos aſcendatur aëre & exhalationibus vacuos, planetæ & cometæ ſine omni reſiſtentia ſenſibili per ſpatia illa diutiſſime movebuntur.

HYPO-

HYPOTHESIS I.

Centrum systematis mundani quiescere.

Hoc ab omnibus concessum est, dum aliqui terram, alii solem in centro systematis quiescere contendant. Videamus quid inde sequatur.

PROPOSITIO XI. THEOREMA XI.

Commune centrum gravitatis terræ, solis & planetarum omnium quiescere.

Nam centrum illud (per legum corol. iv.) vel quiescet vel progredietur uniformiter in directum. Sed centro illo semper progrediente, centrum mundi quoque movebitur contra hypothesin.

PROPOSITIO XII. THEOREMA XII.

Solem motu perpetuo agitari, sed nunquam longe recedere a communi gravitatis centro planetarum omnium.

Nam cum (per corol. 2. prop. viii.) materia in sole sit ad materiam in jove ut 1067 ad 1, & distantia jovis a sole sit ad semidiametrum solis in ratione paulo majore; incidet commune centrum gravitatis jovis & solis in punctum paulo supra superficiem solis. Eodem argumento cum materia in sole sit ad materiam in saturno ut 3021 ad 1, & distantia saturni a sole sit ad semidiametrum solis in ratione paulo minore: incidet commune centrum gravitatis saturni & solis in punctum paulo infra superficiem solis. Et ejusdem calculi vestigiis insistendo si terra & planetæ omnes ex una solis parte consisterent, commune omnium centrum gravitatis vix integra solis diametro a centro solis distaret. Aliis in casibus distantia centrorum semper minor est. Et propterea cum centrum illud gravitatis perpetuo quiescit, sol pro vario planetarum situ in omnes partes movebitur, sed a centro illo nunquam longe recedet.

Corol. Hinc commune gravitatis centrum terræ, solis & planetarum omnium pro centro mundi habendum est. Nam cum terra, sol

ſol & planetæ omnes gravitent in ſe mutuo, & propterea, pro vi gravitatis ſuæ, ſecundum leges motus perpetuo agitentur: perſpicuum eſt quod horum centra mobilia pro mundi centro quieſcente haberi nequeunt. Si corpus illud in centro locandum eſſet in quod corpora omnia maxime gravitant (uti vulgi eſt opinio) privilegium iſtud concedendum eſſet ſoli. Cum autem ſol moveatur, eligendum erit punctum quieſcens, a quo centrum ſolis quam minime diſcedit, & a quo idem adhuc minus diſcederet, ſi modo ſol denſior eſſet & major, ut minus moveretur.

PROPOSITIO XIII. THEOREMA XIII.

Planetæ moventur in ellipſibus umbilicum habentibus in centro ſolis, & radiis ad centrum illud ductis areas deſcribunt temporibus proportionales.

Diſputavimus ſupra de his motibus ex phænomenis. Jam cognitis motuum principiis, ex his colligimus motus cœleſtes a priori. Quoniam pondera planetarum in ſolem ſunt reciproce ut quadrata diſtantiarum a centro ſolis; ſi ſol quieſceret & planetæ reliqui non agerent in ſe mutuo, forent orbes eorum elliptici, ſolem in umbilico communi habentes, & areæ deſcriberentur temporibus proportionales (per prop I. & XI. & corol. I. prop. XIII. lib. I.) actiones autem planetarum in ſe mutuo perexiguæ ſunt (ut poſſint contemni) & motus planetarum in ellipſibus circa ſolem mobilem minus perturbant (per prop. LXVI. lib. I.) quam ſi motus iſti circa ſolem quieſcentem peragerentur.

Actio quidem jovis in ſaturnum non eſt omnino contemnenda. Nam gravitas in jovem eſt ad gravitatem in ſolem (paribus diſtantiis) ut 1 ad 1067; ideoque in conjunctione jovis & ſaturni, quoniam diſtantia ſaturni a jove eſt ad diſtantiam ſaturni a ſole fere ut 4 ad 9, erit gravitas ſaturni in jovem ad gravitatem ſaturni in ſolem ut 81 ad 16×1067 ſeu 1 ad 211 circiter. Et hinc oritur perturbatio orbis ſaturni in ſingulis planetæ hujus cum jove conjunctionibus adeo ſenſibilis ut ad eandem aſtronomi hæreant. Pro vario ſitu planetæ in his conjunctionibus, eccentricitas ejus nunc augetur nunc diminuitur, aphelium nunc promovetur nunc forte retrahitur, & medius

motus per vices acceleratur & retardatur. Error tamen omnis in motu ejus circum solem a tanta vi oriundus (præterquam in motu medio) evitari fere potest constituendo umbilicum inferiorem orbis ejus in communi centro gravitatis jovis & solis (per prop. LXVII. lib. I.) & propterea ubi maximus est, vix superat minuta duo prima. Et error maximus in motu medio vix superat minuta duo prima annuatim. In conjunctione autem jovis & saturni gravitates acceleratrices solis in saturnum, jovis in saturnum & jovis in solem sunt fere ut 16, 81 & $\frac{16 \times 81 \times 3021}{25}$ seu 156609, ideoque differentia gravitatum solis in saturnum & jovis in saturnum est ad gravitatem jovis in solem ut 65 ad 156609 seu 1 ad 2409. Huic autem differentiæ proportionalis est maxima saturni efficacia ad perturbandum motum jovis, & propterea perturbatio orbis jovialis longe minor est quam ea saturnii. Reliquorum orbium perturbationes sunt adhuc longe minores, præterquam quod orbis terræ sensibiliter perturbatur a luna. Commune centrum gravitatis terræ & lunæ, ellipsin circum solem in umbilico positum percurrit, & radio ad solem ducto areas in eadem temporibus proportionales describit, terra vero circum hoc centrum commune motu menstruo revolvitur.

PROPOSITIO XIV. THEOREMA XIV.

Orbium aphelia & nodi quiescunt.

Aphelia quiescunt, per prop. XI. lib. I. ut & orbium plana, per ejusdem libri prop. I. & quiescentibus planis quiescunt nodi. Attamen a planetarum revolventium & cometarum actionibus in se invicem orientur inæqualitates aliquæ, sed quæ ob parvitatem hic contemni possunt.

Corol. I. Quiescunt etiam stellæ fixæ, propterea quod datas ad aphelia nodosque positiones servant.

Corol. 2. Ideoque cum nulla sit earum parallaxis sensibilis ex terræ motu annuo oriunda, vires earum ob immensam corporum distantiam nullos edent sensibiles effectus in regione systematis nostri. Quinimo fixæ in omnes cœli partes æqualiter dispersæ contrariis attractionibus vires mutuas destruunt, per prop. LXX. lib. I.

Scholium.

Scholium.

Cum planetæ ſoli propiores (nempe mercurius, venus, terra, & mars) ob corporum parvitatem parum agant in ſe invicem: horum aphelia & nodi quieſcent, niſi quatenus a viribus jovis, ſaturni & corporum ſuperiorum turbentur. Et inde colligi poteſt per theoriam gravitatis, quod horum aphelia moventur aliquantulum in conſequentia reſpectu fixarum, idque in proportione ſeſquiplicata diſtantiarum horum planetarum a ſole. Ut ſi aphelium martis in annis centum conficiat 33′. 20″ in conſequentia reſpectu fixarum; aphelia terræ, veneris, & mercurii in annis centum conficient 17′. 40″, 10′. 53″, & 4′. 16″ reſpective. Et hi motus, ob parvitatem, negliguntur in hac propoſitione.

PROPOSITIO XV. PROBLEMA I.

Invenire orbium principales diametros.

Capiendæ ſunt hæ in ratione ſubſeſquiplicata temporum periodicorum, per prop. XV. lib. I. deinde ſigillatim augendæ in ratione ſummæ maſſarum ſolis & planetæ cujuſque revolventis ad primam duarum medie proportionalium inter ſummam illam & ſolem, per prop. LX. lib. I.

PROPOSITIO XVI. PROBLEMA II.

Invenire orbium eccentricitates & aphelia.

Problema conſit per prop. XVIII. lib. I.

PROPOSITIO XVII. THEOREMA XV.

Planetarum motus diurnos uniformes eſſe, & librationem lunæ ex ipſius motu diurno oriri.

Patet per motus legem I. & corol. 22. prop. LXVI. lib. I. Jupiter utique reſpectu fixarum revolvitur horis 9. 56′, mars horis 24. 39′. venus horis 23 circiter, terra horis 23. 56′, ſol diebus 25½ & luna diebus 27. 7 hor. 43′. Hæc ita ſe habere ex phænomenis manifeſtum eſt. Maculæ in corpore ſolis ad eundem ſitum in diſco ſolis redeunt diebus 27½ circiter, reſpectu terræ; ideoque reſpectu fixarum ſol revolvitur diebus 25½ circiter. Quoniam vero lunæ circa

axem ſuum uniformiter revolventis dies menſtruus eſt: hujus facies eadem ulteriorem umbilicum orbis ejus ſemper reſpiciet quamproxime, & propterea pro ſitu umbilici illius deviabit hinc inde a terra. Hæc eſt libratio lunæ in longitudinem: Nam libratio in latitudinem orta eſt ex latitudine lunæ & inclinatione axis ejus ad planum eclipticæ. Hanc librationis lunaris theoriam D. *N. Mercator* in aſtronomia ſua initio anni 1676 edita, ex literis meis plenius expoſuit. Simili motu extimus ſaturni ſatelles circa axem ſuum revolvi videtur, eadem ſui facie ſaturnum perpetuo reſpiciens. Nam circum ſaturnum revolvendo, quoties ad orbis ſui partem orientalem accedit, ægerrime videtur, & plerumque videri ceſſat: id quod evenire poteſt per maculas quaſdam in ea corporis parte quæ terræ tunc obvertitur, ut *Caſſinus* notavit. Simili etiam motu ſatelles extimus jovialis circa axem ſuum revolvi videtur, propterea quod in parte corporis jovi averſa maculam habeat quæ tanquam in corpore jovis cernitur ubicunque ſatelles inter jovem & oculos noſtros tranſit.

PROPOSITIO XVIII. THEOREMA XVI.

Axes planetarum diametris quæ ad eoſdem axes normaliter ducuntur minores eſſe.

Planetæ ſublato omni motu circulari diurno figuram ſphæricam, ob æqualem undique partium gravitatem, affectare deberent. Per motum illum circularem fit ut partes ab axe recedentes juxta æquatorem aſcendere conentur. Ideoque materia ſi fluida ſit aſcenſu ſuo ad æquatorem diametros adaugebit, axem vero deſcenſu ſuo ad polos diminuet. Sic jovis diameter (conſentientibus aſtronomorum obſervationibus) brevior deprehenditur inter polos quam ab oriente in occidentem. Eodem argumento, niſi terra noſtra paulo altior eſſet ſub æquatore quam ad polos, maria ad polos ſubſiderent, & juxta æquatorem aſcendendo, ibi omnia inundarent.

PROPOSITIO XIX. PROBLEMA III.

Invenire proportionem axis planetæ ad diametros eidem perpendiculares.

Norwoodus noſter circa annum 1635 menſurando diſtantiam pedum Londi-

Londinensium 905751 inter *Londinum* & *Eboracum*, & observando differentiam latitudinum 2 *gr.* 28′ collegit mensuram gradus unius esse pedum Londinensium 367196, id est, hexapedarum Parisiensium 57300.

Picartus mensurando arcum gradus unius & 22′. 55″ in meridiano inter *Ambianum* & *Malvoisinam*, invenit arcum gradus unius esse hexapedarum Parisiensium 57060. *Cassinus* senior mensuravit distantiam in meridiano a villa *Collioure* in *Roussilion* ad observatorium Parisiense; & filius ejus addidit distantiam ab observatorio ad turrem urbis *Dunkirk*. Distantia tota erat hexapedarum 486156$\frac{1}{2}$, & differentia latitudinum villæ *Collioure* & urbis *Dunkirk* erat graduum octo & 31′. 11$\frac{5}{6}$″. Unde arcus gradus unius prodit hexapedarum Parisiensium 57061. Et ex his mensuris colligitur ambitus terræ pedum Parisiensium 123249600, & semidiameter ejus pedum 19615800, ex hypothesi quod terra sit sphærica.

In latitudine *Lutetiæ Parisiorum* corpus grave tempore minuti unius secundi cadendo describit pedes Parisienses 15 dig. 1 lin. 1$\frac{7}{9}$ ut supra, id est, lineas 2173$\frac{7}{9}$. Pondus corporis diminuitur per pondus aëris ambientis. Ponamus pondus amissum esse partem undecimam millesimam ponderis totius, & corpus illud grave cadendo in vacuo describet altitudinem linearum 2174 tempore minuti unius secundi.

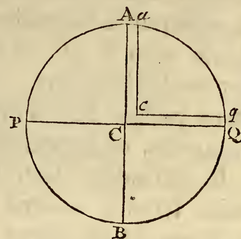
Corpus in circulo ad distantiam pedum 19615800 a centro, singulis diebus sidereis horarum 23. 56′. 4″ uniformiter revolvens tempore minuti unius secundi describet arcum pedum 1433,46, cujus sinus versus est pedum 0,0523656, seu linearum 7,54064. Ideoque vis, qua gravia descendunt in latitudine *Lutetiæ*, est ad vim centrifugam corporum in æquatore a terræ motu diurno oriundam, ut 2174 ad 7,54064.

Vis centrifuga corporum in æquatore terræ est ad vim centrifugam, qua corpora directe tendunt a terra in latitudine *Lutetiæ* graduum 48. 50′. 10″, in duplicata ratione radii ad sinum complementi latitudinis illius, id est, ut 7,54064 ad 3,267. Addatur hæc vis ad vim qua gravia descendunt in latitudine illa *Lutetiæ*, & corpus in latitudine illa vi tota gravitatis cadendo, tempore minuti unius secundi describet lineas 2177,267, seu pedes Parisienses 15 dig. 1 & lin. 5,267. Et vis tota gravitatis in latitudine illa erit ad vim centri-

De Mundi Systemate

centrifugam corporum in æquatore terræ ut 2177,267 ad 7,54064 seu 289 ad 1.

Unde si *APBQ* figuram terræ designet jam non amplius sphæricam sed revolutione ellipseos circum axem minorem *PQ* genitam, sitque *ACQqca* canalis aquæ plena, a polo *Qq* ad centrum *Cc*, & inde ad æquatorem *Aa* pergens: debebit pondus aquæ in canalis crure *ACca*, esse ad pondus aquæ in crure altero *QCcq* ut 289 ad 288, eo quod vis centrifuga ex circulari motu orta partem unam e ponderis partibus 289 sustinebit ac detrahet, & pondus 288 in altero crure sustinebit reliquas. Porro (ex propositionis xci. corol. 2. lib. 1.) computationem ineundo, invenio quod si terra constaret ex uniformi materia, motuque omni privaretur, & esset ejus axis *PQ* ad diametrum *AB* ut 100 ad 101: gravitas in loco *Q* in terram foret ad gravitatem in eodem loco *Q* in sphæram centro *C* radio *PC* vel *QC* descriptam, ut 126 ad 125. Et eodem argumento gravitas in loco *A* in sphæroidem, convolutione ellipseos *APBQ* circa axem *AB* descriptam, est ad gravitatem in eodem loco *A* in sphæram centro *C* radio *AC* descriptam, ut 125 ad 126. Est autem gravitas in loco *A* in terram media proportionalis inter gravitates in dictam sphæroidem & sphæram: propterea quod sphæra, diminuendo diametrum *PQ* in ratione 101 ad 100, vertitur in figuram terræ; & hæc figura diminuendo in eadem ratione diametrum tertiam, quæ diametris duabus *AB*, *PQ* perpendicularis est, vertitur in dictam sphæroidem; & gravitas in *A*, in casu utroque, diminuitur in eadem ratione quam proxime. Est igitur gravitas in *A* in sphæram centro *C* radio *AC* descriptam, ad gravitatem in *A* in terram ut 126 ad $125\frac{1}{2}$, & gravitas in loco *Q* in sphæram centro *C* radio *QC* descriptam, est ad gravitatem in loco *A* in sphæram centro *C* radio *AC* descriptam, in ratione diametrorum (per prop. lxxii. lib. 1.) id est, ut 100 ad 101. Conjungantur jam hæ tres rationes, 126 ad 125, 126 ad $125\frac{1}{2}$, & 100 ad 101: & fiet gravitas in loco *Q* in terram ad gravitatem in loco *A* in terram, ut $126 \times 126 \times 100$ ad $125 \times 125\frac{1}{2} \times 101$, seu ut 501 ad 500.



Jam

Jam cum (per corol. 3. prop. xci. lib. 1.) gravitas in canalis crure utrovis *ACca* vel *QCcq* ſit ut diſtantia locorum a centro terræ; ſi crura illa ſuperficiebus tranſverſis & æquidiſtantibus diſtinguantur in partes totis proportionales, erunt pondera partium ſingularum in crure *ACca* ad pondera partium totidem in crure altero, ut magnitudines & gravitates acceleratrices conjunctim; id eſt, ut 101 ad 100 & 500 ad 501, hoc eſt, ut 505 ad 501. Ac proinde ſi vis centrifuga partis cujuſque in crure *ACca* ex motu diurno oriunda, fuiſſet ad pondus partis ejuſdem ut 4 ad 505, eo ut de pondere partis cujuſque, in partes 505 diviſo, partes quatuor detraheret; manerent pondera in utroque crure æqualia, & propterea fluidum conſiſteret in æquilibrio. Verum vis centrifuga partis cujuſque eſt ad pondus ejuſdem ut 1 ad 289, hoc eſt, vis centrifuga quæ deberet eſſe ponderis pars $\frac{4}{505}$ eſt tantum pars $\frac{1}{289}$. Et propterea dico, ſecundum regulam auream, quod ſi vis centrifuga $\frac{4}{505}$ faciat ut altitudo aquæ in crure *ACca* ſuperet altitudinem aquæ in crure *QCcq* parte centeſima totius altitudinis: vis centrifuga $\frac{1}{289}$ faciet ut exceſſus altitudinis in crure *ACca* ſit altitudinis in crure altero *QCcq* pars tantum $\frac{1}{229}$. Eſt igitur diameter terræ ſecundum æquatorem ad ipſius diametrum per polos ut 230 ad 229. Ideoque cum terræ ſemidiameter mediocris, juxta menſuram *Picarti*, ſit pedum Pariſienſium 19615800, ſeu milliarium 3923,16 (poſito quod milliare ſit menſura pedum 5000) terra altior erit ad æquatorem quam ad polos exceſſu pedum 85472, ſeu milliarum $17\frac{1}{10}$. Et altitudo ejus ad æquatorem erit 19658600 pedum circiter, & ad polos 19573000 pedum.

Si planeta major ſit vel minor quam terra manente ejus denſitate ac tempore periodico revolutionis diurnæ, manebit proportio vis centrifugæ ad gravitatem, & propterea manebit etiam proportio diametri inter polos ad diametrum ſecundum æquatorem. At ſi motus diurnus in ratione quacunque acceleretur vel retardetur, augebitur vel minuetur vis centrifuga in duplicata illa ratione, & propterea differentia diametrorum augebitur vel minuetur in eadem duplicata ratione quamproxime. Et ſi denſitas planetæ augeatur vel minuatur in ratione quavis, gravitas etiam in ipſum tendens augebitur vel minuetur in eadem ratione, & differentia diametrorum viciſſim minuetur in ratione gravitatis auctæ vel augebitur in ratione

gravitatis

gravitatis diminutæ. Unde cum terra respectu fixarum revolvatur horis 23. 56′, jupiter autem horis 9. 56′, sintque temporum quadrata ut 29 ad 5, & revolventium densitates ut 400 ad $94\frac{1}{2}$: differentia diametrorum jovis erit ad ipsius diametrum minorem ut $\frac{29}{5} \times \frac{400}{94\frac{1}{2}} \times \frac{1}{229}$ ad 1, seu 1 ad $9\frac{1}{3}$ quamproxime. Est igitur diameter jovis ab oriente in occidentem ducta, ad ejus diametrum inter polos ut $10\frac{1}{3}$ ad $9\frac{1}{3}$ quamproxime. Unde cum ejus diameter major sit 37″, ejus diameter minor quæ polis interjacet, erit 33″. 25‴. Pro luce erratica addantur 3″ circiter, & hujus planetæ diametri apparentes evadent 40″ & 36″. 25‴: quæ sunt ad invicem ut $11\frac{1}{6}$ ad $10\frac{1}{6}$ quamproxime. Hoc ita se habet ex hypothesi quod corpus jovis sit uniformiter densum. At si corpus ejus sit densius versus planum æquatoris quam versus polos, diametri ejus possunt esse ad invicem ut 12 ad 11, vel 13 ad 12, vel forte 14 ad 13. Et *Cassinus* quidem anno 1691 observavit, quod jovis diameter ab oriente in occidentem porrecta diametrum alteram superaret parte sui circiter decima quinta. *Poundus* autem noster telescopio pedum 123 longitudinis & optimo micrometro, diametros jovis anno 1719, mensuravit ut sequitur.

Tempora.		*Diam. max.*	*Diam. min.*	*Diametri ad invicem.*	
dies	*hor.*	*part.*	*part.*		
Jan. 28	6	13,40	12,28	*ut* 12	*ad* 11
Mar. 6	7	13,12	12,20	$13\frac{3}{4}$	$12\frac{3}{4}$
Mar. 9	7	13,12	12,08	$12\frac{2}{3}$	$11\frac{2}{3}$
Apr. 9	9	12,32	11,48	$14\frac{1}{2}$	$13\frac{1}{2}$

Congruit igitur theoria cum phænomenis. Nam planetæ magis incalescunt ad lucem solis versus æquatores suos, & propterea paulo magis ibi decoquuntur quam versus polos.

Quinetiam gravitatem per rotationem diurnam terræ nostræ minui sub æquatore, atque ideo terram ibi altius surgere quam ad polos (si materia ejus uniformiter densa sit) patebit per experimenta pendulorum quæ recensentur in propositione sequente.

PROPO-

PROPOSITIO XX. PROBLEMA IV.

Invenire & inter se comparare pondera corporum in terræ hujus regionibus diversis.

Quoniam pondera inæqualium crurum canalis aqueæ *ACQqca* æqualia sunt; & pondera partium, cruribus totis proportionalium & similiter in totis sitarum, sunt ad invicem ut pondera totorum, ideoque etiam æquantur inter se; erunt pondera æqualium & in cruribus similiter sitarum partium reciproce ut crura, id est, reciproce ut 230 ad 229. Et par est ratio homogeneorum & æqualium quorumvis & in canalis cruribus similiter sitorum corporum. Horum pondera sunt reciproce ut crura, id est, reciproce ut distantiæ corporum a centro terræ. Proinde si corpora in supremis canalium partibus, sive in superficie terræ consistant; erunt pondera eorum ad invicem reciproce ut distantiæ eorum a centro. Et eodem argumento pondera, in aliis quibuscunque per totam terræ superficiem regionibus, sunt reciproce ut distantiæ locorum a centro; & propterea, ex hypothesi quod terra sphærois sit, dantur proportione.

Unde tale consit theorema, quod incrementum ponderis pergendo ab æquatore ad polos, sit quam proxime ut sinus versus latitudinis duplicatæ, vel quod perinde est, ut quadratum sinus recti latitudinis. Et in eadem circiter ratione augentur arcus graduum latitudinis in meridiano. Ideoque cum latitudo *Lutetiæ Parisiorum* sit 48 gr. 50′, ea locorum sub æquatore 00 gr. 00′, & ea locorum ad polos 90 gr. & duplorum sinus versi sint 11334, 00000 & 20000, existente radio 10000, & gravitas ad polum sit ad gravitatem sub æquatore ut 230 ad 229, & excessus gravitatis ad polum ad gravitatem sub æquatore ut 1 ad 229: erit excessus gravitatis in latitudine *Lutetiæ* ad gravitatem sub æquatore, ut $1 \times \frac{11334}{20000}$ ad 229, seu 5667 ad 2290000. Et propterea gravitates totæ in his locis erunt ad invicem ut 2295667 ad 2290000. Quare cum longitudines pendulorum æqualibus temporibus oscillantium sint ut gravitates, & in latitudine *Lutetiæ Parisiorum* longitudo penduli singulis minutis secundis oscillantis sit pedum trium Parisiensium & linearum $8\frac{1}{2}$, vel potius ob pondus aëris $8\frac{5}{9}$: longitudo penduli sub æquatore superabitur a longitudine synchroni penduli Parisiensis, excessu lineæ unius & 87 partium millesimarum lineæ. Et simili computo consit tabula sequens.

De Mundi Systemate

Latitudo loci.	*Longitudo penduli.*		*Menſura gradus unius in meridiano.*
grad.	*ped.*	*lin.*	*hexapedæ.*
0	3	7,468	56637
5	3	7,482	56642
10	3	7,526	56659
15	3	7,596	56687
20	3	7,692	56724
25	3	7,812	56769
30	3	7,948	56823
35	3	8,099	56882
40	3	8,261	56945
1	3	8,294	56958
2	3	8,327	56971
3	3	8,361	56984
4	3	8,394	56997
45	3	8,428	57010
6	3	8,461	57022
7	3	8,494	57035
8	3	8,528	57048
9	3	8,561	57061
50	3	8,594	57074
55	3	8,756	57137
60	3	8,907	57196
65	3	9,044	57250
70	3	9,162	57295
75	3	9,258	57332
80	3	9,329	57360
85	3	9,372	57377
90	3	9,387	57382

Conſtat autem per hanc tabulam quod graduum inæqualitas tam parva ſit, ut in rebus geographicis figura terræ pro ſphærica haberi poſſit: præſertim ſi terra paulo denſior ſit verſus planum æquatoris quam verſus polos.

Jam vero aſtronomi aliqui in longinquas regiones ad obſervationes aſtronomicas faciendas miſſi, obſervarunt quod horologia oſcillatoria tardius moverentur prope æquatorem quam in regionibus noſtris. Et primo quidem D. *Richer* hoc obſervavit anno 1672 in inſula *Cayennæ*. Nam dum obſervaret tranſitum fixarum per meridianum menſe

mense *Augusto*, reperit horologium suum tardius moveri quam pro medio motu solis, existente differentia 2′. 28″ singulis diebus. Deinde faciendo ut pendulum simplex ad minuta singula secunda per horologium optimum mensurata oscillaret, notavit longitudinem penduli simplicis, & hoc fecit sæpius singulis septimanis per menses decem. Tum in *Galliam* redux contulit longitudinem hujus penduli cum longitudine penduli Parisiensis (quæ erat trium pedum Parisiensium, & octo linearum cum tribus quintis partibus lineæ) & reperit breviorem esse, existente differentia lineæ unius cum quadrante.

Postea *Halleius* noster circa annum 1677 ad insulam *Sanctæ Hellenæ* navigans, reperit horologium suum oscillatorium ibi tardius moveri quam *Londini*, sed differentiam non notavit. Pendulum vero brevius reddidit plusquam octava parte digiti, seu linea una cum semisse. Et ad hoc efficiendum, cum longitudo cochleæ in ima parte penduli non sufficeret, annulum ligneum thecæ cochleæ & ponderi pendulo interposuit.

Deinde anno 1682 D. *Varin* & D. *Des Hayes* invenerunt longitudinem penduli singulis minutis secundis oscillantis in observatorio regio Parisiensi esse ped. 3. lin. $8\frac{5}{9}$. Et in insula *Gorea* eadem methodo longitudinem penduli synchroni invenerunt esse ped. 3. lin. $6\frac{5}{9}$, existente longitudinum differentia lin. 2. Et eodem anno ad insulas *Guadaloupam* & *Martinicam* navigantes, invenerunt longitudinem penduli synchroni in his insulis esse ped. 3. lin. $6\frac{1}{2}$.

Posthac D. *Couplet* filius anno 1697 mense *Julio*, horologium suum oscillatorium ad motum solis medium in observatorio regio Parisiensi sic aptavit, ut tempore satis longo horologium cum motu solis congrueret. Deinde *Ulyssipponem* navigans invenit quod mense *Novembri* proximo horologium tardius iret quam prius, existente differentia 2′. 13″ in horis 24. Et mense *Martio* sequente *Paraibam* navigans invenit ibi horologium suum tardius ire quam *Parisiis*, existente differentia 4′. 12″ in horis 24. Et affirmat pendulum ad minuta secunda oscillans brevius fuisse *Ulyssipponi* lineis $2\frac{1}{2}$ & *Paraibæ* lineis $3\frac{2}{3}$ quam *Parisiis*. Rectius posuisset differentias esse $1\frac{1}{3}$ & $2\frac{5}{9}$. Nam hæ differentiæ differentiis temporum 2′. 13″, & 4′. 12″ respondent. Crassioribus hujus observationibus minus fidendum est.

 Annis

Annis proximis (1699 & 1700) D. *Des Hayes* ad *Americam* denuo navigans, determinavit quod in insulis *Cayennæ* & *Granadæ* longitudo penduli ad minuta secunda oscillantis, esset paulo minor quam ped. 3. lin. $6\frac{1}{2}$, quodque in insula *S. Christophori* longitudo illa esset ped. 3. lin. $6\frac{3}{4}$, & quod in insula *S. Dominici* eadem esset ped. 3. lin. 7.

Annoque 1704. *P. Feuelleus* invenit in *Porto-belo* in *America* longitudinem penduli ad minuta secunda oscillantis, esse pedum trium Parisiensium & linearum tantum $5\frac{7}{12}$, id est, tribus fere lineis breviorem quam *Lutetiæ Parisiorum*, sed errante observatione. Nam deinde ad insulam *Martinicam* navigans, invenit longitudinem penduli isochroni esse pedum tantum trium Parisiensium & linearum $5\frac{10}{12}$.

Latitudo autem *Paraibæ* est 6gr. 38′ ad austrum, & ea *Porto beli* 9gr. 33′ ad boream, & latitudines insularum *Cayennæ*, *Goreæ*, *Guadaloupæ*, *Martinicæ*, *Granadæ*, *Sancti Christophori*, & *Sancti Dominici* sunt respective 4gr. 55′, 14gr. 40′, 14gr. 00′, 14gr. 44′, 12gr. 6′, 17gr. 19′, & 19gr. 48′ ad boream. Et excessus longitudinis penduli Parisiensis supra longitudines pendulorum isochronorum in his latitudinibus observatas sunt paulo majores quam pro tabula longitudinum penduli superius computata. Et propterea terra aliquanto altior est sub æquatore quam pro superiore calculo, & densior ad centrum quam in fodinis prope superficiem, nisi forte calores in zona torrida longitudinem pendulorum aliquantulum auxerint.

Observavit utique D. *Picartus* quod virga ferrea, quæ tempore hyberno ubi gelabant frigora erat pedis unius longitudine, ad ignem calefacta evasit pedis unius cum quarta parte lineæ. Deinde D. *de la Hire* observavit quod virga ferrea quæ tempore consimili hyberno sex erat pedum longitudinis, ubi soli æstivo exponebatur evasit sex pedum longitudinis cum duabus tertiis partibus lineæ. In priore casu calor major fuit quam in posteriore, in hoc vero major fuit quam calor externarum partium corporis humani. Nam metalla ad solem æstivum valde incalescunt. At virga penduli in horologio oscillatorio nunquam exponi solet calori solis æstivi, nunquam calorem concipit calori externæ superficiei corporis humani æqualem. Et propterea virga penduli in horologio tres pedes longa, paulo quidem longior erit tempore æstivo quam hyberno, sed excessu quartam

quartam partem lineæ unius vix ſuperante. Proinde differentia tota longitudinis pendulorum quæ in diverſis regionibus iſochrona ſunt, diverſo calori attribui non poteſt. Sed neque erroribus aſtronomorum e *Gallia* miſſorum tribuenda eſt hæc differentia. Nam quamvis eorum obſervationes non perfecte congruant inter ſe, tamen errores ſunt adeo parvi ut contemni poſſint. Et in hoc concordant omnes, quod iſochrona pendula ſunt breviora ſub æquatore quam in obſervatorio regio Pariſienſi, exiſtente differentia non minore quam lineæ unius cum quadrante, non majore quam linearum $2\frac{2}{3}$. Per obſervationes D. *Richeri* in *Cayenna* factas differentia fuit lineæ unius cum quadrante. Per eas D. *Des Hayes* differentia illa correcta prodiit lineæ unius cum ſemiſſe vel unius cum tribus quartis partibus lineæ. Per eas aliorum minus accuratas prodiit eadem quaſi duarum linearum. Et hæc diſcrepantia partim ab erroribus obſervationum, partim a diſſimilitudine partium internarum terræ & altitudine montium, & partim a diverſis aëris caloribus, oriri potuit.

Virga ferrea pedes tres longa, tempore hyberno in *Anglia*, brevior eſt quam tempore æſtivo, ſexta parte lineæ unius, quantum ſentio. Ob calores ſub æquatore auferatur hæc quantitas de differentia lineæ unius cum quadrante a *Richero* obſervata, & manebit linea $1\frac{1}{12}$: quæ cum linea $1\frac{87}{1000}$ per theoriam jam ante collecta probe congruit. *Richerus* autem obſervationes in *Cayenna* factas, ſingulis ſeptimanis per menſes decem iteravit, & longitudines penduli in virga ferrea ibi notatas cum longitudinibus ejus in *Gallia* ſimiliter notatis contulit. Quæ diligentia & cautela in aliis obſervatoribus defuiſſe videtur. Si hujus obſervationibus fidendum eſt, terra altior erit ad æquatorem quam ad polos exceſſu milliarium ſeptendecim circiter, ut ſupra per theoriam prodiit.

PROPO-

PROPOSITIO XXI. THEOREMA XVII.

Puncta æquinoctialia regredi, & axem terræ singulis revolutionibus annuis nutando bis inclinari in eclipticam & bis redire ad positionem priorem.

Patet per corol. 20. prop. LXVI. lib. I. Motus tamen iste nutandi perexiguus esset debet, & vix aut ne vix quidem sensibilis.

PROPOSITIO XXII. THEOREMA XVIII.

Motus omnes lunares, omnesque motuum inæqualitates ex allatis principiis consequi.

Planetas majores, interea dum circa solem feruntur, posse alios minores circum se revolventes planetas deferre, & minores illos in ellipsibus, umbilicos in centris majorum habentibus, revolvi debere patet per prop. LXV. lib. I. Actione autem solis perturbabuntur eorum motus multimode, iisque adficientur inæqualitatibus quæ in luna nostra notantur. Hæc utique (per corol. 2, 3, 4, & 5. prop. LXVI.) velocius movetur, ac radio ad terram ducto describit aream pro tempore majorem, orbemque habet minus curvum, atque ideo propius accedit ad terram, in syzygiis quam in quadraturis, nisi quatenus impedit motus eccentricitatis. Eccentricitas enim maxima est (per corol. 9. prop. LXVI.) ubi apogæum lunæ in syzygiis versatur, & minima ubi idem in quadraturis consistit; & inde luna in perigæo velocior est & nobis propior, in apogæo autem tardior & remotior in syzygiis quam in quadraturis. Progreditur insuper apogæum, & regrediuntur nodi, sed motu inæquabili. Et apogæum quidem (per corol. 7. & 8. prop. LXVI.) velocius progreditur in syzygiis suis, tardius regreditur in quadraturis, & excessu progressus supra regressum annuatim fertur in consequentia. Nodi autem (per corol. 2. prop. LXVI.) quiescunt in syzygiis suis & velocissime regrediuntur in quadraturis. Sed & major est lunæ latitudo maxima in ipsius quadraturis (per corol. 10. prop. LXVI.) quam in syzygiis: & motus medius tardior in perihelio terræ (per corol. 6. prop. LXVI.) quam in ipsius aphelio. Atque hæ sunt inæqualitates insigniores ab astronomis notatæ.

Sunt etiam aliæ quædam a prioribus aſtronomis non obſervatæ inæqualitates, quibus motus lunares adeo perturbantur, ut nulla hactenus lege ad regulam aliquam certam reduci potuerint. Velocitates enim ſeu motus horarii apogæi & nodorum lunæ, & eorundem æquationes, ut & differentia inter eccentricitatem maximam in ſyzygiis & minimam in quadraturis, & inæqualitas quæ variatio dicitur, augentur ac diminuuntur annuatim (per corol. 14. prop. LXVI.) in triplicata ratione diametri apparentis ſolaris. Et variatio præterea augetur vel diminuitur in duplicata ratione temporis inter quadraturas quam proxime (per corol. 1, & 2. lem. X. & corol. 16. prop. LXVI. lib. I.) ſed hæc inæqualitas in calculo aſtronomico ad proſthaphæreſin lunæ referri ſolet, & cum ea confundi.

PROPOSITIO XXIII. PROBLEMA V.

Motus inæquales ſatellitum jovis & ſaturni a motibus lunaribus derivare.

Ex motibus lunæ noſtræ motus analogi lunarum ſeu ſatellitum jovis ſic derivantur. Motus medius nodorum ſatellitis extimi jovialis, eſt ad motum medium nodorum lunæ noſtræ, in ratione compoſita ex ratione duplicata temporis periodici terræ circa ſolem ad tempus periodicum jovis circa ſolem, & ratione ſimplici temporis periodici ſatellitis circa jovem ad tempus periodicum lunæ circa terram (per corol. 16. prop. LXVI. lib. I.) ideoque annis centum conficit nodus iſte 8 gr. 24′. in antecedentia. Motus medii nodorum ſatellitum interiorum ſunt ad motum hujus, ut illorum tempora periodica ad tempus periodicum hujus (per idem corollarium) & inde dantur. Motus autem augis ſatellitis cujuſque in conſequentia eſt ad motum nodorum ipſius in antecedentia, ut motus apogæi lunæ noſtræ ad hujus motum nodorum, (per idem corol.) & inde datur. Diminui tamen debet motus augis ſic inventus in ratione 5 ad 9 vel 1 ad 2 circiter, ob cauſam quam hic exponere non vacat. Æquationes maximæ nodorum & augis ſatellitis cujuſque fere ſunt ad æquationes maximas nodorum & augis lunæ reſpective, ut motus nodorum & augis ſatellitum tempore unius revolutionis æquationum priorum, ad motus nodorum & apogæi lunæ tempore unius revolutionis æquationum

De Mundi Systemate

tionum posteriorum. Variatio satellitis e jove spectati, est ad variationem lunæ, ut sunt ad invicem toti motus nodorum temporibus quibus satelles & luna ad solem revolvuntur, per idem corollarium; ideoque in satellite extimo non superat 5″. 12‴.

PROPOSITIO XXIV. THEOREMA XIX.

Fluxum & refluxum maris ab actionibus solis ac lunæ oriri.

Mare singulis diebus tam lunaribus quam solaribus bis intumescere debere ac bis defluere, patet per corol. 19. & 20. prop. LXVI. lib. I. ut & aquæ maximam altitudinem, in maribus profundis & liberis, appulsum luminarium ad meridianum loci minori quam sex horarum spatio sequi, uti fit in maris *Atlantici* & *Æthiopici* tractu toto orientali inter *Galliam* & promontorium *Bonæ Spei* ut & in maris *Pacifici* littore *Chilensi* & *Peruviano:* in quibus omnibus littoribus æstus in horam circiter secundam, tertiam vel quartam, incidit, nisi ubi motus ab oceano profundo per loca vadosa propagatus usque ad horam quintam sextam septimam aut ultra retardatur. Horas numero ab appulsu luminaris utriusque ad meridianum loci, tam infra horizontem quam supra, & per horas diei lunaris intelligo vigesimas quartas partes temporis quo luna motu apparente diurno ad meridianum loci revertitur. Vis solis vel lunæ ad mare elevandum maxima est in ipso appulsu luminaris ad meridianum loci. Sed vis eo tempore in mare impressa manet aliquamdiu & per vim novam subinde impressam augetur, donec mare ad altitudinem maximam ascenderit, id quod fiet spatio horæ unius duarumve sed sæpius ad littora spatio horarum trium circiter, vel etiam plurium si mare sit vadosum.

Motus autem bini, quos luminaria duo excitant, non cernentur distincte, sed motum quendam mixtum efficient. In luminarium conjunctione vel oppositione conjungentur eorum effectus, & componetur fluxus & refluxus maximus. In quadraturis sol attollet aquam ubi luna deprimit, deprimetque ubi luna attollit; & ex effectuum differentia æstus omnium minimus orietur. Et quoniam, experientia teste, major est effectus lunæ quam solis, incidet aquæ maxima altitudo in horam tertiam lunarem circiter. Extra syzygias & quadraturas, æstus maximus qui sola vi lunari incidere semper deberet in horam tertiam lunarem, & sola solari in tertiam solarem,

com-

compoſitis viribus incidet in tempus aliquod intermedium quod tertiæ lunari propinquius eſt; ideoque in tranſitu lunæ a ſyzygiis ad quadraturas, ubi hora tertia ſolaris præcedit tertiam lunarem, maxima aquæ altitudo præcedet etiam tertiam lunarem, idque maximo intervallo paulo poſt octantes lunæ; & paribus intervallis æſtus maximus ſequetur horam tertiam lunarem in tranſitu lunæ a quadraturis ad ſyzygias. Hæc ita ſunt in mari aperto. Nam in oſtiis fluviorum fluxus majores cæteris paribus tardius ad ἀκμὴν venient.

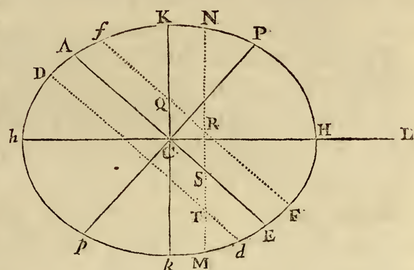
Pendent autem effectus luminarium ex eorum diſtantiis a terra. In minoribus enim diſtantiis majores ſunt eorum effectus, in majoribus minores, idque in triplicata ratione diametrorum apparentium. Igitur ſol tempore hyberno, in perigæo exiſtens, majores edit effectus, efficitque ut æſtus in ſyzygiis paulo majores ſint, & in quadraturis paulo minores (cæteris paribus) quam tempore æſtivo; & luna in perigæo ſingulis menſibus majores ciet æſtus quam ante vel poſt dies quindecim, ubi in apogæo verſatur. Unde fit ut æſtus duo omnino maximi in ſyzygiis continuis ſe mutuo non ſequantur.

Pendet etiam effectus utriuſque luminaris ex ipſius declinatione ſeu diſtantia ab æquatore. Nam ſi luminare in polo conſtitueretur, traheret illud ſingulas aquæ partes conſtanter, ſine actionis intenſione & remiſſione, ideoque nullam motus reciprocationem cieret. Igitur luminaria recedendo ab æquatore polum verſus, effectus ſuos gradatim amittent, & propterea minores ciebunt æſtus in ſyzygiis ſolſtitialibus quam in æquinoctialibus. In quadraturis autem ſolſtitialibus majores ciebunt æſtus quam in quadraturis æquinoctialibus; eo quod lunæ jam in æquatore conſtitutæ effectus maxime ſuperat effectum ſolis. Incidunt igitur æſtus maximi in ſyzygias & minimi in quadraturas luminarium, circa tempora æquinoctii utriuſque. Et æſtum maximum in ſyzygiis comitatur ſemper minimus in quadraturis, ut experientia compertum eſt. Per minorem autem diſtantiam ſolis a terra, tempore hyberno quam tempore æſtivo, fit ut æſtus maximi & minimi ſæpius præcedant æquinoctium vernum quam ſequantur, & ſæpius ſequantur autumnale quam præcedant.

Pendent etiam effectus luminarium ex locorum latitudine. Deſignet *ApEP* tellurem aquis profundis undique coopertam; *C* centrum ejus; *P*, *p* polos; *AE* æquatorem; *F* locum quemvis extra æquatorem; *Ff* parallelum loci; *Dd* parallelum ei reſpondentem ex al-

De Mundi Systemate

tera parte æquatoris; *L* locum quem luna tribus ante horis occupabat; *H* locum telluris ei perpendiculariter subjectum; *h* locum huic oppositum; *K*, *k* loca inde gradibus 90 distantia, *CH*, *Ch* maris altitudines maximas mensuratas a centro telluris; & *CK*, *Ck* altitudines minimas: & si axibus *Hh*, *Kk* describatur ellipsis, deinde ellipseos hujus revolutione circa axem majorem *Hh* describatur sphærois *HPKhpk*; designabit hæc figuram maris quam proxime, & erunt *CF*, *Cf*, *CD*, *Cd* altitudines maris in locis *F*, *f*, *D*, *d*. Quinetiam si in præfata ellipseos revolutione punctum quodvis *N* describat circulum *NM*, secantem parallelos *Ff*, *Dd* in locis quibusvis *R*, *T*, & æquatorem *AE* in *S*; erit *CN* altitudo maris in locis omnibus *R*, *S*, *T*, sitis in hoc circulo. Hinc in revolutione diurna loci cujusvis *F*, affluxus erit maximus in *F*, hora tertia post appulsum lunæ ad meridianum supra horizontem; postea defluxus maximus in *Q* hora tertia post occasum lunæ; dein affluxus maximus in *f* hora tertia post appulsum lunæ ad meridianum infra horizontem; ultimo defluxus maximus in *Q* hora tertia post ortum lunæ; & affluxus posterior in *f* erit minor quam affluxus prior in *F*. Distinguitur enim mare totum in duos omnino fluctus hemisphæricos, unum in hemisphærio *KHk* ad boream vergentem, alterum in hemisphærio opposito *Khk*; quos igitur fluctum borealem & fluctum australem nominare licet. Hi fluctus semper sibi mutuo oppositi veniunt per vices ad meridianos locorum singulorum, interposito intervallo horarum lunarium duodecim. Cumque regiones boreales magis participant fluctum borealem, & australes magis australem, inde oriuntur æstus alternis vicibus majores & minores, in locis singulis extra æquatorem, in quibus luminaria oriuntur & occidunt. Æstus autem major, luna in verticem loci declinante, incidet in horam circiter tertiam post appulsum lunæ ad meridianum supra horizontem, & luna declinationem mutante vertetur in minorem. Et fluxuum differentia maxima incidet in tempora solstitiorum; præsertim si lunæ nodus ascendens versatur in principio arietis.



Sic

Sic experientia compertum eſt, quod æſtus matutini tempore hyberno ſuperent veſpertinos & verſpertini tempore æſtivo matutinos, ad *Plymuthum* quidem altitudine quaſi pedis unius, ad *Briſtoliam* vero altitudine quindecim digitorum: obſervantibus *Colepreſſio* & *Sturmio*. Liber Tertius.

Motus autem hactenus deſcripti mutantur aliquantulum per vim illam reciprocationis aquarum, qua maris æſtus, etiam ceſſantibus u minarium actionibus, poſſet aliquamdiu perſeverare. Conſervatio hæcce motus impreſſi minuit differentiam æſtuum alternorum; & æſtus proxime poſt ſyzygias majores reddit, eoſque proxime poſt quadraturas minuit. Unde ſit ut æſtus alterni ad *Plymuthum* & *Briſtoliam* non multo magis differant ab invicem quam altitudine pedis unius vel digitorum quindecim; utque æſtus omnium maximi in iiſdem portubus, non ſint primi a ſyzygiis, ſed tertii. Retardantur etiam motus omnes in tranſitu per vada, adeo ut æſtus omnium maximi, in fretis quibuſdam & fluviorum oſtiis, ſint quarti vel etiam quinti a ſyzygiis.

Porro fieri poteſt ut æſtus propagetur ab oceano per freta diverſa ad eundem portum, & citius tranſeat per aliqua freta quam per alia: quo in caſu æſtus idem, in duos vel plures ſucceſſive advenientes diviſus, componere poſſit motus novos diverſorum generum. Fingamus æſtus duos æquales a diverſis locis in eundem portum venire, quorum prior præcedat alterum ſpatio horarum ſex, incidatque in horam tertiam ab appulſu lunæ ad meridianum portus. Si luna in hocce ſuo ad meridianum appulſu verſabatur in æquatore, venient ſingulis horis ſenis æquales affluxus, qui in mutuos refluxus incidendo eoſdem affluxibus æquabunt, & ſic ſpatio diei illius efficient ut aqua tranquille ſtagnet. Si luna tunc declinabat ab æquatore, fient æſtus in oceano vicibus alternis majores & minores, uti dictum eſt; & inde propagabuntur in hunc portum affluxus bini majores & bini minores, vicibus alternis. Affluxus autem bini majores component aquam altiſſimam in medio inter utrumque, affluxus major & minor faciet ut aqua aſcendat ad mediocrem altitudinem in medio ipſorum, & inter affluxus binos minores aqua aſcendet ad altitudinem minimam. Sic ſpatio viginti quatuor horarum, aqua non bis ut fieri ſolet, ſed ſemel tantum perveniet ad maximam altitudinem & ſemel ad minimam; & altitudo maxima, ſi luna declinat in

De Mundi Systemate

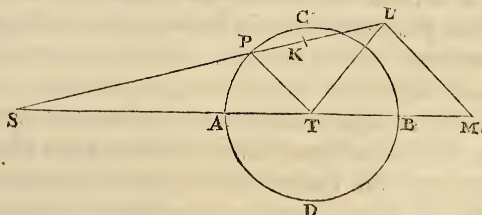
polum supra horizontem loci, incidet in horam vel sextam vel tricesimam ab appulsu lunæ ad meridianum, atque luna declinationem mutante mutabitur in defluxum. Quorum omnium exemplum in portu regni *Tunquini* ad *Batsham* sub latitudine boreali 20 gr. 50′. *Halleius* ex nautarum observationibus patefecit. Ibi aqua die transitum lunæ per æquatorem sequente stagnat, dein luna ad boream declinante incipit fluere & refluere, non bis, ut in aliis portubus, sed semel singulis diebus; & æstus incidit in occasum lunæ, defluxus maximus in ortum. Cum lunæ declinatione augetur hic æstus, usque ad diem septimum vel octavum, dein per alios septem dies iisdem gradibus decrescit, quibus antea creverat; & luna declinationem mutante cessat, ac mox mutatur in defluxum. Incidit enim subinde defluxus in occasum lunæ & affluxus in ortum, donec luna iterum mutet declinationem. Aditus ad hunc portum fretaque vicina duplex patet, alter ab oceano *Sinensi* inter continentem & insulam *Luconiam*, alter a mari *Indico* inter continentem & insulam *Borneo*. An æstus spatio horarum duodecim a mari *Indico*, & spatio horarum sex a mari *Sinensi* per freta illa venientes, & sic in horam tertiam & nonam lunarem incidentes, componant hujusmodi motus; sitne alia marium illorum conditio, observationibus vicinorum littorum determinandum relinquo.

Hactenus causas motuum lunæ & marium reddidi. De quantitate motuum jam convenit aliqua subjungere.

PROPOSITIO XXV. PROBLEMA VI.

Invenire vires solis ad perturbandos motus lunæ.

Designet S solem, T terram, P lunam, $CADB$ orbem lunæ. In



SP capiatur SK æqualis ST; sitque SL ad SK in duplicata ratione

SK ad *SP*, & ipsi *PT* agatur parallela *LM*; & si gravitas acceleratrix terræ in solem exponatur per distantiam *ST* vel *SK*, erit *SL* gravitas acceleratrix lunæ in solem. Ea componitur ex partibus *SM*, *LM*, quarum *LM* & ipsius *SM* pars *TM* perturbat motum lunæ, ut in libri primi prop. LXVI. & ejus corollariis expositum est. Quatenus terra & luna circum commune gravitatis centrum revolvuntur, perturbabitur etiam motus terræ circa centrum illud a viribus consimilibus; sed summas tam virium quam motuum referre licet ad lunam, & summas virium per lineas ipsis analogas *TM* & *ML* designare. Vis *ML* in mediocri sua quantitate est ad vim centripetam, qua luna in orbe suo circa terram quiescentem ad distantiam *PT* revolvi posset, in duplicata ratione temporum periodicorum lunæ circa terram & terræ circa solem (per corol. 17. prop. LXVI. lib. 1.) hoc est, in duplicata ratione dierum 27. hor. 7. min. 43. ad dies 365. hor. 6. min. 9. id est, ut 1000 ad 178725, seu 1 ad $178\frac{29}{40}$. Invenimus autem in propositione quarta quod, si terra & luna circa commune gravitatis centrum revolvantur, earum distantia mediocris ab invicem erit $60\frac{1}{2}$ semidiametrorum mediocrium terræ quamproxime. Et vis qua luna in orbe circa terram quiescentem, ad distantiam *PT* semidiametrorum terrestrium $60\frac{1}{2}$ revolvi posset, est ad vim, qua eodem tempore ad distantiam semidiametrorum 60 revolvi posset, ut $60\frac{1}{2}$ ad 60; & hæc vis ad vim gravitatis apud nos ut 1 ad 60×60 quamproxime. Ideoque vis mediocris *ML* est ad vim gravitatis in superficie terræ, ut $1 \times 60\frac{1}{2}$ ad $60 \times 60 \times 60 \times 178\frac{29}{40}$, seu 1 ad 638092,6. Inde vero & ex proportione linearum *TM*, *ML*, datur etiam vis *TM*: & hæ sunt vires solis quibus lunæ motus perturbantur. *Q. E. I.*

PROPOSITIO XXVI. PROBLEMA VII.

Invenire incrementum horarium areæ quam luna, radio ad terram ducto, in orbe circulari describit.

Diximus aream, quam luna radio ad terram ducto describit, esse tempori proportionalem, nisi quatenus motus lunaris ab actione solis turbatur. Inæqualitatem momenti, vel incrementi horarii hic investigandam proponimus. Ut computatio facilior reddatur, fingamus orbem lunæ circularem esse, & inæqualitates omnes negligamus, eas

sola

ſola excepta, de qua hic agitur. Ob ingentem vero ſolis diſtantiam, ponamus etiam lineas SP, ST ſibi invicem parallelas eſſe. Hoc pacto vis LM reducetur ſemper ad mediocrem ſuam quantitatem TP, ut & vis TM ad mediocrem ſuam quantitatem $3PK$. Hæ vires (per legum corol. 2.) componunt vim TL; & hæc vis, ſi in radium TP demittatur perpendiculum LE, reſolvitur in vires TE; EL, quarum TE, agendo ſemper ſecundum radium TP, nec accelerat nec retardat deſcriptionem areæ TPC radio illo TP factam; & EL agendo ſecundum perpendiculum, accelerat vel retardat ipſam, quantum accelerat vel retardat lunam. Acceleratio illa lunæ, in tranſitu ipſius a quadratura C ad conjunctionem A, ſingulis temporis momentis facta, eſt ut ipſa vis accelerans EL, hoc eſt, ut $\frac{3PK \times TK}{TP}$. Exponatur tempus per motum medium lunarem, vel (quod eodem fere recidit) per angulum CTP, vel etiam per arcum CP. Ad CT erigatur normalis CG ipſi CT æqualis. Et diviſo arcu quadrantali AC in particulas innumeras æquales Pp, &c. per quas æquales totidem particulæ temporis exponi poſſint, ductaque pk perpendiculari ad CT, jungatur TG ipſis KP, kp productis occurrens in F & f; & erit FK æqualis TK, & Kk erit ad PK ut Pp ad Tp, hoc eſt in data ratione, ideoque $FK \times Kk$ ſeu area $FKkf$, erit

ut

ut $\frac{3PK \times TK}{TP}$, id est, ut EL; & composite, area tota $GCKF$ ut summa omnium virium EL tempore toto CP impressarum in lunam, atque ideo etiam ut velocitas hac summa genita, id est, ut acceleratio descriptionis areæ CTP, seu incrementum momenti. Vis qua luna circa terram quiescentem ad distantiam TP, tempore suo periodico $CADB$ dierum 27. hor. 7. min. 43. revolvi posset, efficeret ut corpus, tempore CT cadendo, describeret longitudinem $\frac{1}{2}CT$, & velocitatem simul acquireret æqualem velocitati, qua luna in orbe suo movetur. Patet hoc per corol. 9. prop. IV. lib. I. Cum autem perpendiculum Kd in TP demissum sit ipsius EL pars tertia, & ipsius TP seu ML in octantibus pars dimidia, vis EL in octantibus, ubi maxima est, superabit vim ML in ratione 3 ad 2, ideoque erit ad vim illam, qua luna tempore suo periodico circa terram quiescentem revolvi posset, ut 100 ad $\frac{2}{3} \times 17872\frac{1}{2}$ seu 11915, & tempore CT velocitatem generare deberet quæ esset pars $\frac{100}{11915}$ velocitatis lunaris, tempore autem CPA velocitatem majorem generaret in ratione CA ad CT seu TP. Exponatur vis maxima EL in octantibus per aream $FK \times Kk$ rectangulo $\frac{1}{2}TP \times Pp$ æqualem. Et velocitas, quam vis maxima tempore quovis CP generare posset, erit ad velocitatem quam vis omnis minor EL eodem tempore generat, ut rectangulum $\frac{1}{2}TP \times CP$ ad aream $KCGF$: tempore autem toto CPA, velocitates genitæ erunt ad invicem ut rectangulum $\frac{1}{2}TP \times CA$ & triangulum TCG, sive ut arcus quadrantalis CA & radius TP. Ideoque (per prop. IX. lib. V. elem.) velocitas posterior, toto tempore genita, erit pars $\frac{100}{11915}$ velocitatis lunæ. Huic lunæ velocitati, quæ areæ momento mediocri analoga est, addatur & auferatur dimidium velocitatis alterius; & si momentum mediocre exponatur per numerum 11915, summa 11915+50 seu 11965 exhibebit momentum maximum areæ in syzygia A, ac differentia 11915−50 seu 11865 ejusdem momentum minimum in quadraturis. Igitur areæ temporibus æqualibus in syzygiis & quadraturis descriptæ, sunt ad invicem ut 11965 ad 11865. Ad momentum minimum 11865 addatur momentum, quod sit ad momentorum differentiam 100 ut trapezium $FKCG$ ad triangulum TCG (vel quod perinde est, ut quadratum sinus PK ad quadratum radii TP, id est, ut Pd ad TP) & summa exhibebit momentum areæ, ubi luna est in loco quovis intermedio P.

Hæc

Hæc omnia ita se habent, ex hypothesi quod sol & terra quiescunt, & luna tempore synodico dierum 27. hor. 7. min. 43. revolvitur. Cum autem periodus synodica lunaris vere sit dierum 29. hor. 12. & min. 44, augeri debent momentorum incrementa in ratione temporis, id est, in ratione 1080853 ad 1000000. Hoc pacto incrementum totum, quod erat pars $\frac{100}{11525}$ momenti mediocris, jam fiet ejusdem pars $\frac{100}{11023}$. Ideoque momentum areæ in quadratura lunæ erit ad ejus momentum in syzygia ut 11023—50 ad 11023+50, seu 10973 ad 11073; & ad ejus momentum, ubi luna in alio quovis loco intermedio *P* versatur, ut 10973 ad 10973+*Pd*, existente videlicet *TP* æquali 100.

Area igitur, quam luna radio ad terram ducto singulis temporis particulis æqualibus describit, est quam proxime ut summa numeri 219,46 & sinus versi duplicatæ distantiæ lunæ a quadratura proxima, in circulo cujus radius est unitas. Hæc ita se habent ubi variatio in octantibus est magnitudinis mediocris. Sin variatio ibi major sit vel minor, augeri debet vel minui sinus ille versus in eadem ratione.

PROPOSITIO XXVII. PROBLEMA VIII.

Ex motu horario lunæ invenire ipsius distantiam a terra.

Area, quam luna radio ad terram ducto singulis temporis momentis describit, est ut motus horarius lunæ & quadratum distantiæ lunæ a terra conjunctim; & propterea distantia lunæ a terra est in ratione composita ex subduplicata ratione areæ directe & subduplicata ratione motus horarii inverse. *Q. E. I.*

Corol. 1. Hinc datur lunæ diameter apparens: quippe quæ sit reciproce ut ipsius distantia a terra. Tentent astronomi quam probe hæc regula cum phænomenis congruat.

Corol. 2. Hinc etiam orbis lunaris accuratius ex phænomenis quam antehac definiri potest.

PROPO-

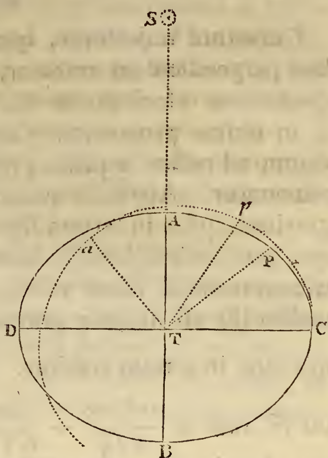
PROPOSITIO XXVIII. PROBLEMA IX.

Invenire diametros orbis in quo luna, sine eccentricitate, moveri deberet.

Curvatura trajectoriæ, quam mobile, si secundum trajectoriæ illius perpendiculum trahatur, describit, est ut attractio directe & quadratum velocitatis inverse. Curvaturas linearum pono esse inter se in ultima proportione sinuum vel tangentium angulorum contactuum ad radios æquales pertinentium, ubi radii illi in infinitum diminuuntur. Attractio autem lunæ in terram in syzygiis est excessus gravitatis ipsius in terram supra vim solarem $2PK$ (vide *fig. pag.* 428.) qua gravitas acceleratrix lunæ in solem superat gravitatem acceleratricem terræ in solem vel ab ea superatur. In quadraturis autem attractio illa est summa gravitatis lunæ in terram & vis solaris KT, qua luna in terram trahitur. Et hæ attractiones, si $\frac{AT+CT}{2}$ dicatur N, sunt ut $\frac{178725}{ATq} - \frac{2000}{CT \times N}$ & $\frac{178725}{CTq} + \frac{1000}{AT \times N}$ quam proxime; seu ut $178725\, N \times CTq - 2000\, ATq \times CT$ & $178725\, N \times ATq + 1000\, CTq \times AT$. Nam si gravitas acceleratrix lunæ in terram exponatur per numerum 178725, vis mediocris ML, quæ in quadraturis est PT vel TK & lunam trahit in terram, erit 1000, & vis mediocris TM in syzygiis erit 3000; de qua, si vis mediocris ML subducatur, manebit vis 2000 qua luna in syzygiis distrahitur a terra, quamque jam ante nominavi $2PK$. Velocitas autem lunæ in syzygiis A & B est ad ipsius velocitatem in quadraturis C & D, ut CT ad AT & momentum areæ quam luna radio ad terram ducto describit in syzygiis ad momentum ejusdem areæ in quadraturis conjunctim, i. e. ut $11073\, CT$ ad $10973\, AT$. Sumatur hæc ratio bis inverse & ratio prior semel directe, & fiet curvatura orbis lunaris in syzygiis ad ejusdem curvaturam in quadraturis ut $120406729 \times 178725\, ATq \times CTq \times N - 120406729 \times 2000\, ATqq \times CT$ ad $122611329 \times 178725\, ATq \times CTq \times N + 122611329 \times 1000\, CTqq \times AT$, i. e. ut $2151969\, AT \times CT \times N - 24081\, AT\, cub.$ ad $2191371\, AT \times CT \times N + 12261\, CT\, cub.$

Quoniam figura orbis lunaris ignoratur, hujus vice assumamus ellipsin $DBCA$, in cujus centro T terra collocetur, & cujus axis major

jor *DC* quadraturis, minor *AB* ſyzygiis interjaceat. Cum autem planum ellipſeos hujus motu angulari circa terram revolvatur, & trajectoria cujus curvaturam conſideramus deſcribi debet in plano quod omni motu angulari omnino deſtituitur: conſideranda erit figura, quam luna in ellipſi illa revolvendo deſcribit in hoc plano, hoc eſt figura *Cpa*, cujus puncta ſingula *p* inveniuntur capiendo punctum quodvis *P* in ellipſi, quod locum lunæ repræſentet, & ducendo *Tp* æqualem *TP*, ea lege ut angulus *PTp* æqualis ſit motui apparenti ſolis a tempore quadraturæ *C* confecto; vel (quod eodem fere recidit) ut angulus *CTp* ſit ad angulum *CTP* ut tempus revolutionis ſynodicæ lunaris ad tempus revolutionis periodicæ ſeu $29^{d}. 12^{h}. 44'$, ad $27^{d}. 7^{h}. 43'$. Capiatur igitur angulus *CTa* in eadem ratione ad angulum rectum *CTA*, & ſit longitudo *Ta* æqualis longitudini *TA*; & erit *a* apſis ima & *C* apſis ſumma orbis hujus *Cpa*. Rationes autem ineundo invenio quod differentia inter curvaturam orbis *Cpa* in vertice *a*, & curvaturam circuli centro *T* intervallo *TA* deſcripti, ſit ad differentiam inter curvaturam ellipſeos in vertice *A* & curvaturam ejuſdem circuli, in duplicata ratione anguli *CTP* ad angulum *CTp*; & quod curvatura ellipſeos in *A* ſit ad curvaturam circuli illius, in duplicata ratione *TA* ad *TC*; & curvatura circuli illius ad curvaturam circuli centro *T* intervallo *TC* deſcripti, ut *TC* ad *TA*; hujus autem curvatura ad curvaturam ellipſeos in *C*, in duplicata ratione *TA* ad *TC*; & differentia inter curvaturam ellipſeos in vertice *C* & curvaturam circuli noviſſimi, ad differentiam inter curvaturam figuræ *Tpa* in vertice *C* & curvaturam ejuſdem circuli, in duplicata ratione anguli *CTp* ad angulum *CTP*. Quæ quidem rationes ex ſinubus angulorum contactus ac differentiarum angulorum facile colliguntur. His autem inter ſe collatis, prodit curvatura figuræ *Cpa* in *a* ad ipſius curvaturam in *C*, ut $AT\ cub. + \frac{16824}{100000} CTq \times AT$ ad $CT\ cub. + \frac{16824}{100000} ATq \times CT$. Ubi numerus



rus $\frac{16824}{100000}$ deſignat differentiam quadratorum angulorum *CTP* & *CTp* applicatam ad quadratum anguli minoris *CTP*, ſeu (quod perinde eſt) differentiam quadratorum temporum $27^d.\ 7^h.\ 43'$, & $29^d.\ 12^h.\ 44'$, applicatam ad quadratum temporis $27^d.\ 7^h.\ 43'$.

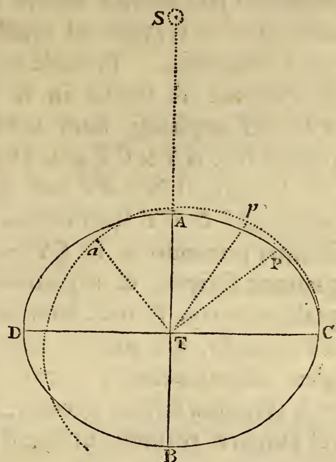
Igitur cum *a* deſignet ſyzygiam lunæ, & *C* ipſius quadraturam, proportio jam inventa eadem eſſe debet cum proportione curvaturæ orbis lunæ in ſyzygiis ad ejuſdem curvaturam in quadraturis, quam ſupra invenimus. Proinde ut inveniatur proportio *CT* ad *AT*, duco extrema & media in ſe invicem. Et termini prodeuntes ad $AT \times CT$ applicati, fiunt $2062,79\ CTqq - 2151969\ \mathrm{N} \times CT\ cub. + 368676\ \mathrm{N} \times AT \times CTq + 36342\ ATq \times CTq - 362047\ \mathrm{N} \times ATq \times CT + 2191371\ \mathrm{N} \times AT\ cub. + 4051,4\ ATqq = 0$. Hic pro terminorum *AT* & *CT* ſemiſumma N ſcribo 1, & pro eorundem ſemidifferentia ponendo x, fit $CT = 1 + x$, & $AT = 1 - x$: quibus in æquatione ſcriptis, & æquatione prodeunte reſoluta, obtinetur x æqualis 0,00719, & inde ſemidiameter *CT* fit 1,00719, & ſemidiameter *AT* 0,99281, qui numeri ſunt ut $70\frac{1}{24}$ & $69\frac{1}{24}$ quam proxime. Eſt igitur diſtantia lunæ a terra in ſyzygiis ad ipſius diſtantiam in quadraturis (ſepoſita ſcilicet eccentricitatis conſideratione) ut $69\frac{1}{24}$ ad $70\frac{1}{24}$, vel numeris rotundis ut 69 ad 70.

PROPOSITIO XXIX. PROBLEMA X.

Invenire variationem lunæ.

Oritur hæc inæqualitas partim ex forma elliptica orbis lunaris, partim ex inæqualitate momentorum areæ, quam luna radio ad terram ducto deſcribit. Si luna *P* in ellipſi *DBCA* circa terram in centro ellipſeos quieſcentem moveretur, & radio *TP* ad terram ducto deſcriberet aream *CTP* tempori proportionalem; eſſet autem ellipſeos ſemidiameter maxima *CT* ad ſemidiametrum minimam *TA* ut 70 ad 69: foret tangens anguli *CTP* ad tangentem anguli motus medii a quadratura *C* computati, ut ellipſeos ſemidiameter *TA* ad ejuſdem ſemidiametrum *TC* ſeu 69 ad 70. Debet autem deſcriptio areæ *CTP*, in progreſſu lunæ a quadratura ad ſyzygiam, ea ratione accelerari, ut ejus momentum in ſyzygia lunæ ſit ad ejus momentum in quadratura ut 11073 ad 10973, utque exceſſus momenti in loco quovis intermedio *P* ſupra momentum in quadratura ſit ut quadra-

tum ſinus anguli *CTP*. Id quod ſatis accurate fiet, ſi tangens anguli *CTP* diminuatur in ſubduplicata ratione numeri 10973 ad numerum 11073, id eſt, in ratione numeri 68,6877 ad numerum 69. Quo pacto tangens anguli *CTP* jam erit ad tangentem motus medii ut 68,6877 ad 70, & angulus *CTP* in octantibus, ubi motus medius eſt 45gr. invenietur 44gr. 27′. 28″. qui ſubductus de angulo motus medii 45gr. relinquit variationem maximam 32′. 32″. Hæc ita ſe haberent ſi luna, pergendo a quadratura ad ſyzygiam, deſcriberet angulum *CTA* graduum tantum nonaginta. Verum ob motum terræ, quo ſol in conſequentia motu apparente transfertur, luna, priuſquam ſolem aſſequitur, deſcribit angulum *CTa* angulo recto majorem in ratione temporis revolutionis lunaris ſynodicæ ad tempus revolutionis periodicæ, id eſt, in ratione 29d. 12h. 44′. ad 27d. 7h. 43′. Et hoc pacto anguli omnes circa centrum *T* dilatantur in eadem ratione, & variatio maxima quæ ſecus eſſet 32′. 32″, jam aucta in eadem ratione fit 35′. 10″.



Hæc eſt ejus magnitudo in mediocri diſtantia ſolis a terra, neglectis differentiis quæ a curvatura orbis magni majorique ſolis actione in lunam falcatam & novam quam in gibboſam & plenam, oriri poſſint. In aliis diſtantiis ſolis a terra, variatio maxima eſt in ratione quæ componitur ex duplicata ratione temporis revolutionis ſynodicæ lunaris (dato anni tempore) directe, & triplicata ratione diſtantiæ ſolis a terra inverſe. Ideoque in apogæo ſolis, variatio maxima eſt 33′. 14″, & in ejus perigæo 37′. 11″, ſi modo eccentricitas ſolis ſit ad orbis magni ſemidiametrum tranſverſam ut $16\frac{5}{16}$ ad 1000.

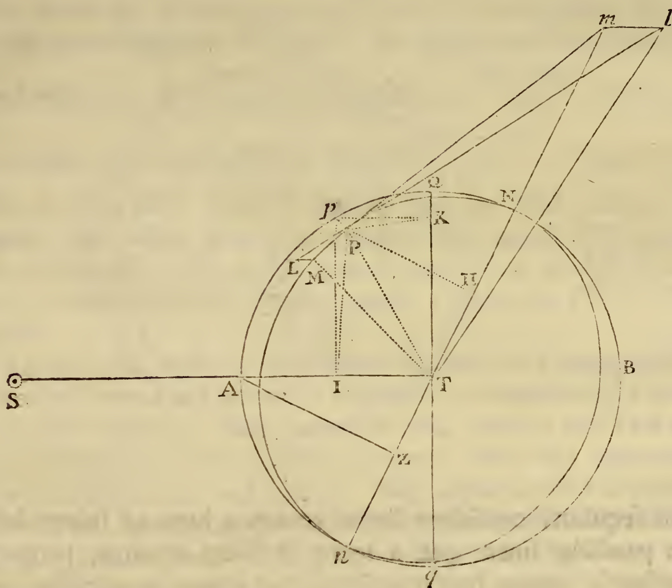
Hactenus variationem inveſtigavimus in orbe non eccentrico, in quo utique luna in octantibus ſuis ſemper eſt in mediocri ſua diſtantia a terra. Si luna propter eccentricitatem ſuam, magis vel minus diſtat a terra quam ſi locaretur in hoc orbe, variatio paulo major eſſe poteſt vel paulo minor quam pro regula hic allata: ſed exceſſum

cessum vel defectum ab astronomis per phænomena determinandum relinquo.

PROPOSITIO XXX. PROBLEMA XI.

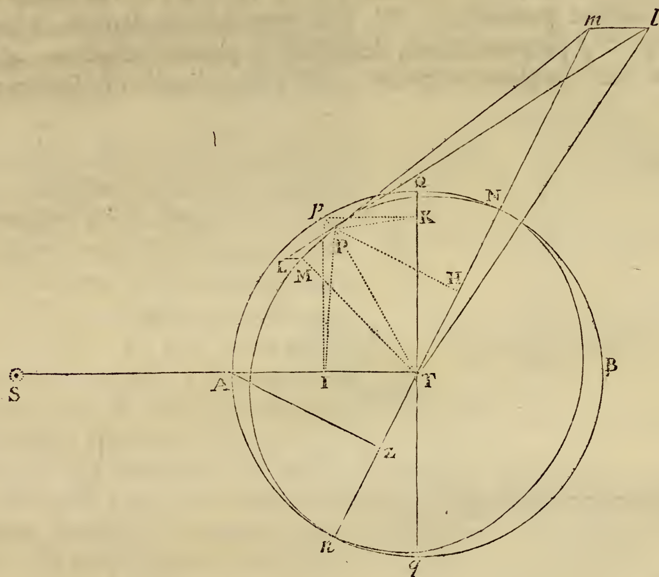
Invenire motum horarium nodorum lunæ in orbe circulari.

Designet *S* solem, *T* terram, *P* lunam, *NPn* orbem lunæ, *Npn* vestigium orbis in plano eclipticæ; *N*, *n* nodos, *nTNm* lineam nodorum infinite productam; *PI*, *PK* perpendicula demissa in lineas *ST*, *Qq*; *Pp* perpendiculum demissum in planum eclipticæ; *A*, *B* syzygias lunæ in plano eclipticæ; *AZ* perpendiculum in lineam no-



dorum *Nn*; *Q*, *q* quadraturas lunæ in plano eclipticæ, & *pK* perpendiculum in lineam *Qq* quadraturis interjacentem. Vis solis ad perturbandum motum lunæ (per. prop. xxv.) duplex est, altera lineæ *LM* in schemate propositionis illius, altera lineæ *MT* proportionalis. Et luna vi priore in terram, posteriore in solem secundum lineam rectæ

rectæ ST a terra ad solem ductæ parallelam trahitur. Vis prior LM agit secundum planum orbis lunaris, & propterea situm plani nil mutat. Hæc igitur negligenda est. Vis posterior MT qua planum orbis lunaris perturbatur eadem est cum vi $3PK$ vel $3IT$. Et hæc vis (per prop. xxv.) est ad vim qua luna in circulo circa terram quiescentem tempore suo periodico uniformiter revolvi posset, ut $3IT$ ad radium circuli multiplicatum per numerum 178,725, sive ut IT ad radium multiplicatum per 59,575. Cæterum in hoc calculo, & eo

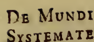


omni qui sequitur, considero lineas omnes a luna ad solem ductas tanquam parallelas lineæ quæ a terra ad solem ducitur, propterea quod inclinatio tantum fere minuit effectus omnes in aliquibus casibus, quantum auget in aliis; & nodorum motus mediocres quærimus, neglectis istiusmodi minutiis, quæ calculum nimis impeditum redderent.

Designet jam PM arcum, quem luna dato tempore quam minimo describit, & ML lineolam cujus dimidium luna, impellente vi præfata $3IT$, eodem tempore describere posset. Jungantur PL, MP, & pro-

& producantur eæ ad m & l, ubi secent planum eclipticæ; inque Tm demittatur perpendiculum PH. Et quoniam recta ML parallela est plano eclipticæ, ideoque cum recta ml quæ in plano illo jacet concurrere non potest, & tamen jacent hæ rectæ in plano communi $LMPml$; parallelæ erunt hæ rectæ, & propterea similia erunt triangula LMP, lmP. Jam cum MPm sit in plano orbis, in quo luna in loco P movebatur, incidet punctum m in lineam Nn per orbis illius nodos N, n ductam. Et quoniam vis qua dimidium lineolæ LM generatur, si tota simul & semel in loco P impressa esset, generaret lineam illam totam; & efficeret ut luna moveretur in arcu, cujus chorda esset LP, atque ideo transferret lunam de plano $MPmT$ in planum $LPlT$; motus angularis nodorum a vi illa genitus, æqualis erit angulo mTl. Est autem ml ad mP ut ML ad MP, ideoque cum MP ob datum tempus data sit, est ml ut rectangulum $ML \times mP$, id est, ut rectangulum $IT \times mP$. Et angulus mTl, si modo angulus Tml rectus sit, est ut $\frac{ml}{Tm}$, & propterea ut $\frac{IT \times Pm}{Tm}$, id est (ob proportionales Tm & mP, TP & PH) ut $\frac{IT \times PH}{TP}$, ideoque ob datam TP, ut $IT \times PH$. Quod si angulus Tml, seu STN obliquus sit, erit angulus mTl adhuc minor, in ratione sinus anguli STN ad radium, seu AZ ad AT. Est igitur velocitas nodorum ut $IT \times PH \times AZ$, sive ut contentum sub sinubus trium angulorum TPI, PTN & STN.

Si anguli illi, nodis in quadraturis & luna in syzygia existentibus, recti sint, lineola ml abibit in infinitum, & angulus mTl evadet angulo mPl æqualis. Hoc autem in casu, angulus mPl est ad angulum PTM, quem luna eodem tempore motu suo apparente circa terram describit, ut 1 ad 59,575. Nam angulus mPl æqualis est angulo LPM, id est, angulo deflexionis lunæ a recto tramite, quem sola vis præfata solaris $3IT$, si tum cessaret lunæ gravitas, dato illo tempore generare posset; & angulus PTM æqualis est angulo deflexionis lunæ a recto tramite, quem vis illa, qua luna in orbe suo retinetur, si tum cessaret vis solaris $3IT$, eodem tempore generaret. Et hæ vires, ut supra diximus, sunt ad invicem ut 1 ad 59,575. Ergo cum motus medius horarius lunæ respectu fixarum sit $32'. 56''. 27'''. 12^{iv}\frac{1}{2}$, motus horarius nodi in hoc casu erit $33''. 10'''. 33^{iv}. 12^{v}$. Aliis autem



autem in casibus motus iste horarius erit ad 33″. 10‴. 33^iv. 12^v. ut contentum sub sinubus angulorum trium *TPI*, *PTN*, & *STN* (seu distantiarum lunæ a quadratura, lunæ a nodo, & nodi a sole) ad cubum radii. Et quoties signum anguli alicujus de affirmativo in negativum, deque negativo in affirmativum mutatur, debebit motus regressivus in progressivum & progressivus in regressivum mutari. Unde fit ut nodi progrediantur quoties luna inter quadraturam alterutram & nodum quadraturæ proximum versatur. Aliis in casibus regrediuntur, & per excessum regressus supra progressum singulis mensibus feruntur in antecedentia.

Corol. 1. Hinc si a dati arcus quam minimi *PM* terminis *P* & *M* ad lineam quadraturas jungentem *Qq* demittantur perpendicula *PK*, *Mk*, eademque producantur donec secent lineam nodorum *Nn* in *D* & *d*; erit motus horarius nodorum ut area *MPDd* & quadratum lineæ *AZ* conjunctim. Sunto enim *PK*, *PH* & *AZ* prædicti tres sinus. Nempe *PK* sinus distantiæ lunæ a quadratura, *PH* sinus distantiæ lunæ a nodo, & *AZ* sinus distantiæ nodi a sole: & erit velocitas nodi ut contentum $PK \times PH \times AZ$. Est autem *PT* ad *PK* ut *PM* ad *Kk*, ideoque ob datas *PT* & *PM* est *Kk* ipsi *PK* proportionalis. Est & *AT* ad *PD* ut *AZ* ad *PH*, & propterea *PH* rectangulo $PD \times AZ$ proportionalis, & conjunctis rationibus, $PK \times PH$ est ut contentum $Kk \times PD \times AZ$, & $PK \times PH \times AZ$ ut $Kk \times PD \times AZ$ *qu.* id est, ut area *PDdM* & *AZ qu.* conjunctim. *Q. E. D.*

Corol.

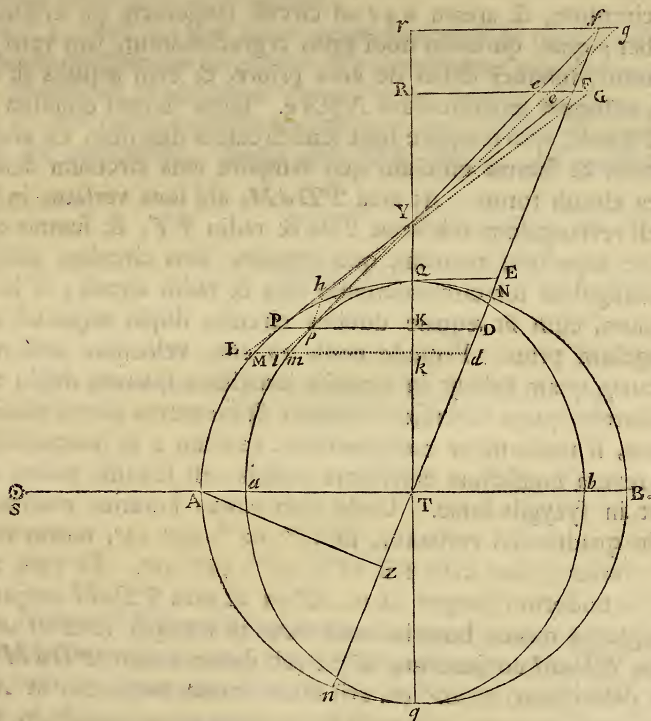
Corol. 2. In data quavis nodorum poſitione, motus horarius mediocris eſt ſemiſſis motus horarii in ſyzygiis lunæ, ideoque eſt ad 16″. 35‴. 16^{iv}. 36^{v}. ut quadratum ſinus diſtantiæ nodorum a ſyzygiis ad quadratum radii, ſive ut *AZ qu.* ad *AT qu.* Nam ſi luna uniformi cum motu perambulet ſemicirculum *QAq*, ſumma omnium arearum *PDdM*, quo tempore luna pergit a *Q* ad *M*, erit area *QMdE* quæ ad circuli tangentem *QE* terminatur; & quo tempore luna attingit punctum *n*, ſumma illa erit area tota *EQAn* quam linea *PD* deſcribit, dein luna pergente ab *n* ad *q*, linea *PD* cadet extra circulum, & aream *nqe* ad circuli tangentem *qe* terminatam deſcribet; quæ, quoniam nodi prius regrediebantur, jam vero progrediuntur, ſubduci debet de area priore, & cum æqualis ſit areæ *QEN*, relinquet ſemicirculum *NQAn*. Igitur ſumma omnium arearum *PDdM*, quo tempore luna ſemicirculum deſcribit, eſt area ſemicirculi; & ſumma omnium quo tempore luna circulum deſcribit eſt area circuli totius. At area *PDdM*, ubi luna verſatur in ſyzygiis, eſt rectangulum ſub arcu *PM* & radio *PT*; & ſumma omnium huic æqualium arearum, quo tempore luna circulum deſcribit, eſt rectangulum ſub circumferentia tota & radio circuli; & hoc rectangulum, cum ſit æquale duobus circulis, duplo majus eſt quam rectangulum prius. Proinde nodi, ea cum velocitate uniformiter continuata quam habent in ſyzygiis lunaribus, ſpatium duplo majus deſcriberent quam revera deſcribunt; & propterea motus mediocris quocum, ſi uniformiter continuaretur, ſpatium a ſe inæquabili cum motu revera confectum deſcribere poſſent, eſt ſemiſſis motus quem habent in ſyzygiis lunæ. Unde cum motus horarius maximus, ſi nodi in quadraturis verſantur, ſit 33″. 10‴. 33^{iv}. 12^{v}, motus mediocris horarius in hoc caſu erit 16″. 35‴. 16^{iv}. 36^{v}. Et cum motus horarius nodorum ſemper ſit ut *AZ qu.* & area *PDdM* conjunctim, & propterea motus horarius nodorum in ſyzygiis lunæ ut *AZ qu.* & area *PDdM* conjunctim, id eſt (ob datam aream *PDdM* in ſyzygiis deſcriptam) ut *AZ qu.* erit etiam motus mediocris ut *AZ qu.* atque ideo hic motus, ubi nodi extra quadraturas verſantur, erit ad 16″. 35‴. 16^{iv}. 36^{v}. ut *AZ qu.* ad *AT qu.* *Q. E. D.*

De Mundi Systemate

PROPOSITIO XXXI. PROBLEMA XII.

Invenire motum horarium nodorum lunæ in orbe elliptico.

Designet *Qpmaq* ellipsin, axe majore *Qq*, minore *ab* descriptam, *QAqB* circulum circumscriptum, *T* terram in utriusque centro communi, *S* solem, *p* lunam in ellipsi motam, & *pm* arcum quem data temporis particula quam minima describit, *N* & *n* nodos

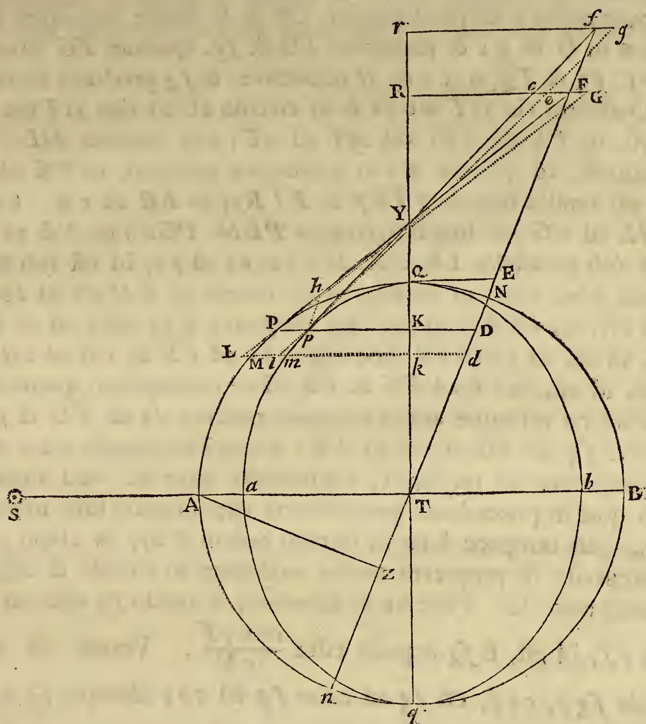


linea *Nn* junctos, *pK* & *mk* perpendicula in axem *Qq* demissa & hinc inde producta, donec occurrant circulo in *P* & *M*, & lineæ nodorum in *D* & *d*. Et si luna, radio ad terram ducto, aream describat tempori proportionalem, erit motus horarius nodi in ellipsi ut area *pDdm* & *AZq* conjunctim.

Nam

Nam si *PF* tangat circulum in *P*, & producta occurrat *TN* in *F*, & *pf* tangat ellipsin in *p* & producta occurrat eidem *TN* in *f*, conveniant autem hæ tangentes in axe *TQ* ad *Y*; & si *ML* designet spatium quod luna in circulo revolvens, interea dum describit arcum *PM*, urgente & impellente vi prædicta $3IT$, seu $3PK$ motu transverso describere posset, & *ml* designet spatium quod luna in ellipsi revolvens eodem tempore, urgente etiam vi $3IT$ seu $3PK$, describere posset; & producantur *LP* & *lp* donec occurrant plano eclipticæ in *G* & *g*; & jungantur *FG* & *fg*, quarum *FG* producta secet *pf*, *pg* & *TQ* in *c*, *e* & *R* respective, & *fg* producta secet *TQ* in *r*. Quoniam vis $3IT$ seu $3PK$ in circulo est ad vim $3IT$ seu $3pK$ in ellipsi, ut *PK* ad *pK*, seu *AT* ad *aT*; erit spatium *ML* vi priore genitum, ad spatium *ml* vi posteriore genitum, ut *PK* ad *pK*, id est, ob similes figuras *PYKp* & *FYRc*, ut *FR* ad *cR*. Est autem *ML* ad *FG* (ob similia triangula *PLM*, *PGF*) ut *PL* ad *PG*, hoc est (ob parallelas *Lk*, *PK*, *GR*) ut *pl* ad *pe*, id est (ob similia triangula *plm*, *cpe*) ut *lm* ad *ce*; & inverse ut *LM* est ad *lm*, seu *FR* ad *cR*, ita est *FG* ad *ce*. Et propterea si *fg* esset ad *ce* ut *fY* ad *cY*, id est, ut *fr* ad *cR* (hoc est, ut *fr* ad *FR* & *FR* ad *cR* conjunctim, id est, ut *fT* ad *FT* & *FG* ad *ce* conjunctim) quoniam ratio *FG* ad *ce* utrinque ablata relinquit rationes *fg* ad *FG* & *fT* ad *FT*, foret *fg* ad *FG* ut *fT* ad *FT*; atque ideo anguli, quos *FG* & *fg* subtenderent ad terram *T*, æquarentur inter se. Sed anguli illi (per ea quæ in præcedente propositione exposuimus) sunt motus nodorum, quo tempore luna in circulo arcum *PM*, in ellipsi arcum *pm* percurrit: & propterea motus nodorum in circulo & ellipsi æquarentur inter se. Hæc ita se haberent, si modo *fg* esset ad *ce* ut *fY* ad *cY*, id est, si *fg* æqualis esset $\frac{ce \times fY}{cY}$. Verum ob similia triangula *fgp*, *cep*, est *fg* ad *ce* ut *fp* ad *cp*; ideoque *fg* æqualis est $\frac{ce \times fp}{cp}$; & propterea angulus, quem *fg* revera subtendit, est ad angulum priorem, quem *FG* subtendit, hoc est, motus nodorum in ellipsi ad motum nodorum in circulo, ut hæc *fg* seu $\frac{ce \times fp}{cp}$ ad priorem *fg* seu $\frac{ce \times fY}{cY}$, id est, ut $fp \times cY$ ad $fY \times cp$, seu *fp* ad *fY* &

cY ad *ep*, hoc eſt, ſi *ph* ipſi *TN* parallela occurrat *FP* in *h*, ut *Fh* ad *FY* & *FY* ad *FP*; hoc eſt, ut *Fh* ad *FP* ſeu *Dp* ad *DP*, ideoque ut area *Dpmd* ad aream *DPMd*. Et propterea, cum (per corol. 1. prop. XXX.) area poſterior & *AZq* conjunctim proportionalia ſint motui horario nodorum in circulo, erunt area prior & *AZq* conjunctim proportionalia motui horario nodorum in ellipſi. *Q.E.D.*



Corol. Quare cum, in data nodorum poſitione, ſumma omnium arearum *pDdm*, quo tempore luna pergit a quadratura ad locum quemvis *m*, ſit area *mpQEd*, quæ ad ellipſeos tangentem *QE* terminatur; & ſumma omnium arearum illarum, in revolutione integra, ſit area ellipſeos totius: motus mediocris nodorum in ellipſi erit ad motum mediocrem nodorum in circulo, ut ellipſis ad circulum;

lum; id eſt, ut *Ta* ad *TA*, ſeu 69 ad 70. Et propterea, cum (per corol. 2. prop. xxx.) motus mediocris horarius nodorum in circulo ſit ad 16″. 35‴. 16^iv. 36^v. ut *AZ qu.* ad *AT qu.* ſi capiatur angulus 16″. 21‴. 3^iv. 30^v ad angulum 16″. 35‴. 16^iv. 36^v. ut 69 ad 70, erit motus mediocris horarius nodorum in ellipſi ad 16″. 21‴. 3^iv. 30^v. ut *AZq* ad *ATq*; hoc eſt, ut quadratum ſinus diſtantiæ nodi a ſole ad quadratum radii.

Cæterum luna, radio ad terram ducto, aream velocius deſcribit in ſyzygiis quam in quadraturis, & eo nomine tempus in ſyzygiis contrahitur, in quadraturis producitur; & una cum tempore motus nodorum augetur ac diminuitur. Erat autem momentum areæ in quadraturis lunæ ad ejus momentum in ſyzygiis ut 10973 ad 11073, & propterea momentum mediocre in octantibus eſt ad exceſſum in ſyzygiis, defectumque in quadraturis, ut numerorum ſemiſumma 11023 ad eorundem ſemidifferentiam 50. Unde cum tempus lunæ in ſingulis orbis particulis æqualibus ſit reciproce ut ipſius velocitas, erit tempus mediocre in octantibus ad exceſſum temporis in quadraturis, ac defectum in ſyzygiis, ab hac cauſa oriundum, ut 11023 ad 50 quam proxime. Pergendo autem a quadraturis ad ſyzygias, invenio quod exceſſus momentorum areæ in locis ſingulis, ſupra momentum minimum in quadraturis, ſit ut quadratum ſinus diſtantiæ lunæ a quadraturis quam proxime; & propterea differentia inter momentum in loco quocunque & momentum mediocre in octantibus, eſt ut differentia inter quadratum ſinus diſtantiæ lunæ a quadraturis & quadratum ſinus graduum 45, ſeu ſemiſſem quadrati radii; & incrementum temporis in locis ſingulis inter octantes & quadraturas, & decrementum ejus inter octantes & ſyzygias, eſt in eadem ratione. Motus autem nodorum, quo tempore luna percurrit ſingulas orbis particulas æquales, acceleratur vel retardatur in duplicata ratione temporis. Eſt enim motus iſte, dum luna percurrit *PM* (cæteris paribus) ut *ML*, & *ML* eſt in duplicata ratione temporis. Quare motus nodorum in ſyzygiis, eo tempore confectus quo luna datas orbis particulas percurrit, diminuitur in duplicata ratione numeri 11073 ad numerum 11023; eſtque decrementum ad motum reliquum ut 100 ad 10973, ad motum vero totum ut 100 ad 11073 quam proxime. Decrementum autem in locis inter octantes & ſyzygias, & incrementum in locis inter octantes & quadraturas, eſt

quam

quam proxime ad hoc decrementum, ut motus totus in locis illis ad motum totum in syzygiis & differentia inter quadratum sinus distantiæ lunæ a quadratura & semissem quadrati radii ad semissem quadrati radii conjunctim. Unde si nodi in quadraturis versentur, & capiantur loca duo æqualiter ab octante hinc inde distantia, & alia duo a syzygia & quadratura iisdem intervallis distantia, deque decrementis motuum in locis duobus inter syzygiam & octantem, subducantur incrementa motuum in locis reliquis duobus, quæ sunt inter octantem & quadraturam; decrementum reliquum æquale erit decremento in syzygia: uti rationem ineunti facile constabit. Proindeque decrementum mediocre, quod de nodorum motu mediocri subduci debet, est pars quarta decrementi in syzygia. Motus totus horarius nodorum in syzygiis, ubi luna radio ad terram ducto aream tempori proportionalem describere supponebatur, erat $32''. 42'''. 7^{iv}$. Et decrementum motus nodorum, quo tempore luna jam velocior describit idem spatium, diximus esse ad hunc motum ut 100 ad 11073; ideoque decrementum illud est $17'''. 43^{iv}. 11^{v}$, cujus pars quarta $4'''. 25^{iv}. 48^{v}$. motui horario mediocri superius invento $16''. 21'''. 3^{iv}. 30^{v}$. subducta, relinquit $16''. 16'''. 37^{iv}. 42^{v}$. motum mediocrem horarium correctum.

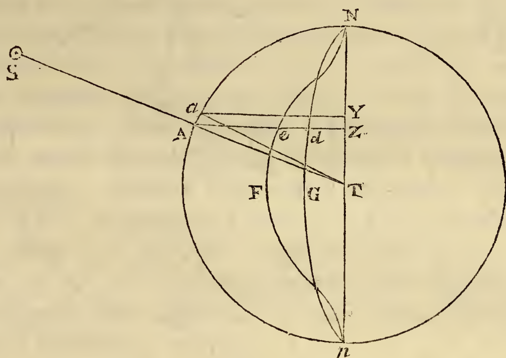
Si nodi versantur extra quadraturas, & spectentur loca bina a syzygiis hinc inde æqualiter distantia; summa motuum nodorum, ubi luna versatur in his locis, erit ad summam motuum, ubi luna in iisdem locis & nodi in quadraturis versantur, ut *AZ qu.* ad *AT qu.* Et decrementa motuum, a causis jam expositis oriunda, erunt ad invicem ut ipsi motus, ideoque motus reliqui erunt ad invicem ut *AZ qu.* ad *AT qu.* & motus mediocres ut motus reliqui. Est itaque motus mediocris horarius correctus, in dato quocunque nodorum situ, ad $16''. 16'''. 37^{iv}. 42^{v}$. ut *AZ qu.* ad *AT qu.*; id est, ut quadratum sinus distantiæ nodorum a syzygiis ad quadratum radii.

PROPO-

PROPOSITIO XXXII. PROBLEMA XIII.

Invenire motum medium nodorum lunæ.

Motus medius annuus eſt ſumma motuum omnium horariorum mediocrium in anno. Concipe nodum verſari in *N*, & ſingulis horis completis retrahi in locum ſuum priorem, ut non obſtante motu ſuo proprio, datum ſemper ſervet ſitum ad ſtellas fixas. Interea vero ſolem *S*, per motum terræ, progredi a nodo, & curſum annuum apparentem uniformiter complere. Sit autem *Aa* arcus datus quam minimus, quem recta *TS* ad ſolem ſemper ducta, interſectione ſui & circuli *NAn*, dato tempore quam minimo deſcribit: & motus horarius mediocris (per jam oſtenſa) erit ut *AZq*, id eſt (ob proportionales *AZ*, *ZY*) ut rectangulum ſub *AZ* & *ZY*, hoc eſt, ut



area *AZYa*. Et ſumma omnium horariorum motuum mediocrium ab initio, ut ſumma omnium arearum *aYZA*, id eſt, ut area *NAZ*. Eſt autem maxima *AZYa* æqualis rectangulo ſub arcu *Aa* & radio circuli; & propterea ſumma omnium rectangulorum in circulo toto ad ſummam totidem maximorum, ut area circuli totius ad rectangulum ſub circumferentia tota & radio, id eſt, ut 1 ad 2. Motus autem horarius, rectangulo maximo reſpondens, erat 16″. 16‴. 37^{iv}. 42^{v}. Et hic motus, anno toto ſidereo dierum 365. hor. 6. min. 9. fit 39^{gr}. 38′. 7″. 50‴. Ideoque hujus dimidium 19^{gr}. 49′. 3″. 55‴. eſt

motus

De Mundi Systemate

motus medius nodorum circulo toti respondens. Et motus nodorum, quo tempore sol pergit ab *N* ad *A*, est ad $19^{gr}. 49'. 3''. 55'''$. ut area *NAZ* ad circulum totum.

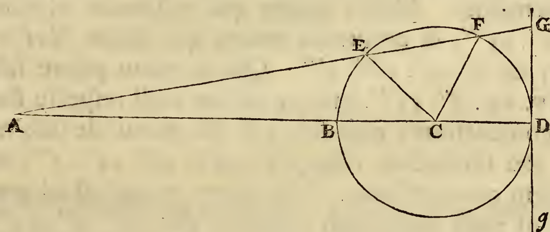
Hæc ita se habent ex hypothesi, quod nodus horis singulis in locum priorem retrahitur, sic ut sol anno toto completo ad nodum eundem redeat a quo sub initio digressus fuerat. Verum per motum nodi fit ut sol citius ad nodum revertatur, & computanda jam est abbreviatio temporis. Cum sol anno toto conficiat 360 gradus, & nodus motu maximo eodem tempore conficeret $39^{gr}. 38'. 7''. 50'''$, seu 39,6355 gradus; & motus mediocris nodi in loco quovis *N* sit ad ipsius motum mediocrem in quadraturis suis, ut *AZq* ad *ATq*: erit motus solis ad motum nodi in *N*, ut 360 *ATq* ad 39,6355 *AZq*; id est, ut 9,0827667 *ATq* ad *AZq*. Unde si circuli totius circumferentia *NAn* dividatur in particulas æquales *Aa*, tempus quo sol percurrat particulam *Aa*, si circulus quiesceret, erit ad tempus quo percurrit eandem particulam, si circulus una cum nodis circa centrum *T* revolvatur, reciproce ut 9,0827667 *ATq* ad 9,0827667 *ATq* + *AZq*. Nam tempus est reciproce ut velocitas qua particula percurritur, & hæc velocitas est summa velocitatum solis & nodi. Igitur si tempus, quo sol sine motu nodi percurreret arcum *NA*, exponatur per sectorem *NTA*, & particula temporis quo percurreret arcum quam minimum *Aa*, exponatur per sectoris particulam *ATa*; & (perpendiculo *aY* in *Nn* demisso) si in *AZ* capiatur *dZ*, ejus longitudinis

gitudinis ut sit rectangulum dZ in ZY ad sectoris particulam ATa ut AZq ad 9,0827646 $ATq + AZq$, id est, ut sit dZ ad $\frac{1}{2}AZ$ ut ATq ad 9,0827646 $ATq + AZq$; rectangulum dZ in ZY designabit decrementum temporis ex motu nodi oriundum, tempore toto quo arcus Aa percurritur. Et si punctum d tangit curvam $NdGn$, area curvilinea NdZ erit decrementum totum, quo tempore arcus totus NA percurritur; & propterea excessus sectoris NAT supra aream NdZ erit tempus illud totum. Et quoniam motus nodi tempore minore minor est in ratione temporis, debebit etiam area $AaYZ$ diminui in eadem ratione. Id quod fiet si capiatur in AZ longitudo eZ, quæ sit ad longitudinem AZ ut AZq ad 9,0827646 $ATq + AZq$. Sic enim rectangulum eZ in ZY erit ad aream $AZYa$ ut decrementum temporis, quo arcus Aa percurritur, ad tempus totum quo percurreretur, si nodus quiesceret: & propterea rectangulum illud respondebit decremento motus nodi. Et si punctum e tangat curvam $NeFn$, area tota NeZ, quæ summa est omnium decrementorum, respondebit decremento toti, quo tempore arcus AN percurritur; & area reliqua NAe respondebit motui reliquo, qui verus est nodi motus, quo tempore arcus totus NA per solis & nodi conjunctos motus percurritur. Jam vero area semicirculi est ad aream figuræ $NeFn$, per methodum serierum infinitarum quæsitam, ut 793 ad 60 quamproxime. Motus autem qui respondet circulo toti erat $19^{gr}. 49'. 3''. 55'''$. & propterea motus, qui figuræ $NeFn$ duplicatæ respondet, est $1^{gr}. 29'. 58''. 2'''$. Qui de motu priore subductus relinquit $18^{gr}. 19'. 5''. 53'''$. motum totum nodi respectu fixarum inter sui ipsius conjunctiones cum sole; & hic motus de solis motu annuo graduum 360 subductus, relinquit $341^{gr}. 40'. 54''. 7'''$. motum solis inter easdem conjunctiones. Iste autem motus est ad motum annuum 360^{gr}. ut nodi motus jam inventus $18^{gr}. 19'. 5''. 53'''$. ad ipsius motum annuum, qui propterea erit $19^{gr}. 18'. 1''. 23'''$. Hic est motus medius nodorum in anno sidereo. Idem per tabulas astronomicas est $19^{gr}. 21' 21''. 50'''$. Differentia minor est parte trecentesima motus totius, & ab orbis lunaris eccentricitate & inclinatione ad planum eclipticæ oriri videtur. Per eccentricitatem orbis motus nodorum nimis acceleratur, & per ejus inclinationem vicissim retardatur aliquantulum, & ad justam velocitatem reducitur.

PROPOSITIO XXXIII. PROBLEMA XIV.

Invenire motum verum nodorum lunæ.

In tempore quod eſt ut area *NTA—NdZ*, *(in fig. præced.)* motus iſte eſt ut area *NAe*, & inde datur. Verum ob nimiam calculi difficultatem, præſtat ſequentem problematis conſtructionem adhibere. Centro *C*, intervallo quovis *CD*, deſcribatur circulus *BEFD*. Producatur *DC* ad *A*, ut ſit *AB* ad *AC* ut motus medius ad ſemiſſem motus veri mediocris, ubi nodi ſunt in quadraturis, id eſt, ut 19gr. 18′. 1″. 23‴. ad 19gr. 49′. 3″. 55‴, atque ideo *BC* ad *AC* ut motuum differentia 0gr. 31′. 2″. 32‴, ad motum poſteriorem 19gr, 49′. 3″. 55‴. hoc eſt, ut 1 ad $38\frac{3}{10}$; dein per punctum *D* ducatur infinita *Gg*, quæ tangat circulum in *D*; & ſi capiatur angulus *BCE* vel *BCF* æqualis duplæ diſtantiæ ſolis a loco nodi, per motum medium invento; & agatur *AE* vel *AF* ſecans perpendiculum *DG* in *G*; & capiatur angulus qui ſit ad motum totum nodi inter ipſius ſyzygias (id eſt, ad 9gr. 11′. 3″.) ut tangens *DG* ad circuli *BED* circumferentiam totam; atque angulus iſte (pro quo angulus *DAG*



uſurpari poteſt) ad motum medium nodorum addatur ubi nodi tranſeunt a quadraturis ad ſyzygias, & ab eodem motu medio ſubducatur ubi tranſeunt a ſyzygiis ad quadraturas; habebitur eorum motus verus. Nam motus verus ſic inventus congruet quam proxime cum motu vero qui prodit exponendo tempus per aream *NTA—NdZ*, & motum nodi per aream *NAe*; ut rem perpendenti & computationes inſtituenti conſtabit. Hæc eſt æquatio ſemeſtris motus

nodorum.

nodorum. Est & æquatio menstrua, sed quæ ad inventionem latitudinis lunæ minime necessaria est. Nam cum variatio inclinationis orbis lunaris ad planum eclipticæ duplici inæqualitati obnoxia sit, alteri semestri, alteri autem menstruæ; hujus menstrua inæqualitas & æquatio menstrua nodorum ita se mutuo contemperant & corrigunt, ut ambæ in determinanda latitudine lunæ negligi possint.

Corol. Ex hac & præcedente propositione liquet quod nodi in syzygiis suis quiescunt, in quadraturis autem regrediuntur motu horario $16''. 19'''. 26^{iv}$. Et quod æquatio motus nodorum in octantibus sit $1^{gr}. 30'$. Quæ omnia cum phænomenis cœlestibus probe quadrant.

Scholium.

Alia ratione motum nodorum *J. Machin Astron. Prof. Gresham.* & *Hen. Pemberton* M. D. seorsum invenerunt. Hujus methodi mentio quædam alibi facta est. Et utriusque chartæ, quas vidi, duas propositiones continebant, & inter se in utrisque congruebant. Chartam vero D. *Machin*, cum prior in manus meas venerit, hic adjungam.

De Motu Nodorum Lunæ.

PROPOSITIO I.

" *Motus solis medius a nodo, definitur per medium pro-*
" *portionale geometricum, inter motum ipsius solis medium,*
" *& motum illum mediocrem quo sol celerrimè recedit a nodo*
" *in quadraturis.*

" Sit *T* locus ubi terra, *Nn* linea nodorum lunæ ad tempus quod-
" vis datum, *KTM* huic ad rectos angulos ducta, *TA* recta circum
" centrum revolvens ea cum velocitate angulari qua sol & nodus a
" se invicem recedunt, ita ut angulus inter rectam quiescentem *Nn*
" & revolventem *TA*, semper fiat æqualis distantiæ locorum solis &
" nodi. Jam si recta quævis *TK* dividatur in partes *TS* & *SK* quæ
" sint ut motus solis horarius medius ad motum horarium medio-
" crem nodi in quadraturis, & ponatur recta *TH* media proportio-
" nalis inter partem *TS* & totam *TK*, hæc recta inter reliquas pro-
" portionalis erit motui medio solis a nodo.

" Describatur enim circulus *NKnM* centro *T* & radio *TK*, eo-
" demque centro & semiaxibus *TH* & *TN* describatur ellipsis *NH*
" *nL*, & in tempore quo sol a nodo recedit per arcum *Na*, si du-
" catur recta *Tba*, area sectoris *NTa* exponet summam motuum
" nodi & solis in eodem tempore. Sit igitur arcus *aA* quam mini-
" mus quem recta *Tba* præfata lege revolvens in datâ temporis par-
" ticula uniformiter describit, & sector quam minimus *TAa* erit ut
" summa velocitatum qua sol & nodus tum temporis seorsim fe-
" runtur. Solis autem velocitas ferè uniformis est, utpote cujus parva
" inæqualitas vix ullam inducit in medio nodorum motu varieta-
" tem. Altera pars hujus summæ nempe velocitas nodi in medio-
" cri sua quantitate, augetur in recessu a syzygiis in duplicata rati-
" one sinus distantiæ ejus a sole; per Coroll. Prop. 31. Lib. 3tii Prin-
" cip. & cum maxima est in quadraturis ad solem in *K*, eandem ra-
" tionem obtinet ad solis velocitatem ac ea quam habet *SK* ad *TS*
" hoc est ut (differentia quadratorum ex *TK* & *TH* vel) rectangu-
" lum *KHM* ad *TH* quadratum. Sed ellipsis *NBH* dividit secto-
" rem *ATa* summæ harum duarum velocitatum exponentem, in
" duas partes *ABba* & *BTb* ipsis velocitatibus proportionales.
" Producatur enim *BT* ad circulum in *β*, & a puncto *B* demitta-
" tur

" tur ad axem majorem perpendicularis BG, quæ utrinque producta " occurrat circulo in punctis F & f, & quoniam spatium $ABba$ est " ad sectorem TBb ut rectangulum $AB\beta$ ad BT quadratum " (rectangulum enim illud æquatur differentiæ quadratorum ex TA " & TB ob rectam $A\beta$ æqualiter & inæqualiter sectam in T & B.) " Hæc igitur ratio ubi spatium $ABba$ maximum est in K, eadem " erit ac ratio rectanguli KHM ad HT quadratum, sed maxima " nodi mediocris velocitas erat ad solis velocitatem in hac ratione. " Igitur in quadraturis sector ATa dividitur in partes velocitatibus " proportionales. Et quoniam rectang. KHM est ad HT quadr. ut " FBf ad BG quad. & rectangulum $AB\beta$ æquatur rectangulo FBf. " Erit igitur areola $ABba$ ubi maxima est ad reliquum sectorem " TBb, ut rectang. $AB\beta$ ad BG quadr. Sed ratio harum areo-" larum semper erat ut $AB\beta$ rectang. ad BT quadratum; & pro-" pterea areola $ABba$ in loco A minor est simili areola in qua-" draturis, in duplicata ratione BG ad BT. hoc est in duplicata ra-" tione sinus distantiæ solis a nodo. Et proinde summa omnium are-" olarum $ABba$ nempe spatium ABN erit ut motus nodi in tem-" pore quo sol digreditur a nodo per arcum NA. Et spatium re-" liquum nempe sector ellipticus NTB erit ut motus solis medius " in eodem tempore. Et propterea quoniam annuus motus nodi " medius, is est qui fit in tempore quo sol periodum suam absol-" verit, motus nodi medius a sole erit ad motum ipsius solis medi-" um, ut area circuli ad aream ellipseos, hoc est ut recta TK ad " rectam TH mediam scilicet proportionalem inter TK & TS; vel " quod eodem redit ut media proportionalis TH ad rectam TS.

PROPOSITIO II.

" *Dato motu medio nodorum lunæ invenire motum verum.*

" Sit angulus A distantia solis a loco nodi medio, sive motus me-" dius solis a nodo. Tum si capiatur angulus B cujus tangens sit " ad tangentem anguli A ut TH ad TK, hoc est in subduplicata ra-" tione motus mediocris horarii solis ad motum mediocrem hora-" rium solis a nodo in quadraturis versante; erit idem angulus B " distantia solis a loco nodi vero. Nam jungatur FT & ex demon-

" stratione

" ſtratione propoſitionis ſuperioris erit angulus *FTN* diſtantia ſolis
" a loco nodi medio, angulus autem *ATN* diſtantia a loco vero, &
" tangentes horum angulorum ſunt inter ſe ut *TK* ad *TH*.

" *Coroll.* Hinc angulus *FTA* eſt æquatio nodorum lunæ, ſinuſque
" hujus anguli ubi maximus eſt in octantibus, eſt ad radium ut *KH*
" ad *TK+TH*. Sinus autem hujus æquationis in loco quovis alio
" *A* eſt ad ſinum maximum, ut ſinus ſummæ angulorum *FTN+ATN*
" ad radium: hoc eſt fere ut ſinus duplæ diſtantiæ ſolis a loco nodi
" medio (nempe 2 *FTN*) ad radium.

Scholium.

" Si motus nodorum mediocris horarius in quadraturis ſit $16''$.
" $16'''$. 37^{iv}. 42^{v}. hoc eſt in anno toto ſidereo $39°$. $38'$. $7''$. $50'''$.
" erit *TH* ad *TK* in ſubduplicata ratione numeri 9,0827646 ad nu-
" merum 10,0827646, hoc eſt ut 18,6524761 ad 19,6524761. Et pro-
" pterea *TH* ad *HK* ut 18,6524761 ad 1. hoc eſt ut motus ſolis in
" anno ſidereo ad motum nodi medium $19°$. $18'$, $1''$. $23'''\frac{2}{3}$.

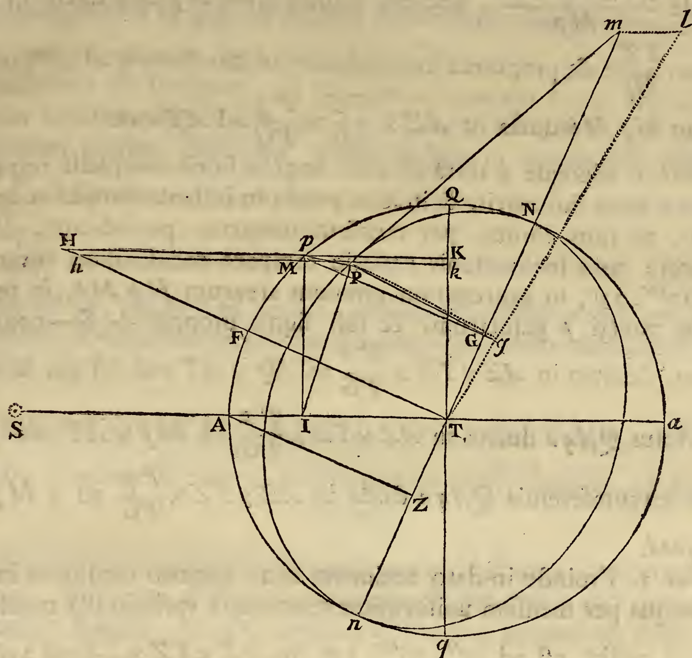
" At ſi motus medius nodorum Lunæ in 20 annis Julianis ſit
" $386°$. $50'$. $15''$. ſicut ex obſervationibus in theoria lunæ adhi-
" bitis deducitur: motus medius nodorum in anno ſidereo erit $19°$.
" $20'$. $31''$. $58'''$. Et *TH* erit ad *HK* ut 360^{gr}. ad $19°. 20'. 31''. 58'''$.
" hoc eſt ut 18,61214 ad 1. unde motus mediocris horarius nodorum
" in quadraturis evadet $16''$. $18'''$. 48^{iv}. Et æquatio nodorum maxi-
" ma in octantibus $1°$. $29'$. $57''$.

PROPOSITIO XXXIV. PROBLEMA XV.

Invenire variationem horariam inclinationis orbis lunaris ad planum eclipticæ.

Deſignent *A* & *a* ſyzygias; *Q* & *q* quadraturas; *N* & *n* nodos; *P* locum lunæ in orbe ſuo; *p* veſtigium loci illius in plano eclipticæ, & *mTl* motum momentaneum nodorum ut ſupra. Et ſi ad lineam *Tm* demittatur perpendiculum *PG*, jungatur *pG*, & producatur ea donec occurrat *Tl* in *g*, & jungatur etiam *Pg*: erit angulus *PGp* inclinatio orbis lunaris ad planum eclipticæ, ubi luna verſatur in *P*; & angulus *Pgp* inclinatio ejuſdem poſt momentum temporis completum;

pletum; ideoque angulus GPg variatio momentanea inclinationis. Est autem hic angulus GPg ad angulum GTg ut TG ad PG & Pp ad PG conjunctim. Et propterea si pro momento temporis substituatur hora; cum angulus GTg (per prop. xxx.) sit ad angulum 33″.



10‴. 33^{iv}. ut $IT \times PG \times AZ$ ad AT *cub.* erit angulus GPg (seu inclinationis horaria variatio) ad angulum 33″. 10‴. 33^{iv}. ut $IT \times AZ \times TG \times \frac{Pp}{PG}$ ad AT *cub.* *Q. E. I.*

Hæc ita se habent ex hypothesi quod luna in orbe circulari uniformiter gyratur. Quod si orbis ille ellipticus sit, motus mediocris nodorum minuetur in ratione axis minoris ad axem majorem; uti supra expositum est. Et in eadem ratione minuetur etiam inclinationis variatio.

Corol.

De Mundi Systemate

Corol. 1. Si ad Nn erigatur perpendiculum TF, ſitque pM motus horarius lunæ in plano eclipticæ; & perpendicula pK, Mk in QT demiſſa & utrinque producta occurrant TF in H & h: erit IT ad AT ut Kk ad Mp, & TG ad Hp ut TZ ad AT, ideoque $IT \times TG$ æquale $\frac{Kk \times Hp \times TZ}{Mp}$, hoc eſt, æquale areæ $HpMh$ ductæ in rationem $\frac{TZ}{Mp}$: & propterea inclinationis variatio horaria ad 33″. 10‴. 33^{iv}. ut $HpMh$ ducta in $AZ \times \frac{TZ}{Mp} \times \frac{Pp}{PG}$ ad AT *cub.*

Corol. 2. Ideoque ſi terra & nodi ſingulis horis completis retraherentur a locis ſuis novis, & in loca priora in inſtanti ſemper reducerentur, ut ſitus eorum, per menſem integrum periodicum, datus maneret; tota inclinationis variatio tempore menſis illius foret ad 33″. 10‴. 33^{iv}, ut aggregatum omnium arearum $HpMh$, in revolutione puncti p genitarum, & ſub ſignis propriis + & — conjunctarum, ductum in $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $Mp \times AT$ *cub.* id eſt, ut circulus totus $QAqa$ ductus in $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $Mp \times AT$ *cub.* hoc eſt, ut circumferentia $QAqa$ ducta in $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $2\,Mp \times AT$ *quad.*

Corol. 3. Proinde in dato nodorum ſitu, variatio mediocris horaria, ex qua per menſem uniformiter continuata variatio illa menſtrua generari poſſet, eſt ad 33″. 10‴. 33^{iv}. ut $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $2ATq$, ſive ut $Pp \times \frac{AZ \times TZ}{\frac{1}{2}AT}$ ad $PG \times 4AT$, id eſt (cum Pp ſit ad PG ut ſinus inclinationis prædictæ ad radium, & $\frac{AZ \times TZ}{\frac{1}{2}AT}$ ſit ad $4AT$ ut ſinus duplicati anguli ATn ad radium quadruplicatum) ut inclinationis ejuſdem ſinus ductus in ſinum duplicatæ diſtantiæ nodorum a ſole, ad quadruplum quadratum radii.

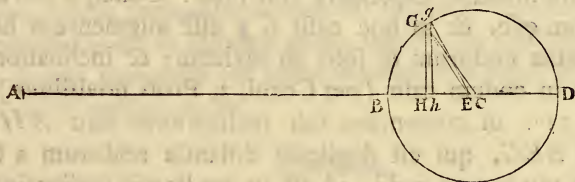
Corol. 4. Quoniam inclinationis horaria variatio, ubi nodi in quadraturis verſantur, eſt (per hanc propoſitionem) ad angulum 33″. 10‴.

10‴. 33^iv ut $IT \times AZ \times TG \times \frac{Pp}{PG}$ ad AT *cub.* id est, ut $\frac{IT \times TG}{\frac{1}{2} AT}$ $\times \frac{Pp}{PG}$ ad $2 AT$; hoc est, ut sinus duplicatæ distantiæ lunæ à quadraturis ductus in $\frac{Pp}{PG}$ ad radium duplicatum: summa omnium variationum horariarum, quo tempore luna in hoc situ nodorum transit a quadratura ad syzygiam (id est, spatio horarum $177\frac{1}{6}$,) erit ad summam totidem angulorum 33″. 10‴. 33^iv, seu 5878″, ut summa omnium sinuum duplicatæ distantiæ lunæ à quadraturis ducta in $\frac{Pp}{PG}$ ad summam totidem diametrorum; hoc est, ut diameter ducta in $\frac{Pp}{PG}$ ad circumferentiam; id est, si inclinatio sit 5^gr. 1′, ut $7 \times \frac{874}{10000}$ ad 22, seu 278 ad 10000. Proindeque variatio tota, ex summa omnium horariarum variationum tempore prædicto conflata, est 163″, seu 2′. 43″.

PROPOSITIO XXXV. PROBLEMA XVI.

Dato tempore invenire inclinationem orbis lunaris ad planum eclipticæ.

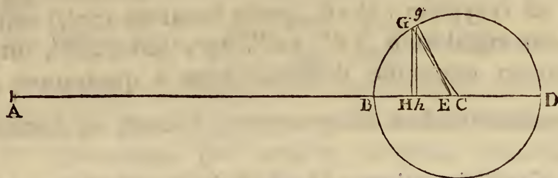
Sit AD sinus inclinationis maximæ, & AB sinus inclinationis minimæ. Bisecetur BD in C, & centro C, intervallo BC describatur circulus BGD. In AC capiatur CE in ea ratione ad EB quam



EB habet ad $2 BA$: et si dato tempore constituatur angulus AEG æqualis duplicatæ distantiæ nodorum à quadraturis, & ad AD demittatur perpendiculum GH: erit AH sinus inclinationis quæsitæ.

Nam

Nam GEq æquale eſt $GHq + HEq = BHD + HEq = HBD + HEq - BHq = HBD + BEq - 2\,BH \times BE = BEq + 2\,EC \times BH = 2\,EC \times AB + 2\,EC \times BH = 2\,EC \times AH$. Ideoque cum $2\,EC$ detur, eſt GEq ut AH. Deſignet jam AEg duplicatam diſtantiam nodorum à quadraturis poſt datum aliquod momentum temporis completum, & arcus Gg ob datum



angulum GEg erit ut diſtantia GE. Eſt autem Hh ad Gg ut GH ad GC, & propterea Hh eſt ut contentum $GH \times Gg$, ſeu $GH \times GE$; id eſt, ut $\frac{GH}{GE} \times GEq$ ſeu $\frac{GH}{GE} \times AH$, id eſt, ut AH & ſinus anguli AEG conjunctim. Igitur ſi AH in caſu aliquo ſit ſinus inclinationis, augebitur ea iiſdem incrementis cum ſinu inclinationis, per Corol. 3. Propoſitionis ſuperioris, & propterea ſinui illi æqualis ſemper manebit. Sed AH, ubi punctum G incidit in punctum alterutrum B vel D, huic ſinui æqualis eſt, & propterea eidem ſemper æqualis manet. *Q.E.D.*

In hac demonſtratione ſuppoſui angulum BEG, qui eſt duplicata diſtantia nodorum à quadraturis, uniformiter augeri. Nam omnes inæqualitatum minutias expendere non vacat. Concipe jam angulum BEG rectum eſſe, & in hoc caſu Gg eſſe augmentum horarium duplæ diſtantiæ nodorum & ſolis ab invicem; & inclinationis variatio horaria in eodem caſu (per Corol. 3. Prop. noviſſimæ) erit ad $33''. 10'''. 33^{iv}$. ut contentum ſub inclinationis ſinu AH & ſinu anguli recti BEG, qui eſt duplicata diſtantia nodorum a ſole, ad quadruplum quadratum radii; id eſt, ut mediocris inclinationis ſinus AH ad radium quadruplicatum; hoc eſt (cum inclinatio illa mediocris ſit quaſi $5^{gr.}\ 8'\frac{1}{2}$) ut ejus ſinus 896 ad radium quadruplicatum 40000, ſive ut 224 ad 10000. Eſt autem variatio tota, ſinuum differentiæ

ferentiæ *BD* refpondens, ad variationem illam horariam ut diameter *BD* ad arcum *Gg*; id eft, ut diameter *BD* ad femicircumferentiam *BGD* & tempus horarum $2079\frac{7}{10}$, quo nodus pergit à quadraturis ad fyzygias, ad horam unam conjunctim; hoc eft, ut 7 ad 11 & $2079\frac{7}{10}$ ad 1. Quare fi rationes omnes conjungantur, fiet variatio tota *BD* ad 33″. 10‴. $33^{iv.}$ ut $224 \times 7 \times 2079\frac{7}{10}$ ad 110000, id eft, ut 29645 ad 1000, & inde variatio illa *BD* prodibit 16′, $23''\frac{1}{2}$.

Hæc eft inclinationis variatio maxima quatenus locus lunæ in orbe fuo non confideratur. Nam inclinatio, fi nodi in fyzygiis verfantur, nil mutatur ex vario fitu lunæ. At fi nodi in quadraturis confiftunt, inclinatio minor eft ubi luna verfatur in fyzygiis, quam ubi ea verfatur in quadraturis, exceffu 2′. 43″; uti in propofitionis fuperioris Corollario quarto indicavimus. Et hujus exceffus dimidio 1′. $21''\frac{1}{2}$ variatio tota mediocris *BD* in quadraturis lunaribus diminuta fit 15′. 2″, in ipfius autem fyzygiis aucta fit 17′. 45″. Si luna igitur in fyzygiis conftituatur, variatio tota in tranfitu nodorum a quadraturis ad fyzygias erit 17′. 45″: ideoque fi inclinatio, ubi nodi in fyzygiis verfantur, fit $5^{gr.}$ 17′. 20″; eadem, ubi nodi funt in quadraturis, & luna in fyzygiis, erit $4^{gr.}$ 59′. 35″. Atque hæc ita fe habere confirmatur ex obfervationibus.

Si jam defideretur orbis inclinatio illa, ubi luna in fyzygiis & nodi ubivis verfantur; fiat *AB* ad *AD* ut finus graduum 4. 59′. 35″ ad finum graduum 5. 17′. 20″, & capiatur angulus *AEG* æqualis duplicatæ diftantiæ nodorum à quadraturis; & erit *AH* finus inclinationis quæfitæ. Huic orbis inclinationi æqualis eft ejufdem inclinatio, ubi luna diftat $90^{gr.}$ à nodis. In aliis lunæ locis inæqualitas menftrua, quam inclinationis variatio admittit, in calculo latitudinis lunæ compenfatur, & quodammodo tollitur per inæqualitatem menftruam motus nodorum (ut fupra diximus) ideoque in calculo latitudinis illius negligi poteft.

Scholium.

Hifce motuum lunarium computationibus oftendere volui, quod motus lunares per theoriam gravitatis a caufis fuis computari poffint. Per eandem theoriam inveni præterea quod æquatio annua

medii motus lunæ oriatur a varia dilatatione orbis lunæ per vim solis, juxta Corol. 6. Prop. LXVI. Lib. I. Hæc vis in perigæo solis major est, & orbem lunæ dilatat; in apogæo ejus minor est, & orbem illum contrahi permittit. In orbe dilatato luna tardius revolvitur, in contracto citius; & æquatio annua, per quam hæc inæqualitas compensatur, in apogæo & perigæo solis nulla est, in mediocri solis a terra distantia ad 11′. 50″ circiter ascendit, in aliis locis æquationi centri solis proportionalis est; & additur medio motui lunæ ubi terra pergit ab aphelio suo ad perihelium, & in opposita orbis parte subducitur. Assumendo radium orbis magni 1000 & eccentricitatem terræ $16\frac{7}{8}$, hæc æquatio, ubi maxima est, per theoriam gravitatis prodiit 11′. 49″. Sed eccentricitas terræ paulo major esse videtur, & aucta eccentricitate hæc æquatio augeri debet in eadem ratione. Sit eccentricitas $16\frac{11}{12}$, & æquatio maxima erit 11′. 51″.

Inveni etiam quod in perihelio terræ, propter majorem vim solis, apogæum & nodi lunæ velocius moventur quam in aphelio ejus, idque in triplicata ratione distantiæ terræ a sole inverse. Et inde oriuntur æquationes annuæ horum motuum æquationi centri solis proportionales. Motus autem solis est in duplicata ratione distantiæ terræ a sole inverse, & maxima centri æquatio, quam hæc inæqualitas generat, est 1gr. 56′. 20″ prædictæ solis eccentricitati $16\frac{11}{12}$ congruens. Quod si motus solis esset in triplicata ratione distantiæ inverse, hæc inæqualitas generaret æquationem maximam 2gr. 54′ 30″. Et propterea æquationes maximæ, quas inæqualitates motuum apogæi & nodorum lunæ generant, sunt ad 2gr. 54′. 30″ ut motus medius diurnus apogæi, & motus medius diurnus nodorum lunæ sunt ad motum medium diurnum solis. Unde prodit æquatio maxima medii motus apogæi 19′. 43″, & æquatio maxima medii motus nodorum 9′. 24″. Additur vero æquatio prior & subducitur posterior, ubi terra pergit a perihelio suo ad aphelium: & contrarium fit in opposita orbis parte.

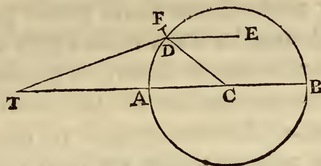
Per theoriam gravitatis constitit etiam quod actio solis in lunam paulo major sit, ubi transversa diameter orbis lunaris transit per solem, quam ubi eadem ad rectos est angulos cum linea terram & solem jungente: & propterea orbis lunaris paulo major est in priore casu quam in posteriore. Et hinc oritur alia æquatio motus medii lunaris,

lunaris, pendens a situ apogæi lunæ ad solem, quæ quidem maxima est cum apogæum lunæ versatur in octante cum sole; & nulla cum illud ad quadraturas vel syzygias pervenit: & motui medio additur in transitu apogæi lunæ a solis quadratura ad syzygiam, & subducitur in transitu apogæi a syzygia ad quadraturam. Hæc æquatio, quam semestrem vocabo, in octantibus apogæi, quando maxima est, ascendit ad 3′. 45″ circiter, quantum ex phænomenis colligere potui. Hæc est ejus quantitas in mediocri solis distantia a terra. Augetur vero ac diminuitur in triplicata ratione distantiæ solis inverse, ideoque in maxima solis distantia est 3′. 34″, & in minima 3′. 56″ quamproxime: ubi vero apogæum lunæ situm est extra octantes, evadit minor; estque ad æquationem maximam, ut sinus duplæ distantiæ apogæi lunæ a proxima syzygia vel quadratura ad radium.

Per eandem gravitatis theoriam actio solis in lunam paulo major est ubi linea recta per nodos lunæ ducta transit per solem, quam ubi linea illa ad rectos est angulos cum recta solem ac terram jungente. Et inde oritur alia medii motus lunaris æquatio, quam semestrem secundam vocabo, quæque maxima est ubi nodi in solis octantibus versantur, & evanescit ubi sunt in syzygiis vel quadraturis, & in aliis nodorum positionibus proportionalis est sinui duplæ distantiæ nodi alterutrius a proxima syzygia aut quadratura: additur vero medio motui lunæ, si sol distat a nodo sibi proximo in antecedentia, subducitur si in consequentia, & in octantibus, ubi maxima est, ascendit ad 47″ in mediocri solis distantia a terra, uti ex theoria gravitatis colligo. In aliis solis distantiis hæc æquatio maxima in octantibus nodorum est reciproce ut cubus distantiæ solis a terra, ideoque in perigæo solis ad 49″ in apogæo ejus ad 45″ circiter ascendit.

Per eandem gravitatis theoriam apogæum lunæ progreditur quam maxime ubi vel cum sole conjungitur vel eidem opponitur, & regreditur ubi cum sole quadraturam facit. Et eccentricitas fit maxima in priore casu & minima in posteriore, per Corol. 7, 8 & 9. Prop. LXVI. Lib. I. Et hæ inæqualitates per eadem Corollaria permagnæ sunt, & æquationem principalem apogæi generant, quam semestrem vocabo. Et æquatio maxima semestris est $12^{gr.}$ 18′ circiter, quantum ex observationibus colligere potui. *Horroxius* noster lunam in ellipsi

ellipsi circum terram, in ejus umbilico inferiore constitutam, revolvi primus statuit. *Halleius* centrum ellipseos in epicyclo locavit, cujus centrum uniformiter revolvitur circum terram. Et ex motu in epicyclo oriuntur inæqualitates jam dictæ in progressu & regressu apogæi & quantitate eccentricitatis. Dividi intelligatur distantia mediocris lunæ a terra in partes 100000, & referat *T* terram & *TC* eccentricitatem mediocrem lunæ partium 5505. Producatur *TC* ad *B*, ut sit *CB* sinus æquationis maximæ semestris $12^{gr.}\ 18'$ ad radium *TC*, & circulus *BDA* centro *C*, intervallo *CB* descriptus erit epicyclus ille in quo centrum orbis lunaris locatur & secundum ordinem literarum *BDA* revolvitur. Capiatur angulus *BCD* æqualis duplo argumento annuo, seu duplæ distantiæ veri loci solis ab apogæo lunæ semel æquato, & erit *CTD* æquatio semestris apogæi lu-



næ & *TD* eccentricitas orbis ejus in apogæum secundo æquatum tendens. Habitis autem lunæ motu medio & apogæo & eccentricitate, ut & orbis axe majore partium 200000; ex his eruetur verus lunæ locus in orbe & distantia ejus a terra, idque per methodos notissimas.

In perihelio terræ, propter majorem vim solis, centrum orbis lunæ velocius movetur circum centrum *C* quam in aphelio, idque in triplicata ratione distantiæ terræ a sole inverse. Ob æquationem centri solis in argumento annuo comprehensam, centrum orbis lunæ velocius movetur in epicyclo *BDA* in duplicata ratione distantiæ terræ a sole inverse. Ut idem adhuc velocius moveatur in ratione simplici distantiæ inverse; ab orbis centro *D* agatur recta *DE* versus apogæum lunæ, seu rectæ *TC* parallela, & capiatur angulus *EDF* æqualis excessui argumenti annui prædicti supra distantiam apogæi lunæ a perigæo solis in consequentia; vel quod perinde est, capiatur angulus

angulus CDF æqualis complemento anomaliæ veræ solis ad gradus 360. Et sit DF ad DC ut dupla eccentricitas orbis magni ad distantiam mediocrem solis a terra, & motus medius diurnus solis ab apogæo lunæ ad motum medium diurnum solis ab apogæo proprio conjunctim, id est, ut $33\frac{7}{8}$ ad 1000 & 52′. 27″. 16‴ ad 59′. 8″. 10‴ conjunctim, sive ut 3 ad 100. Et concipe centrum orbis lunæ locari in puncto F, & in epicyclo, cujus centrum est D, & radius DF, interea revolvi dum punctum D progreditur in circumferentia circuli $DABD$. Hac enim ratione velocitas, qua centrum orbis lunæ in linea quadam curva circum centrum C descripta movebitur, erit reciproce ut cubus distantiæ solis a terra quamproxime, ut oportet.

Computatio motus hujus difficilis est, sed facilior reddetur per approximationem sequentem. Si distantia mediocris lunæ a terra sit partium 100000, & eccentricitas TC sit partium 5505 ut supra: recta CB vel CD invenietur partium $1172\frac{3}{4}$, & recta DF partium $35\frac{1}{5}$. Et hæc recta ad distantiam TC subtendit angulum ad terram quem translatio centri orbis a loco D ad locum F generat in motu centri hujus: & eadem recta duplicata in situ parallelo ad distantiam superioris umbilici orbis lunæ a terra, subtendit eundem angulum, quem utique translatio illa generat in motu umbilici, & ad distantiam lunæ a terra subtendit angulum quem eadem translatio generat in motu lunæ, quique propterea æquatio centri secunda dici potest. Et hæc æquatio, in mediocri lunæ distantia a terra, est ut sinus anguli, quem recta illa DF cum recta a puncto F ad lunam ducta continet quamproxime, & ubi maxima est evadit 2′.25″. Angulus autem quem recta DF & recta a puncto F ad lunam ducta comprehendunt, invenitur vel subducendo angulum EDF ab anomalia media lunæ, vel addendo distantiam lunæ a sole ad distantiam apogæi lunæ ab apogæo solis. Et ut radius est ad sinum anguli sic inventi, ita 2′. 25″. sunt ad æquationem centri secundam, addendam, si summa illa sit minor semicirculo, subducendam si major. Sic habebitur ejus longitudo in ipsis luminarium syzygiis.

Cum atmosphæra terræ ad usque altitudinem milliarium 35 vel 40 refringat lucem solis, & refringendo spargat eandem in umbram terræ, & spargendo lucem in confinio umbræ dilatet umbram: ad diametrum umbræ, quæ per parallaxim prodit, addo minutum unum primum in eclipsibus lunæ, vel minutum unum cum triente.

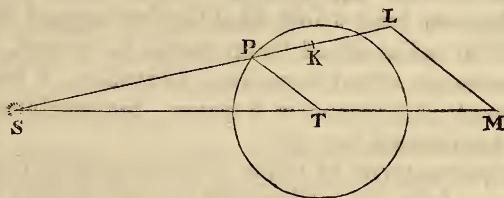
Theo-

Theoria vero lunæ primo in syzygiis, deinde in quadraturis, & ultimo in octantibus per phænomena examinari & stabiliri debet. Et opus hocce aggressurus motus medios solis & lunæ ad tempus meridianum in observatorio regio *Grenovicensi*, die ultimo mensis *Decembris* anni 1700. st. vet. non incommode sequentes adhibebit: nempe motum medium solis ♑ $20^{gr.}$ 43′. 40″, & apogæi ejus ♋ $7^{gr.}$ 44′. 30″, & motum medium lunæ ♒ $15^{gr.}$ 21′. 00″, & apogæi ejus ♓ $8^{gr.}$ 20′. 00″, & nodi ascendentis ♌ $27^{gr.}$ 24′. 20″; & differentiam meridianorum observatorii hujus & observatorii regii *Parisiensis* $0^{hor.}$ $9^{min.}$ $20^{sec.}$ motus autem medii lunæ & apogæi ejus nondum satis accurate habentur.

PROPOSITIO XXXVI. PROBLEMA XVII.

Invenire vim solis ad mare movendum.

Solis vis *ML* seu *PT*, in quadraturis lunaribus, ad perturbandos motus lunares erat (per Prop. xxv. hujus) ad vim gravitatis apud nos, ut 1 ad 638092,6. Et vis *TM*—*LM* seu 2 *PK* in syzygiis lunaribus est duplo major. Hæ autem vires, si descendatur ad superficiem terræ, diminuuntur in ratione distantiarum a centro terræ, id est, in ratione $60\frac{1}{2}$ ad 1; ideoque vis prior in superficie terræ est ad vim gravitatis ut 1 ad 38604600. Hac vi mare deprimitur in locis, quæ 90 gradibus distant a sole. Vi altera, quæ duplo major est, mare elevatur & sub sole & in regione soli opposita. Summa



virium est ad vim gravitatis ut 1 ad 12868200. Et quoniam vis eadem eundem ciet motum, sive ea deprimat aquam in regionibus quæ 90

90 gradibus distant a sole, sive elevet eandem in regionibus sub sole & soli oppositis, hæc summa erit tota solis vis ad mare agitandum; & eundem habebit effectum, ac si tota in regionibus sub sole & soli oppositis mare elevaret, in regionibus autem quæ 90 gradibus distant a sole nil ageret.

Hæc est vis solis ad mare ciendum in loco quovis dato, ubi sol tam in vertice loci versatur quam in mediocri sua distantia a terra. In aliis solis positionibus vis ad mare attollendum est ut sinus versus duplæ altitudinis solis supra horizontem loci directe & cubus distantiæ solis a terra inverse.

Corol. Cum vis centrifuga partium terræ a diurno terræ motu oriunda, quæ est ad vim gravitatis ut 1 ad 289, efficiat ut altitudo aquæ sub æquatore superet ejus altitudinem sub polis mensura pedum *Parisiensium* 85472, ut supra in prop. xix; vis solaris de qua egimus, cum sit ad vim gravitatis ut 1 ad 12868200, atque ideo ad vim illam centrifugam ut 289 ad 12868200 seu 1 ad 44527, efficiet ut altitudo aquæ in regionibus sub sole & soli oppositis superet altitudinem ejus in locis, quæ 90 gradibus distant a sole, mensura tantum pedis unius *Parisiensis* & digitorum undecim cum tricesima parte digiti. Est enim hæc mensura ad mensuram pedum 85472 ut 1 ad 44527.

PROPOSITIO XXXVII. PROBLEMA XVIII.

Invenire vim lunæ ad mare movendum.

Vis lunæ ad mare movendum colligenda est ex ejus proportione ad vim solis, & hæc proportio colligenda est ex proportione motuum maris, qui ab his viribus oriuntur. Ante ostium fluvii *Avonæ* ad lapidem tertium infra *Bristolium*, tempore verno & autumnali totus aquæ ascensus in conjunctione & oppositione luminarium, observante *Samuele Sturmio*, est pedum plus minus 45, in quadraturis autem est pedum tantum 25. Altitudo prior ex summa virium, posterior ex earundem differentia oritur. Solis igitur & lunæ in æquatore versantium & mediocriter a terra distantium sunto vires S & L, & erit L+S ad L−S ut 45 ad 25, seu 9 ad 5.

In portu *Plymuthi* æstus maris ex observatione *Samuelis Colepressi* ad pedes plus minus sexdecim altitudine mediocri attollitur, ac tempore verno & autumnali altitudo æstus in syzygiis superare potest altitudinem ejus in quadraturis pedibus plus septem vel octo. Si maxima harum altitudinum differentia sit pedum novem, erit L+S ad L—S ut $20\frac{1}{2}$ ad $11\frac{1}{2}$ seu 41 ad 23. Quæ proportio satis congruit cum priore. Ob magnitudinem æstus in portu *Bristoliæ*, observationibus *Sturmii* magis fidendum esse videtur, ideoque donec aliquid certius constiterit, proportionem 9 ad 5 usurpabimus.

Cæterum ob aquarum reciprocos motus, æstus maximi non incidunt in ipsas luminarium syzygias, sed sunt tertii a syzygiis ut dictum fuit, seu proxime sequuntur tertium lunæ post syzygias appulsum ad meridianum loci, vel potius (ut a *Sturmio* notatur) sunt tertii post diem novilunii vel plenilunii, seu post horam a novilunio vel plenilunio plus minus duodecimam, ideoque incidunt in horam a novilunio vel plenilunio plus minus quadragesimam tertiam. Incidunt vero in hoc portu in horam septimam circiter ab appulsu lunæ ad meridianum loci; ideoque proxime sequuntur appulsum lunæ ad meridianum, ubi luna distat a sole vel ab oppositione solis gradibus plus minus octodecim vel novemdecim in consequentia. Æstas & hyems maxime vigent, non in ipsis solstitiis, sed ubi sol distat a solstitiis decima circiter parte totius circuitus, seu gradibus plus minus 36 vel 37. Et similiter maximus æstus maris oritur ab appulsu lunæ ad meridianum loci, ubi luna distat a sole decima circiter parte motus totius ab æstu ad æstum. Sit distantia illa graduum plus minus $18\frac{1}{2}$. Et vis solis in hac distantia lunæ a syzygiis & quadraturis, minor erit ad augendum & ad minuendum motum maris a vi lunæ oriundum, quam in ipsis syzygiis & quadraturis, in ratione radii ad sinum complementi distantiæ hujus duplicatæ seu anguli graduum 37, hoc est, in ratione 10000000 ad 7986355. Ideoque in analogia superiore pro S scribi debet 0,7986355 S.

Sed & vis lunæ in quadraturis, ob declinationem lunæ ab æquatore, diminui debet. Nam luna in quadraturis, vel potius in gradu $18\frac{1}{2}$ post quadraturas, in declinatione graduum plus minus 22. 13′ versatur. Et luminaris ab æquatore declinantis vis ad mare movendum

vendum diminuitur in duplicata ratione sinus complementi declinationis quamproxime. Et propterea vis lunæ in his quadraturis est tantum 0,8570327 L. Est igitur L+0,7986355 S ad 0,8570327 L—0,7986355 S ut 9 ad 5.

Præterea diametri orbis, in quo luna sine eccentricitate moveri deberet, sunt ad invicem ut 69 ad 70; ideoque distantia lunæ a terra in syzygiis est ad distantiam ejus in quadraturis ut 69 ad 70, cæteris paribus. Et distantiæ ejus in gradu $18\frac{1}{2}$ a syzygiis, ubi æstus maximus generatur, & in gradu $18\frac{1}{2}$ a quadraturis, ubi æstus minimus generatur, sunt ad mediocrem ejus distantiam ut 69,098747 & 69,897345 ad $69\frac{1}{2}$. Vires autem lunæ ad mare movendum sunt in triplicata ratione distantiarum inverse, ideoque vires in maxima & minima harum distantiarum sunt ad vim in mediocri distantia ut 0,9830427 & 1,017522 ad 1. Unde fit 1,017522 L +0,7986355 S ad 0,9830427 × 0,8570327 L—0,7986355 S ut 9 ad 5. Et S ad L ut 1 ad 4,4815. Itaque cum vis solis sit ad vim gravitatis ut 1 ad 12868200, vis lunæ erit ad vim gravitatis ut 1 ad 2871400.

Corol. 1. Cum aqua vi solis agitata ascendat ad altitudinem pedis unius & undecim digitorum cum tricesima parte digiti, eadem vi lunæ ascendet ad altitudinem octo pedum & digitorum $7\frac{5}{22}$, & vi utraque ad altitudinem pedum decem cum semisse, & ubi luna est in perigæo ad altitudinem pedum duodecim cum semisse & ultra, præsertim ubi æstus ventis spirantibus adjuvatur. Tanta autem vis ad omnes maris motus excitandos abunde sufficit, & quantitati motuum probe respondet. Nam in maribus quæ ab oriente in occidentem late patent, uti in mari *Pacifico*, & maris *Atlantici* & *Æthiopici* partibus extra tropicos, aqua attolli solet ad altitudinem pedum sex, novem, duodecim vel quindecim. In mari autem *Pacifico*, quod profundius est & latius patet, æstus dicuntur esse majores quam in *Atlantico* & *Æthiopico*. Etenim ut plenus sit æstus, latitudo maris ab oriente in occidentem non minor esse debet quam graduum nonaginta. In mari *Æthiopico* ascensus aquæ intra tropicos minor est quam in zonis temperatis, propter angustiam maris inter *Africam* & australem partem *Americæ*. In medio mari aqua nequit ascendere, nisi ad littus utrumque & orientale & occidentale simul descendat:

De Mundi Systemate

cum tamen vicibus alternis ad littora illa in maribus noſtris anguſtis deſcendere debeat. Ea de cauſa fluxus & refluxus in inſulis, quæ a littoribus longiſſime abſunt, perexiguus eſſet ſolet. In portubus quibuſdam, ubi aqua cum impetu magno per loca vadoſa, ad ſinus alternis vicibus implendos & evacuandos, influere & effluere cogitur, fluxus & refluxus debent eſſe ſolito majores, uti ad *Plymuthum* & pontem *Chepſtowæ* in *Anglia*; ad montes *S. Michaelis* & urbem *Abrincatuorum* (vulgo *Auranches*) in *Normannia*; ad *Cambaiam* & *Pegu* in *India* orientali. His in locis mare, magna cum velocitate accedendo & recedendo, littora nunc inundat nunc arida relinquit ad multa millaria. Neque impetus influendi & remeandi prius frangi poteſt, quam aqua attollitur vel deprimitur ad pedes 30, 40, vel 50 & amplius. Et par eſt ratio fretorum oblongorum & vadoſorum, uti *Magellanici* & ejus quo *Anglia* circundatur. Æſtus in hujuſmodi portubus & fretis per impetum curſus & recurſus ſupra modum augetur. Ad littora vero quæ deſcenſu præcipiti ad mare profundum & apertum ſpectant, ubi aqua ſine impetu effluendi & remeandi attolli & ſubſidere poteſt, magnitudo æſtus reſpondet viribus ſolis & lunæ.

Corol. 2. Cum vis lunæ ad mare movendum ſit ad vim gravitatis ut 1 ad 2871400, perſpicuum eſt quod vis illa ſit longe minor quam quæ vel in experimentis pendulorum, vel in ſtaticis aut hydroſtaticis quibuſcunque ſentiri poſſit. In æſtu ſolo marino hæc vis ſenſibilem edit effectum.

Corol. 3. Quoniam vis lunæ ad mare movendum eſt ad ſolis vim conſimilem ut 4,4815 ad 1, & vires illæ (per corol. 14. prop. LXVI. lib. I.) ſunt ut denſitates corporum lunæ & ſolis & cubi diametrorum apparentium conjunctim; denſitas lunæ erit ad denſitatem ſolis ut 4,4815 ad 1 directe, & cubus diametri lunæ ad cubum diametri ſolis inverſe: id eſt (cum diametri mediocres apparentes lunæ & ſolis ſint $31'. 16''\frac{1}{2}$ & $32'. 12''$) ut 4891 ad 1000. Denſitas autem ſolis erat ad denſitatem terræ ut 1000 ad 4000; & propterea denſitas lunæ eſt ad denſitatem terræ ut 4891 ad 4000 ſeu 11 ad 9. Eſt igitur corpus lunæ denſius & magis terreſtre quam terra noſtra.

Corol. 4. Et cum vera diameter lunæ ex obſervationibus aſtronomicis ſit ad veram diametrum terræ ut 100 ad 365; erit maſſa lunæ ad maſſam terræ ut 1 ad 39,788.

Corol. 5. Et gravitas acceleratrix in ſuperficie lunæ erit quaſi triplo minor quam gravitas acceleratrix in ſuperficie terræ.

Corol. 6. Et diſtantia centri lunæ a centro terræ erit ad diſtantiam centri lunæ a communi gravitatis centro terræ & lunæ, ut 40,788 ad 39,788.

Corol. 7. Et mediocris diſtantia centri lunæ a centro terræ in octantibus lunæ erit ſemidiametrorum maximarum terræ $60\frac{2}{5}$ quamproxime. Nam terræ ſemidiameter maxima fuit pedum *Pariſienſium* 19658600, & mediocris diſtantia centrorum terræ & lunæ, ex hujuſmodi diametris $60\frac{2}{5}$ conſtans, æqualis eſt pedibus 1187379440. Et hæc diſtantia (per corollarium ſuperius) eſt ad diſtantiam centri lunæ a communi gravitatis centro terræ & lunæ, ut 40,788 ad 39,788: ideoque diſtantia poſterior eſt pedum 1158268534. Et cum luna revolvatur, reſpectu fixarum, diebus 27, horis 7, & minutis primis $43\frac{4}{9}$; ſinus verſus anguli, quem luna tempore minuti unius primi deſcribit, eſt 12752341, exiſtente radio 1000,000000,000000. Et ut radius eſt ad hunc ſinum verſum, ita ſunt pedes 1158268534 ad pedes 14,7706353. Luna igitur vi illa, qua retinetur in orbe, cadendo in terram, tempore minuti unius primi deſcribet pedes 14,7706353. Et augendo hanc vim in ratione $178\frac{29}{40}$ ad $177\frac{29}{40}$, habebitur vis tota gravitatis in orbe lunæ per Corol. Prop. III. Et hac vi luna cadendo tempore minuti unius primi deſcribet pedes 14,8538067. Et ad ſexageſimam partem diſtantiæ lunæ a centro terræ, id eſt ad diſtantiam pedum 197896573 a centro terræ, corpus grave tempore minuti unius ſecundi cadendo deſcribet etiam pedes 14,8538067. Ideoque ad diſtantiam pedum 19615800, quæ ſunt terræ ſemidiameter mediocris, grave cadendo deſcribet pedes 15,11175, ſeu pedes 15, dig. 1, & lin. $4\frac{1}{11}$. Hic erit deſcenſus corporum in latitudine graduum 45. Et per tabulam præcedentem in prop. xx. deſcriptam, deſcenſus erit paulo major in latitudine *Lutetiæ Pariſiorum* exiſtente exceſſu quaſi $\frac{2}{3}$ partium lineæ. Gravia igitur per hoc computum in latitudine *Lutetiæ* cadendo in vacuo deſcribent tempore unius ſecundi pedes *Pariſienſes* 15, dig. 1, & lin. $4\frac{25}{33}$ circiter. Et ſi gravi-

tas

tas minuatur auferendo vim centrifugam, quæ oritur a motu diurno terræ in illa latitudine; gravia ibi cadendo describent tempore minuti unius secundi pedes 15, dig. 1, & lin. $1\frac{1}{9}$. Et hac velocitate gravia cadere in latitudine *Lutetiæ* supra ostensum est ad prop. iv, & xix.

Corol. 8. Distantia mediocris centrorum terræ & lunæ in syzygiis lunæ est sexaginta semidiametrorum maximarum terræ, dempta tricesima parte semidiametri circiter. Et in quadraturis lunæ distantia mediocris eorundem centrorum est $60\frac{5}{9}$ semidiametrorum terræ. Nam hæ duæ distantiæ sunt ad distantiam mediocrem lunæ in octantibus ut 69 & 70 ad $69\frac{1}{2}$ per prop. xxviii.

Corol. 9. Distantia mediocris centrorum terræ & lunæ in syzygiis lunæ est sexaginta semidiametrorum mediocrium terræ cum decima parte semidiametri. Et in quadraturis lunæ distantia mediocris eorundem centrorum est sexaginta & unius semidiametrorum mediocrium terræ, dempta tricesima parte semidiametri.

Corol. 10. In syzygiis lunæ parallaxis ejus horizontalis mediocris in latitudinibus graduum 0, 30, 38, 45, 52, 60, 90, est 57'. 20", 57'. 16", 57'. 14", 57'. 12", 57'. 10", 57'. 8", 57'. 4" respective.

In his computationibus attractionem magneticam terræ non consideravi, cujus utique quantitas perparva est & ignoratur. Siquando vero hæc attractio investigari poterit, & mensuræ graduum in meridiano, ac longitudines pendulorum isochronorum in diversis parallelis, legesque motuum maris, & parallaxis lunæ cum diametris apparentibus solis & lunæ ex phænomenis accuratius determinatæ fuerint: licebit calculum hunc omnem accuratius repetere.

PROPOSITIO XXXVIII. PROBLEMA XIX.

Invenire figuram corporis lunæ.

Si corpus lunare fluidum esset ad instar maris nostri, vis terræ ad fluidum illud in partibus & citimis & ultimis elevandum esset ad vim lunæ, qua mare nostrum in partibus & sub luna & lunæ oppositis attollitur, ut gravitas acceleratrix lunæ in terram ad gravitatem acceleratricem terræ in lunam, & diameter lunæ ad diametrum terræ

conjunctim;

conjunctim; id est, ut 39,788 ad 1 & 100 ad 365 conjunctim, seu 1081 ad 100. Unde cum mare nostrum vi lunæ attollatur ad pedes $8\frac{3}{5}$, fluidum lunare vi terræ attolli deberet ad pedes 93. Eaque de causa figura lunæ sphærois esset, cujus maxima diameter producta transiret per centrum terræ, & superaret diametros perpendiculares excessu pedum 186. Talem igitur figuram luna affectat, eamque sub initio induere debuit. *Q. E. I.*

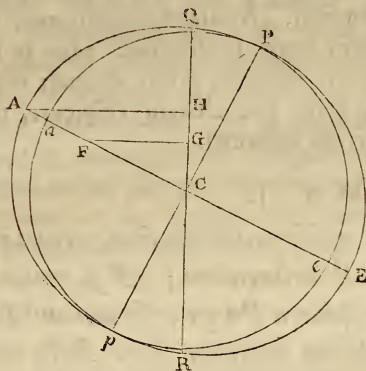
Corol. Inde vero fit ut eadem semper lunæ facies in terram obvertatur. In alio enim situ corpus lunare quiescere non potest, sed ad hunc situm oscillando semper redibit. Attamen oscillationes, ob parvitatem virium agitantium, essent longe tardissimæ: adeo ut facies illa, quæ terram semper respicere deberet, possit alterum orbis lunaris umbilicum (ob rationem in prop. xvii allatam) respicere, neque statim abinde retrahi & in terram converti.

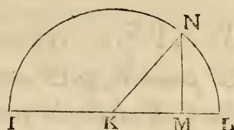
LEMMA I.

Si APEp *terram designet uniformiter densam, centroque* C *&* *polis* P, p *&* *æquatore* AE *delineatam; &* *si centro* C *radio* CP *describi intelligatur sphæra* Pape; *sit autem* QR *planum, cui recta a centro solis ad centrum terræ ducta normaliter insistit; &* *terræ totius exterioris* PapAPepE, *quæ sphæra modo descripta altior est, particulæ singulæ conentur recedere hinc inde a plano* QR, *sitque conatus particulæ cujusque ut ejusdem distantia a plano: Dico primo, quod tota particularum omnium in æquatoris circulo* AE, *extra globum uniformiter per totum circuitum in morem annuli dispositarum, vis &* *efficacia ad terram circum centrum ejus rotandam, sit ad totam particularum totidem in æquatoris puncto* A, *quod a plano* QR *maxime distat, consistentium vim &* *efficaciam, ad terram consimili motu circulari circum centrum ejus movendam, ut unum ad duo. Et motus iste circularis circum axem, in communi sectione æquatoris &* *plani* QR *jacentem, peragetur.*

Nam

Nam centro *K* diametro *IL* deſcribatur ſemicirculus *INLK*. Dividi intelligatur ſemicircumferentia *INL* in partes innumeras æquales, & a partibus ſingulis *N* ad diametrum *IL* demittantur ſinus *NM*. Et ſumma quadratorum ex ſinibus omnibus *NM* æqualis erit ſummæ quadratorum ex ſinibus *KM*, & ſumma utraque æqualis erit ſummæ quadratorum ex totidem ſemidiametris *KN*; ideoque ſumma quadratorum ex omnibus *NM* erit duplo minor quam ſumma quadratorum ex totidem ſemidiametris *KN*.





Jam dividatur perimeter circuli *AE* in particulas totidem æquales, & ab earum unaquaque *F* ad planum *QR* demittatur perpendiculum *FG*, ut & a puncto *A* perpendiculum *AH*. Et vis, qua particula *F* recedit a plano *QR*, erit ut perpendiculum illud *FG* per hypotheſin, & hæc vis ducta in diſtantiam *CG* erit efficacia particulæ *F* ad terram circum centrum ejus convertendam. Ideoque efficacia particulæ in loco *F*, erit ad efficaciam particulæ in loco *A*, ut $FG \times GC$ ad $AH \times HC$, hoc eſt, ut FCq ad ACq; & propterea efficacia tota particularum omnium in locis ſuis *F* erit ad efficaciam particularum totidem in loco *A*, ut ſumma omnium FCq ad ſummam totidem ACq, hoc eſt (per jam demonſtrata) ut unum ad duo. *Q. E. D.*

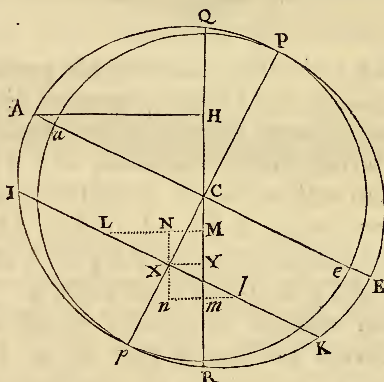
Et quoniam particulæ agunt recedendo perpendiculariter a plano *QR*, idque æqualiter ab utraque parte hujus plani: eædem convertent

tent circumferentiam circuli æquatoris, eique inhærentem terram, circum axem tam in plano illo *QR* quam in plano æquatoris jacentem.

LEMMA II.

Iisdem positis: dico secundo quod vis & efficacia tota particularum omnium extra globum undique sitarum, ad terram circum axem eundem rotandam, sit ad vim totam particularum totidem, in æquatoris circulo AE *uniformiter per totum circuitum in morem annuli dispositarum, ad terram consimili motu circulari movendam, ut duo ad quinque.*

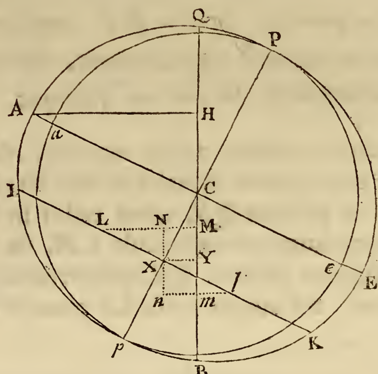
Sit enim *IK* circulus quilibet minor æquatori *AE* parallelus, sintque *L, l* particulæ duæ quævis æquales in hoc circulo extra globum *Pape* sitæ. Et si in planum *QR*, quod radio in solem ducto perpendiculare est, demittantur perpendicula *LM, lm*: vires totæ, quibus particulæ illæ fugiunt planum *QR*, proportionales erunt perpendiculis illis *LM, lm*. Sit autem recta *Ll* plano *Pape* parallela &



bisecetur eadem in *X*, & per punctum *X* agatur *Nn*, quæ parallela sit plano *QR* & perpendiculis *LM, lm* occurrat in *N* ac *n*, & in planum *QR* demittatur perpendiculum *XY*. Et particularum *L* & *l* vires contrariæ, ad terram in contrarias partes rotandam, sunt ut $LM \times MC$ & $lm \times mC$, hoc est, ut $LN \times MC + NM \times MC$ & ln

De Mundi Systemate

$\times mC - nm \times mC$, seu $LN \times MC + NM \times MC$ & $LN \times mC - NM \times mC$: & harum differentia $LN \times Mm - NM \times \overline{MC + mC}$ est vis particularum ambarum simul sumptarum ad terram rotandam. Hujus differentiæ pars affirmativa $LN \times Mm$ seu $2\, LN \times NX$ est ad particularum duarum ejusdem magnitudinis in A consistentium vim $2\, AH \times HC$, ut LXq ad ACq. Et pars negativa $NM \times \overline{MC + mC}$ seu $2\, XY \times CY$ ad particularum earundem in A consistentium vim



$2\, AH \times HC$, ut CXq ad ACq. Ac proinde partium differentia, id est, particularum duarum L & l simul sumptarum vis ad terram rotandam est ad vim particularum duarum iisdem æqualium & in loco A consistentium ad terram itidem rotandam, ut $LXq - CXq$ ad ACq. Sed si circuli IK circumferentia IK dividatur in particulas innumeras æquales L, erunt omnes LXq ad totidem IXq ut 1 ad 2 (per lem. 1.) atque ad totidem ACq, ut IXq ad $2\, ACq$; & totidem CXq ad totidem ACq ut $2\, CXq$ ad $2\, ACq$. Quare vires conjunctæ particularum omnium in circuitu circuli IK sunt ad vires conjunctas particularum totidem in loco A, ut $IXq - 2\, CXq$ ad $2\, ACq$: & propterea (per lem. 1.) ad vires conjunctas particularum totidem in circuitu circuli AE, ut $IXq - 2\, CXq$ ad ACq.

Jam vero si sphæræ diameter Pp dividatur in partes innumeras æquales, quibus insistant circuli totidem IK; materia in perimetro circuli cujusque IK erit ut IXq: ideoque vis materiæ illius ad terram

ram rotandam, erit ut IXq in $IXq - 2\,CXq$. Et vis materiæ ejusdem, si in circuli AE perimetro consisteret, esset ut IXq in ACq. Et propterea vis particularum omnium materiæ totius, extra globum in perimetris circulorum omnium consistentis, est ad vim particularum totidem in perimetro circuli maximi AE consistentis, ut omnia IXq in $IXq - 2\,CXq$ ad totidem IXq in ACq, hoc est, ut omnia $ACq - CXq$ in $ACq - 3\,CXq$ ad totidem $ACq - CXq$ in ACq, id est, ut omnia $ACqq - 4\,ACq \times CXq + 3\,CXqq$ ad totidem $ACqq - ACq \times CXq$, hoc est, ut tota quantitas fluens, cujus fluxio est $ACqq - 4\,ACq \times CXq + 3\,CXqq$, ad totam quantitatem fluentem, cujus fluxio est $ACqq - ACq \times CXq$; ac proinde per methodum fluxionum, ut $ACqq \times CX - \frac{4}{3}\,ACq \times CX\ cub + \frac{3}{5}\,CXqc$ ad $ACqq \times CX - \frac{1}{3}\,ACq \times CX\ cub$, id est, si pro CX scribatur tota Cp vel AC, ut $\frac{4}{15}\,ACqc$ ad $\frac{2}{3}\,ACqc$. hoc est, ut duo ad quinque. *Q.E.D.*

LEMMA III.

Iisdem positis: dico tertio quod motus terræ totius circum axem jam ante descriptum, ex motibus particularum omnium compositus, erit ad motum annuli prædicti circum axem eundem in ratione, quæ componitur ex ratione materiæ in terra ad materiam in annulo, & ratione trium quadratorum ex arcu quadrantali circuli cujuscunque ad duo quadrata ex diametro; id est, in ratione materiæ ad materiam & numeri 925275 *ad numerum* 1000000.

Est enim motus cylindri circum axem suum immotum revolventis ad motum sphæræ inscriptæ & simul revolventis, ut quælibet quatuor æqualia quadrata ad tres ex circulis sibi inscriptis: & motus cylindri ad motum annuli tenuissimi, sphæram & cylindrum ad communem eorum contactum ambientis, ut duplum materiæ in cylindro ad triplum materiæ in annulo; & annuli motus iste circum axem cylindri uniformiter continuatus, ad ejusdem motum uniformem circum diametrum propriam, eodem tempore periodico factum, ut circumferentia circuli ad duplum diametri.

HYPOTHESIS II.

Si annulus prædictus terra omni reliqua sublata, solus in orbe terræ, motu annuo circa solem ferretur, & interea circa axem suum, ad planum eclipticæ in angulo graduum $23\frac{1}{2}$ inclinatum, motu diurno revolveretur: idem foret motus punctorum æquinoctialium, sive annulus iste fluidus esset, sive is ex materia rigida & firma constaret.

PROPOSITIO XXXIX. PROBLEMA XX.

Invenire præcessionem æquinoctiorum.

Motus mediocris horarius nodorum lunæ in orbe circulari, ubi nodi sunt in quadraturis, erat $16''.\ 35'''.\ 16^{iv}.\ 36^{v}$, & hujus dimidium $8''.\ 17'''.\ 38^{iv}.\ 18^{v}$. (ob rationes supra explicatas) est motus medius horarius nodorum in tali orbe; fitque anno toto sidereo $20^{gr}.\ 11'.\ 46''$. Quoniam igitur nodi lunæ in tali orbe conficerent annuatim $20^{gr}.\ 11'.\ 46''$ in antecedentia; & si plures essent lunæ, motus nodorum cujusque (per corol. 16. prop. LXVI. lib. I.) forent ut tempora periodica; si luna spatio diei siderei juxta superficiem terræ revolveretur, motus annuus nodorum foret ad $20^{gr}.\ 11'.\ 46''$ ut dies sidereus horarum 23. 56′ ad tempus periodicum lunæ dierum 27. 7 hor. 43′; id est, ut 1436 ad 39343. Et par est ratio nodorum annuli lunarum terram ambientis; sive lunæ illæ se mutuo non contingant, sive liquescant & in annulum continuum formentur, sive denique annulus ille rigescat & inflexibilis reddatur.

Fingamus igitur quod annulus iste, quoad quantitatem materiæ, æqualis sit terræ omni *PapAPepE* quæ globo *Pape* superior est; (*Vid. fig. pag.* 474.) & quoniam globus iste est ad terram illam superiorem ut *aCqu.* ad *ACqu.—aCqu.* id est (cum terræ semidiameter minor *PC* vel *aC* sit ad semidiametrum majorem *AC* ut 229 ad 230) ut 52441 ad 459; si annulus iste terram secundum æquatorem cingeret & uterque simul circa diametrum annuli revolveretur, motus annuli esset ad motum globi interioris (per hujus lem. III) ut 459 ad 52441 & 1000000 ad 925275 conjunctim, hoc est, ut 4590 ad 485223; ideoque motus annuli esset ad summam motuum annuli ac globi, ut 4590 ad 489813. Unde si annulus globo adhæreat, & motum suum,

quo

quo ipſius nodi ſeu puncta æquinoctialia regrediuntur, cum globo communicet: motus qui reſtabit in annulo erit ad ipſius motum priorem, ut 4590 ad 489813; & propterea motus punctorum æquinoctialium diminuetur in eadem ratione. Erit igitur motus annuus punctorum æquinoctialium corporis ex annulo & globo compoſiti ad motum 20gr. 11′. 46″, ut 1436 ad 39343 & 4590 ad 489813 conjunctim, id eſt, ut 100 ad 292369. Vires autem quibus nodi lunarum (ut ſupra explicui) atque ideo quibus puncta æquinoctialia annuli regrediuntur (id eſt vires 3 *IT in fig. pag.* 437 & 438) ſunt in ſingulis particulis ut diſtantiæ particularum a plano *QR*, & his viribus particulæ illæ planum fugiunt; & propterea (per lem. II.) ſi materia annuli per totam globi ſuperficiem in morem figuræ *Pap APepE* ad ſuperiorem illam terræ partem conſtituendam ſpargeretur, vis & efficacia tota particularum omnium ad terram circa quamvis æquatoris diametrum rotandam, atque ideo ad movenda puncta æquinoctialia, evaderet minor quam prius in ratione 2 ad 5. Ideoque annuus æquinoctiorum regreſſus jam eſſet ad 20gr. 11′. 46″, ut 10 ad 73092: ac proinde fieret 9″. 56‴. 50iv.

Cæterum hic motus ob inclinationem plani æquatoris ad planum eclipticæ minuendus eſt, idque in ratione ſinus 91706 (qui ſinus eſt complementi graduum $23\frac{1}{2}$) ad radium 100000. Qua ratione motus iſte jam fiet 9″. 7‴. 20iv. Hæc eſt annua præceſſio æquinoctiorum a vi ſolis oriunda.

Vis autem lunæ ad mare movendum erat ad vim ſolis, ut 4,4815 ad 1 circiter. Et vis lunæ ad æquinoctia movenda eſt ad vim ſolis in eadem proportione. Indeque prodit annua æquinoctiorum præceſſio a vi lunæ oriunda 40″. 52‴. 52iv, ac tota præceſſio annua a vi utraque oriunda 50″. 00‴. 12iv. Et hic motus cum phænomenis congruit. Nam præceſſio æquinoctiorum ex obſervationibus aſtronimicis eſt annuatim minutorum ſecundorum plus minus quinquaginta.

Si altitudo terræ ad æquatorem ſuperet altitudinem ejus ad polos, milliaribus pluribus quam $17\frac{1}{6}$, materia ejus rarior erit ad circumferentiam quam ad centrum: & præceſſio æquinoctiorum ob altitudinem illam augeri, ob raritatem diminui debet.

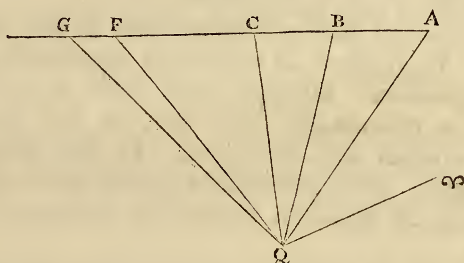
Deſcripſimus jam ſyſtema ſolis, terræ, lunæ, & planetarum: ſupereſt ut de cometis nonnulla adjiciantur.

LEMMA

LEMMA IV.

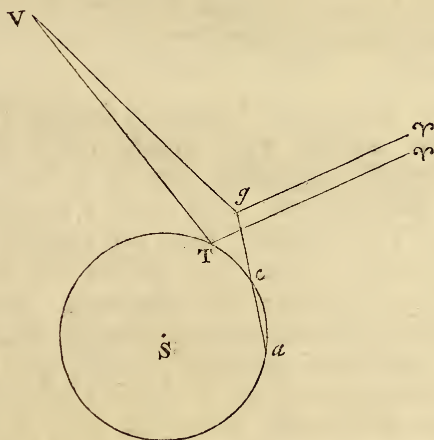
Cometas esse luna superiores & in regione planetarum versari.

Ut defectus parallaxeos diurnæ extulit cometas supra regiones sublunares, sic ex parallaxi annua convincitur eorum descensus in regiones planetarum. Nam cometæ, qui progrediuntur secundum ordinem signorum, sunt omnes sub exitu apparitionis aut solito tardiores aut retrogradi, si terra est inter ipsos & solem; at justo celeriores si terra vergit ad oppositionem. Et contra, qui pergunt contra ordinem signorum sunt justo celeriores in fine apparitionis, si terra versatur inter ipsos & solem; & justo tardiores vel retrogradi, si terra sita est ad contrarias partes. Contingit hoc maxime ex motu terræ in vario ipsius situ, perinde ut fit in planetis, qui pro motu terræ vel conspirante vel contrario nunc retrogradi sunt, nunc tardius progredi videntur, nunc vero celerius. Si terra pergit ad eandem partem cum cometa, & motu angulari circa solem tanto celerius fertur, ut recta per terram & cometam perpetuo ducta convergat ad partes ultra cometam, cometa e terra spectatus ob motum suum tardiorem apparet esse retrogradus; sin terra tardius fertur,



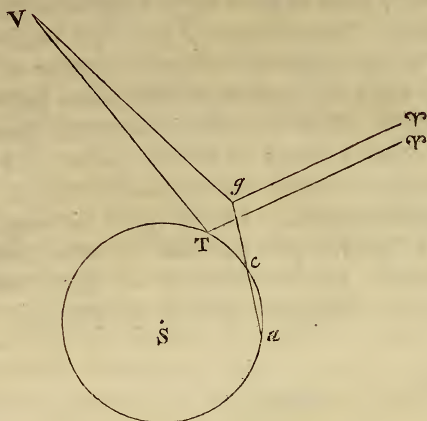
motus cometæ (detracto motu terræ) fit saltem tardior. At si terra pergit in contrarias partes, cometa exinde velocior apparet. Ex acceleratione autem vel retardatione vel motu retrogrado distantia cometæ in hunc modum colligitur. Sunto ♈*QA*, ♈*QB*, ♈*QC* observatæ tres longitudines cometæ sub initio motus, sitque ♈*QF* longi-

longitudo ultimo obſervata, ubi cometa videri deſinit. Agatur recta *ABC*, cujus partes *AB*, *BC* rectis *QA* & *QB*, *QB* & *QC* interjectæ, ſint ad invicem ut tempora inter obſervationes tres primas. Producatur *AC* ad *G*, ut ſit *AG* ad *AB* ut tempus inter obſervationem primam & ultimam ad tempus inter obſervationem primam & ſecundam, & jungatur *QG*. Et ſi cometa moveretur uniformiter in linea recta, atque terra vel quieſceret, vel etiam in linea recta uniformi cum motu progrederetur; foret angulus ♈*QG* longitudo cometæ tempore obſervationis ultimæ. Angulus igitur *FQG*, qui longitudinum differentia eſt, oritur ab inæqualitate motuum cometæ ac terræ. Hic autem angulus, ſi terra & cometa in contrarias partes moventur, additur angulo ♈*QG*, & ſic motum apparentem cometæ velociorem reddit: ſin cometa pergit in eaſdem partes cum terra, eidem ſubducitur, motumque cometæ vel tardiorem reddit, vel forte retrogradum; uti modo expoſui. Oritur igitur hic angulus præcipue ex motu terrræ, & idcirco pro parallaxi cometæ merito habendus eſt, neglecto videlicet ejus incremento vel decremento nonnullo, quod a cometæ motu inæquabili in orbe proprio oriri poſſit. Diſ-



tantia vero cometæ ex hac parallaxi ſic colligitur. Deſignet *S* ſolem, *acT* orbem magnum, *a* locum terræ in obſervatione prima, *c* locum

cum terræ in observatione tertia, *T* locum terræ in observatione ultima, & *T*♈ lineam rectam versus principium arietis ductam. Sumatur angulus ♈*TV* æqualis angulo ♈☊*F*, hoc est, æqualis longitudini cometæ ubi terra versatur in *T*. Jungatur *ac*, & producatur ea ad *g*, ut sit *ag* ad *ac* ut *AG* ad *AC*, & erit *g* locus quem terra tempore observationis ultimæ, motu in recta *ac* unifor-



miter continuato, attingeret. Ideoque si ducatur *g*♈ ipsi *T*♈ parallela, & capiatur angulus ♈*gV* angulo ♈☊*G* æqualis, erit hic angulus ♈*gV* æqualis longitudini cometæ e loco *g* spectati; & angulus *TVg* parallaxis erit, quæ oritur a translatione terræ de loco *g* in locum *T*: ac proinde *V* locus erit cometæ in plano eclipticæ. Hic autem locus *V* orbe *Jovis* inferior esse solet.

Idem colligitur ex curvatura viæ cometarum. Pergunt hæc corpora propemodum in circulis maximis quamdiu moventur celerius; at in fine cursus, ubi motus apparentis pars illa, quæ a parallaxi oritur, majorem habet proportionem ad motum totum apparentem, deflectere solent ab his circulis, & quoties terra movetur in unam partem, abire in partem contrariam. Oritur hæc deflexio maxime ex parallaxi, propterea quod respondet motui terræ; & insignis ejus quantitas, meo computo, collocavit disparentes cometas satis longe infra

infra jovem. Unde consequens est quod in perigæis & periheliis, ubi propius adsunt, descendunt sæpius infra orbes martis & inferiorum planetarum.

Confirmatur etiam propinquitas cometarum ex luce capitum. Nam corporis cœlestis a sole illustrati & in regiones longinquas abeuntis, diminuitur splendor in quadruplicata ratione distantiæ: in duplicata ratione videlicet ob auctam corporis distantiam a sole, & in alia duplicata ratione ob diminutam diametrum apparentem. Unde si detur & lucis quantitas & apparens diameter cometæ, dabitur distantia, dicendo quod distantia sit ad distantiam planetæ, in ratione diametri ad diametrum directe & ratione subduplicata lucis ad lucem inverse. Sic minima capillitii cometæ anni 1682 diameter, per tubum opticum sexdecim pedum a *Flamstedio* observata & micrometro mensurata, æquabat 2′. 0″; nucleus autem seu stella in medio capitis vix decimam partem latitudinis hujus occupabat, ideoque lata erat tantum 11″ vel 12″. Luce vero & claritate capitis superabat caput cometæ anni 1680, stellasque primæ vel secundæ magnitudinis æmulabatur. Ponamus saturnum cum annulo suo quasi quadruplo lucidiorem fuisse: & quoniam lux annuli propemodum æquabat lucem globi intermedii, & diameter apparens globi sit quasi 21″, ideoque lux globi & annuli conjunctim æquaret lucem globi, cujus diameter esset 30″: erit distantia cometæ ad distantiam saturni ut 1 ad $\surd 4$ inverse, & 12″ ad 30″ directe, id est, ut 24 ad 30 seu 4 ad 5. Rursus cometa anni 1665 mense aprili, ut auctor est *Hevelius*, claritate sua pene fixas omnes superabat, quinetiam ipsum saturnum, ratione coloris videlicet longe vividioris. Quippe lucidior erat hic cometa altero illo, qui in fine anni præcedentis apparuerat, & cum stellis primæ magnitudinis conferabatur. Latitudo capillitii erat quasi 6′, at nucleus cum planetis ope tubi optici collatus plane minor erat jove, & nunc minor corpore intermedio saturni, nunc ipsi æqualis judicabatur. Porro cum diameter capillitii cometarum raro superet 8′ vel 12′, diameter vero nuclei, seu stellæ centralis sit quasi decima vel forte decima quinta pars diametri capillitii, patet stellas hasce ut plurimum ejusdem esse apparentis magnitudinis cum planetis. Unde cum lux earum cum luce saturni non raro conferri possit, eamque aliquando superet; mani-

 festum

De Mundi Systemate

festum est, quod cometæ omnes in periheliis vel infra saturnum collocandi sint, vel non longe supra. Errant igitur toto cœlo, qui cometas in regionem fixarum prope ablegant: qua certe ratione non magis illustrari deberent a sole nostro, quam planetæ, qui hic sunt, illustrantur a stellis fixis.

Hæc disputavimus non considerando obscurationem cometarum per fumum illum maxime copiosum & crassum, quo caput circundatur, quasi per nubem obtuse semper lucens. Nam quanto obscurius redditur corpus per hunc fumum, tanto propius ad solem accedat necesse est, ut copia lucis a se reflexæ planetas æmuletur. Inde verisimile fit cometas longe infra sphæram saturni descendere, uti ex parallaxi probavimus. Idem vero quam maxime confirmatur ex caudis. Hæ vel ex reflexione fumi sparsi per æthera, vel ex luce capitis oriuntur. Priore casu minuenda est distantia cometarum, ne fumus a capite semper ortus per spatia nimis ampla incredibili cum velocitate & expansione propagetur. In posteriore referenda est lux omnis tam caudæ quam capillitii ad nucleum capitis. Igitur si concipiamus lucem hanc omnem congregari & intra discum nuclei coarctari, nucleus ille jam certe, quoties caudam maximam & fulgentissimam emittit, jovem ipsum splendore suo multum superabit. Minore igitur cum diametro apparente plus lucis emittens, multo magis illustrabitur a sole, ideoque erit soli multo propior. Quinetiam capita sub sole delitescentia, & caudas cum maximas tum fulgentissimas instar trabium ignitarum nonnunquam emittentia, eodem argumento infra orbem veneris collocari debent. Nam lux illa omnis si in stellam congregari supponatur, ipsam venerem ne dicam veneres plures conjunctas quandoque superaret.

Idem denique colligitur ex luce capitum crescente in recessu cometarum a terra solem versus, ac decrescente in eorum recessu a sole versus terram. Sic enim cometa posterior anni 1665 (observante *Hevelio*) ex quo conspici cœpit, remittebat semper de motu suo apparente, ideoque præterierat perigæum; splendor vero capitis nihilominus indies crescebat, usque dum cometa radiis solaribus obtectus desiit apparere. Cometa anni 1683 (observante eodem *Hevelio*) in fine mensis julii, ubi primum conspectus est, tardissime movebatur, minuta prima 40 vel 45 circiter singulis diebus in orbe

suo

ſuo conficiens. Ex eo tempore motus ejus diurnus perpetuo augebatur uſque ad *Sept.* 4. quando evaſit graduum quaſi quinque. Igitur toto hoc tempore cometa ad terram appropinquabat. Id quod etiam ex diametro capitis micrometro menſurata colligitur: quippe quam *Hevelius* reperit *Aug.* 6. eſſe tantum 6′. 5″ incluſa coma, at *Sept.* 2. eſſe 9′. 7″. Caput igitur initio longe minus apparuit quam in fine motus, at initio tamen in vicinia ſolis longe lucidius extitit quam circa finem, ut refert idem *Hevelius*. Proinde toto hoc tempore, ob receſſum ipſius a ſole, quoad lumen decrevit, non obſtante acceſſu ad terram. Cometa anni 1618 circa medium menſis *Decembris*, & iſte anni 1680 circa finem ejuſdem menſis, celerrime movebantur, ideoque tunc erant in perigæis. Verum ſplendor maximus capitum contigit ante duas fere ſeptimanas, ubi modo exierant de radiis ſolaribus; & ſplendor maximus caudarum paulo ante, in majore vicinitate ſolis. Caput cometæ prioris, juxta obſervationes *Cyſati*, *Decemb.* 1. majus videbatur ſtellis primæ magnitudinis, & *Decemb.* 16. (jam in perigæo exiſtens) magnitudine parum, ſplendore ſeu claritate luminis plurimum defecerat. *Jan.* 7. *Keplerus* de capite incertus finem fecit obſervandi. Die 12 menſis *Decemb.* conſpectum & a *Flamſtedio* obſervatum eſt caput cometæ poſterioris in diſtantia novem graduum a ſole; id quod ſtellæ tertiæ magnitudinis vix conceſſum fuiſſet. *Decemb.* 15 & 17 apparuit idem ut ſtella tertiæ magnitudinis, diminutum utique ſplendore nubium juxta ſolem occidentem. *Decemb.* 26. velociſſime motus, inque perigæo propemodum exiſtens, cedebat ori pegaſi, ſtellæ tertiæ magnitudinis. *Jan.* 3. apparebat ut ſtella quartæ, *Jan.* 9. ut ſtella quintæ, *Jan.* 13. ob ſplendorem lunæ creſcentis diſparuit. *Jan.* 25. vix æquabat ſtellas magnitudinis ſeptimæ. Si ſumantur æqualia a perigæo hinc inde tempora, capita quæ temporibus illis in longinquis regionibus poſita, ob æquales a terra diſtantias, æqualiter lucere debuiſſent, in plaga ſolis maxime ſplenduere, ex altera perigæi parte evanuere. Igitur ex magna lucis in utroque ſitu differentia, concluditur magna ſolis & cometæ vicinitas in ſitu priore. Nam lux cometarum regularis eſſe ſolet, & maxima apparere ubi capita velociſſime moventur, atque ideo ſunt in perigæis; niſi quatenus ea major eſt in vicinia ſolis.

De Mundi Systemate

Corol. 1. Splendent igitur cometæ luce solis a se reflexa.

Corol. 2. Ex dictis etiam intelligitur cur cometæ tantopere frequentant regionem solis. Si cernerentur in regionibus longe ultra saturnum, deberent sæpius apparere in partibus soli oppositis. Forent enim terræ viciniores, qui in his partibus versarentur; & sol interpositus obscuraret cæteros. Verum percurrendo historias cometarum, reperi quod quadruplo vel quintuplo plures detecti sunt in hemisphærio solem versus, quam in hemisphærio opposito, præter alios proculdubio non paucos, quos lux solaris obtexit. Nimirum in descensu ad regiones nostras neque caudas emittunt, neque adeo illustrantur a sole, ut nudis oculis se prius detegendos exhibeant, quam sint ipso jove propiores. Spatii autem tantillo intervallo circa solem descripti pars longe major sita est a latere terræ, quod solem respicit; inque parte illa majore cometæ, soli ut plurimum viciniores, magis illuminari solent.

Corol. 3. Hinc etiam manifestum est, quod cœli resistentia destituuntur. Nam cometæ vias obliquas & nonnunquam cursui planetarum contrarias secuti, moventur omnifariam liberrime, & motus suos, etiam contra cursum planetarum diutissime conservant. Fallor ni genus planetarum sint, & motu perpetuo in orbem redeant. Nam quod scriptores aliqui meteora esse volunt, argumentum a capitum perpetuis mutationibus ducentes, fundamento carere videtur. Capita cometarum atmosphæris ingentibus cinguntur; & atmosphæræ inferne densiores esse debent. Unde nubes sunt, non ipsa cometarum corpora, in quibus mutationes illæ visuntur. Sic terra si e planetis spectaretur, luce nubium suarum proculdubio splenderet, & corpus firmum sub nubibus prope delitesceret. Sic cingula jovis in nubibus planetæ illius formata sunt, quæ situm mutant inter se, & firmum jovis corpus per nubes illas difficilius cernitur. Et multo magis corpora cometarum sub atmosphæris & profundioribus & crassioribus abscondi debent.

PRO-

PROPOSITIO XL. THEOREMA XX.

Cometas in sectionibus conicis umbilicos in centro solis habentibus moveri, & radiis ad solem ductis areas temporibus proportionales describere.

Patet per corol. 1. prop. xiii. libri primi, collatum cum prop. viii, xii, & xiii. libri tertii.

Corol. 1. Hinc si cometæ in orbem redeunt; orbes erunt ellipses, & tempora periodica erunt ad tempora periodica planetarum in axium principalium ratione sesquiplicata. Ideoque cometæ maxima ex parte supra planetas versantes, & eo nomine orbes axibus majoribus describentes, tardius revolventur. Ut si axis orbis cometæ sit quadruplo major axe orbis saturni, tempus revolutionis cometæ erit ad tempus revolutionis saturni, id est, ad annos 30, ut $4\sqrt{4}$ (seu 8) ad 1, ideoque erit annorum 240.

Corol. 2. Orbes autem erunt parabolis adeo finitimi, ut eorum vice parabolæ sine erroribus sensibilibus adhiberi possint.

Corol. 3. Et propterea (per corol. 7. prop. xvi. lib. 1.) velocitas cometæ omnis, erit semper ad velocitatem planetæ cujusvis circa solem in circulo revolventis, in subduplicata ratione duplæ distantiæ planetæ a centro solis, ad distantiam cometæ a centro solis quamproxime. Ponamus radium orbis magni, seu ellipseos in qua terra revolvitur semidiametrum maximam esse partium 100000000: & terra motu suo diurno mediocri describet partes 1720212, & motu horario partes $71675\frac{1}{2}$. Ideoque cometa in eadem telluris a sole distantia mediocri, ea cum velocitate quæ sit ad velocitatem telluris ut $\sqrt{2}$ ad 1, describet motu suo diurno partes 2432747, & motu horario partes $101364\frac{1}{2}$. In majoribus autem vel minoribus distantiis, motus tum diurnus tum horarius erit ad hunc motum diurnum & horarium in subduplicata ratione distantiarum reciproce, ideoque datur.

Corol. 4. Unde si latus rectum parabolæ quadruplo majus sit radio orbis magni, & quadratum radii illius ponatur esse partium 100000000: area quam cometa radio ad solem ducto singulis diebus describit,

erit

De Mundi Systemate

erit partium $1216373\frac{1}{2}$, & ſingulis horis area illa erit partium $50682\frac{1}{4}$. Sin latus rectum majus ſit vel minus in ratione quavis, erit area diurna & horaria major vel minor in eadem ratione ſubduplicata.

LEMMA V.

Invenire lineam curvam generis parabolici, quæ per data quotcunque puncta tranſibit.

Sunto puncta illa *A, B, C, D, E, F*, &c. & ab iiſdem ad rectam quamvis poſitione datam *HN* demitte perpendicula quotcunque *AH, BI, CK, DL, EM, FN*.

Caſ. 1. Si punctorum *H, I, K, L, M, N* æqualia ſunt intervalla *HI, IK, KL*, &c. collige perpendiculorum *AH, BI, CK*, &c. differentias primas *b*, 2*b*, 3*b*, 4*b*, 5*b*, &c. ſecundas *c*, 2*c*, 3*c*, 4*c*, &c. tertias *d*, 2*d*, 3*d*, &c. id eſt, ita ut ſit $AH - BI = b$, $BI - CK = 2b$, $CK - DL = 3b$, $DL + EM = 4b$, $-EM + FN = 5b$, &c. dein $b -$

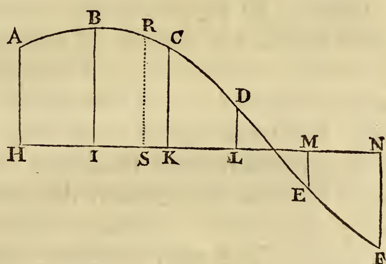
b 2b 3b 4b 5b

c 2c 3c 4c

d 2d 3d

e 2e

f



$2b = c$, &c. & ſic pergatur ad differentiam ultimam, quæ hic eſt *f*. Deinde erecta quacunque perpendiculari *RS*, quæ fuerit ordinatim applicata ad curvam quæſitam: ut inveniatur hujus longitudo, pone intervalla *HI, IK, KL, LM*, &c. unitates eſſe, & dic $AH = a$, $-HS = p$, $\frac{1}{2}p$ in $-IS = q$, $\frac{1}{3}q$ in $+SK = r$, $\frac{1}{4}r$ in $+SL = s$, $\frac{1}{5}s$ in $+SM = t$; pergendo videlicet ad uſque penultimum perpendiculum *ME*, & præponendo ſigna negativa terminis *HS, IS*, &c. qui

jacent

jacent ad partes puncti S versus A, & signa affirmativa terminis SK, SL, &c. qui jacent ad alteras partes puncti S. Et signis probe observatis, erit $RS = a + bp + cq + dr + es + ft$, &c.

Cas. 2. Quod si punctorum H, I, K, L, &c. inæqualia sint intervalla HI, IK, &c. collige perpendiculorum AH, BI, CK, &c. differentias primas per intervalla perpendiculorum divisas b, $2b$, $3b$, $4b$, $5b$; secundas per intervalla bina divisa c, $2c$, $3c$, $4c$, &c. tertias per intervalla terna divisas d, $2d$, $3d$, &c. quartas per intervalla quaterna divisas e, $2e$, &c. & sic deinceps; id est, ita ut sit $b = \frac{AH - BI}{HI}$, $2b = \frac{BI - CK}{IK}$, $3b = \frac{CK - DL}{KL}$, &c. dein $c = \frac{b - 2b}{HK}$, $2c = \frac{2b - 3b}{IL}$, $3c = \frac{3b - 4b}{KM}$, &c. postea $d = \frac{c - 2c}{HL}$, $2d = \frac{2c - 3c}{IM}$, &c. Inventis differentiis, dic $AH = a$, $-HS = p$, p in $-IS = q$, q in $+SK = r$, r in $+SL = s$, s in $+SM = t$; pergendo scilicet ad usque perpendiculum penultimum ME, & erit ordinatim applicata $RS = a + bp + cq + dr + es + ft$, &c.

Corol. Hinc areæ curvarum omnium inveniri possunt quamproxime. Nam si curvæ cujusvis quadrandæ inveniantur puncta aliquot, & parabola per eadem duci intelligatur: erit area parabolæ hujus eadem quamproxime cum area curvæ illius quadrandæ. Potest autem parabola per methodos notissimas semper quadrari Geometrice.

LEMMA VI.

Ex observatis aliquot locis cometæ invenire locum ejus ad tempus quodvis intermedium datum.

Designent HI, IK, KL, LM tempora inter observationes (*in fig. præced.*) HA, IB, KC, LD, ME observatas quinque longitudines cometæ, HS tempus datum inter observationem primam & longitudinem quæsitam. Et si per puncta A, B, C, D, E duci intelligatur curva regularis $ABCDE$; & per lemma superius inveniatur ejus ordinatim applicata RS, erit RS longitudo quæsita.

Eadem methodo ex observatis quinque latitudinibus invenitur latitudo ad tempus datum.

Si

Si longitudinum obſervatarum parvæ ſint differentiæ, puta graduum tantum 4 vel 5; ſuffecerint obſervationes tres vel quatuor ad inveniendam longitudinem & latitudinem novam. Sin majores ſint differentiæ, puta graduum 10 vel 20, debebunt obſervationes quinque adhiberi.

LEMMA VII.

Per datum punctum P *ducere rectam lineam* BC, *cujus partes* PB, PC, *rectis duabus poſitione datis* AB, AC *abſciſſæ, datam habeant rationem ad invicem.*

A puncto illo *P* ad rectarum alterutram *AB* ducatur recta quævis *PD*, & producatur eadem verſus rectam alteram *AC* uſque ad *E*, ut ſit *PE* ad *PD* in data illa ratione. Ipſi *AD* parallela ſit *EC*; & ſi agatur *CPB*, erit *PC* ad *PB* ut *PE* ad *PD*. *Q.E.F.*

LEMMA VIII.

Sit ABC *parabola umbilicum habens* S. *Chorda* AC *biſecta in* I *abſcindatur ſegmentum* ABCI, *cujus diameter ſit*

Iμ

I μ & vertex μ. In I μ producta capiatur μ O æqualis dimidio ipsius I μ. Jungatur OS, & producatur ea ad ξ, ut sit S ξ æqualis 2 SO. Et si cometa B moveatur in arcu CBA, & agatur ξ B secans AC in E: dico quod punctum E abscindet de chorda AC segmentum AE tempori proportionale quamproxime.

Jungatur enim *EO* secans arcum parabolicum *ABC* in *Y*, & agatur μX, quæ tangat eundem arcum in vertice μ, & actæ *EO* occurrat in *X*; & erit area curvilinea $AEX\mu A$ ad aream curvilineam $ACY\mu A$ ut *AE* ad *AC*. Ideoque cum triangulum *ASE* sit ad triangulum *ASC* in eadem ratione, erit area tota $ASEX\mu A$ ad aream totam $ASCY\mu A$ ut *AE* ad *AC*. Cum autem ξO sit ad *SO* ut 3 ad 1, & *EO* ad *XO* in eadem ratione, erit *SX* ipsi *EB* parallela: & propterea si jungatur *BX*, erit triangulum *SEB* triangulo *XEB* æquale. Unde si ad aream $ASEX\mu A$ addatur triangulum *EXB*, & de summa auferatur triangulum *SEB*, manebit area $ASBX\mu A$ areæ $ASEX\mu A$ æqualis, atque ideo ad aream $ASCY\mu A$ ut *AE* ad *AC*. Sed areæ $ASBX\mu A$ æqualis est area $ASBY\mu A$ quamproxime, & hæc area $ASBY\mu A$ est ad aream $ASCY\mu A$, ut tempus descripti arcus *AB* ad tempus descripti arcus totius *AC*. Ideoque *AE* est ad *AC* in ratione temporum quamproxime. *Q. E. D.*

Corol. Ubi punctum *B* incidit in parabolæ verticem μ, est *AE* ad *AC* in ratione temporum accurate.

Scholium.

Si jungatur $\mu\xi$ secans *AC* in δ, & in ea capiatur ξn, quæ sit ad μB ut 27 *MI* ad 16 $M\mu$: acta *Bn* secabit chordam *AC* in ratione temporum magis accurate quam prius. Jaceat autem punctum *n* ultra punctum ξ, si punctum *B* magis distat a vertice principali parabolæ quam punctum μ; & citra, si minus distat ab eodem vertice.

LEMMA IX.

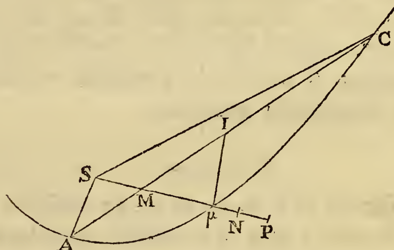
Rectæ I μ *&* μ M *& longitudo* $\frac{AIC}{4\,S\mu}$ *æquantur inter se.*

Nam $4\,S\mu$ est latus rectum parabolæ pertinens ad verticem μ.

LEMMA X.

Si producatur S μ *ad* N *&* P, *ut* μ N *sit pars tertia ipsius* μ I, *&* SP *sit ad* SN *ut* SN *ad* S μ. *Cometa, quo tempore describit arcum* A μ C, *si progrederetur ea semper cum velocitate quam habet in altitudine ipsi* SP *æquali, describeret longitudinem æqualem chordæ* AC.

Nam si cometa velocitate, quam habet in μ, eodem tempore progrederetur uniformiter in recta, quæ parabolam tangit in μ; area, quam radio ad punctum S ducto describeret, æqualis esset areæ parabolicæ $ASC\mu$. Ideoque contentum sub longitudine in tangente descripta & longitudine $S\mu$ esset ad contentum sub longitudinibus AC & SM, ut area $ASC\mu$ ad triangulum ASC, id est, ut SN



ad SM. Quare AC est ad longitudinem in tangente descriptam, ut $S\mu$ ad SN. Cum autem velocitas cometæ in altitudine SP sit (per corol. 6. prop. xvi. lib. i.) ad ejus velocitatem in altitudine $S\mu$, in subduplicata ratione SP ad $S\mu$ inverse, id est, in ratione $S\mu$ ad SN; longitudo hac velocitate eodem tempore descripta, erit ad longitudinem

gitudinem in tangente defcriptam, ut $S\mu$ ad SN. Igitur AC & longitudo hac nova velocitate defcripta, cum fint ad longitudinem in tangente defcriptam in eadem ratione, æquantur inter fe. *Q. E. D.*

Corol. Cometa igitur ea cum velocitate, quam habet in altitudine $S\mu + \frac{2}{3} I\mu$, eodem tempore defcriberet chordam AC quamproxime.

LEMMA XI.

Si cometa motu omni privatus de altitudine SN *feu* $S\mu + \frac{1}{3} I\mu$ *demitteretur, ut caderet in folem, & ea femper vi uniformiter continuata urgeretur in folem, qua urgetur fub initio; idem femiffe temporis, quo in orbe fuo defcribat arcum* AC, *defcenfu fuo defcriberet fpatium longitudini* $I\mu$ *æquale.*

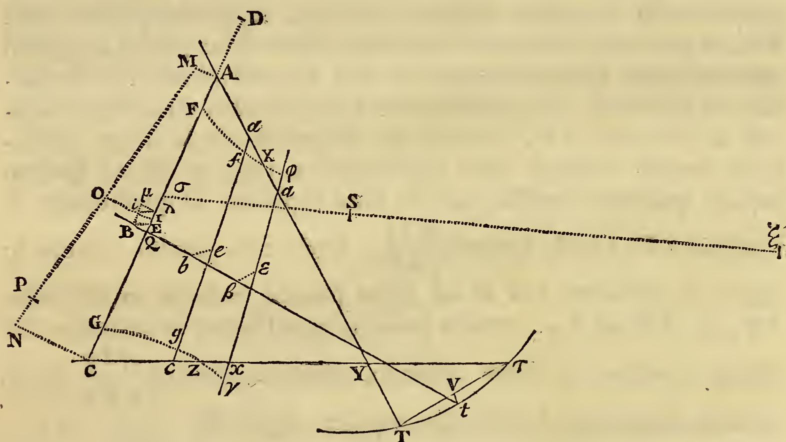
Nam cometa, quo tempore defcribat arcum parabolicum AC, eodem tempore ea cum velocitate, quam habet in altitudine SP (per lemma noviffimum) defcribet chordam AC, ideoque (per corol. 7. prop. XVI. lib. I.) eodem tempore in circulo, cujus femidiameter effet SP, vi gravitatis fuæ revolvendo, defcriberet arcum, cujus longitudo effet ad arcus parabolici chordam AC, in fubduplicata ratione unitatis ad binarium. Et propterea eo cum pondere, quod habet in folem in altitudine SP, cadendo de altitudine illa in folem, defcriberet femiffe temporis illius (per corol. 9. prop. IV. lib. I.) fpatium æquale quadrato femiffis chordæ illius applicato ad quadruplum altitudinis SP, id eft, fpatium $\frac{AIq}{4SP}$. Unde cum pondus cometæ in folem in altitudine SN fit ad ipfius pondus in folem in altitudine SP, ut SP ad $S\mu$: cometa pondere quod habet in altitudine SN eodem tempore, in folem cadendo, defcribet fpatium $\frac{AIq}{4S\mu}$, id eft, fpatium longitudini $I\mu$ vel $M\mu$ æquale. *Q. E. D.*

PROPOSITIO XLI. PROBLEMA XXI.

Cometæ in parabola moti trajectoriam ex datis tribus observationibus determinare.

Problema hocce longe difficillimum multimode aggressus, composui problemata quædam in libro primo, quæ ad ejus solutionem spectant. Postea solutionem sequentem paulo simpliciorem excogitavi.

Seligantur tres observationes æqualibus temporum intervallis ab invicem quamproxime distantes. Sit autem temporis intervallum illud, ubi cometa tardius movetur, paulo majus altero, ita videlicet ut temporum differentia sit ad summam temporum, ut summa temporum ad dies plus minus sexcentos; vel ut punctum *E* (in fig. lem. VIII.)



incidat in punctum *M* quamproxime, & inde aberret versus *I* potius quam versus *A*. Si tales observationes non præsto sint, inveniendus est novus cometæ locus per lemma sextum.

Designent

Designent S solem, T, t, τ tria loca terræ in orbe magno, TA, tB, τC observatas tres longitudines cometæ, V tempus inter observationem primam & secundam, W tempus inter secundam ac tertiam, X longitudinem, quam cometa toto illo tempore ea cum velocitate, quam habet in mediocri telluris a sole distantia, describere posset, quæque (per corol. 3. prop. XL. lib. III.) invenienda est, & tV perpendiculum in chordam $T\tau$. In observata longitudine media tB sumatur utcunque punctum B pro loco cometæ in plano eclipticæ, & inde versus solem S ducatur linea BE, quæ sit ad sagittam tV, ut contentum sub SB & St *quad.* ad cubum hypotenusæ trianguli rectanguli, cujus latera sunt SB & tangens latitudinis cometæ in observatione secunda ad radium tB. Et per punctum E agatur (per hujus lem. VII.) recta AEC, cujus partes AE, EC, ad rectas TA & τC terminatæ, sint ad invicem ut tempora V & W: & erunt A & C loca cometæ in plano eclipticæ in observatione prima ac tertia quamproxime, si modo B sit locus ejus recte assumptus in observatione secunda.

Ad AC bisectam in I erige perpendiculum Ii. Per punctum B age occultam Bi ipsi AC parallelam. Junge occultam Si secantem AC in λ, & comple parallelogrammum $iI\lambda\mu$. Cape $I\sigma$ æqualem $3I\lambda$, & per solem S age occultam $\sigma\xi$ æqualem $3S\sigma + 3i\lambda$. Et deletis jam literis A, E, C, I, a puncto B versus punctum ξ duc occultam novam BE, quæ sit ad priorem BE in duplicata ratione distantiæ BS ad quantitatem $S\mu + \frac{1}{3}i\lambda$. Et per punctum E iterum duc rectam AEC eadem lege ac prius, id est, ita ut ejus partes AE & EC sint ad invicem, ut tempora inter observationes V & W. Et erunt A & C loca cometæ magis accurate.

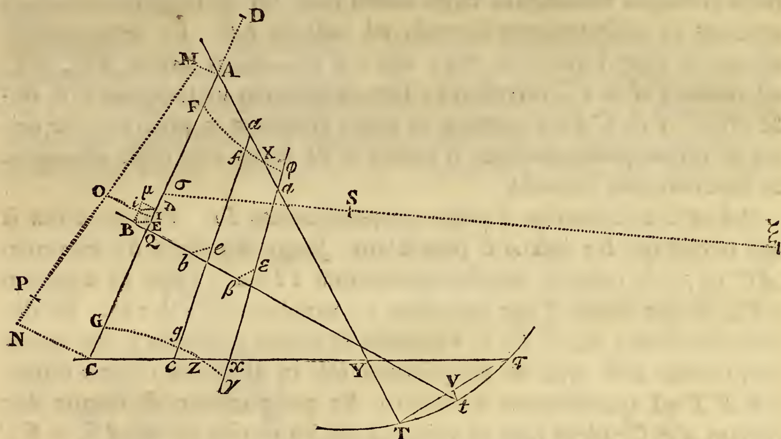
Ad AC bisectam in I erigantur perpendicula AM, CN, IO, quorum AM & CN sint tangentes latitudinum in observatione prima ac tertia ad radios TA & τC. Jungatur MN secans IO in O. Constituatur rectangulum $iI\lambda\mu$ ut prius. In IA producta capiatur $I\mathcal{D}$ æqualis $S\mu + \frac{2}{3}i\lambda$. Deinde in MN versus N capiatur $M\mathcal{P}$, quæ sit ad longitudinem supra inventam X, in subduplicata ratione mediocris distantiæ telluris a sole (seu semidiametri orbis magni) ad distantiam $O\mathcal{D}$. Si punctum $\mathcal{P}$ incidat in punctum N; erunt A, B, C tria loca cometæ, per quæ orbis ejus in

plano

De Mundi Systemate

plano eclipticæ describi debet. Sin punctum *P* non incidat in punctum *N*; in recta *AC* capiatur *CG* ipsi *NP* æqualis, ita ut puncta *G* & *P* ad easdem partes rectæ *NC* jaceant.

Eadem methodo, qua puncta *E*, *A*, *C*, *G*, ex assumpto puncto *B* inventa sunt, inveniantur ex assumptis utcunque punctis aliis *b* & β puncta nova *e*, *a*, *c*, *g*, & ε, α, $\varkappa$, γ. Deinde si per *G*, *g*, γ ducatur circumferentia circuli *G g* γ, secans rectam τ*C* in *Z*: erit *Z* locus cometæ in plano eclipticæ. Et si in *AC*, *ac*, $\alpha\,\varkappa$ capiantur *AF*, *af*, $\alpha\,\varphi$ ipsis *CG*, *cg*, $\varkappa\,\gamma$ respective æquales, & per puncta *F*, *f*,



φ ducatur circumferentia circuli *F f* φ, secans rectam *AT* in *X*; erit punctum *X* alius cometæ locus in plano eclipticæ. Ad puncta *X* & *Z* erigantur tangentes latitudinum cometæ ad radios *TX* & τ*Z*; & habebuntur loca duo cometæ in orbe proprio. Denique (per prop. XIX. lib. I.) umbilico *S*, per loca illa duo describatur parabola, & hæc erit trajectoria cometæ. *Q. E. I.*

Constructionis hujus demonstratio ex lemmatibus consequitur: quippe cum recta *AC* secetur in *E* in ratione temporum, per lemma VII, ut oportet per lem. VIII: & *BE* per lem. XI. sit pars rectæ *BS* vel *B*ξ in plano eclipticæ arcui *ABC* & chordæ *AEC* interjecta; & *MP* (per corol. lem. X.) longitudo sit chordæ arcus, quem cometa

cometa in orbe proprio inter obſervationem primam ac tertiam deſcribere debet, ideoque ipſi *MN* æqualis fuerit, ſi modo *B* ſit verus cometæ locus in plano eclipticæ.

Cæterum puncta *B*, *b*, *β* non quælibet, ſed vero proxima eligere convenit. Si angulus *AQt*, in quo veſtigium orbis in plano eclipticæ deſcriptum ſecat rectam *tB*, præterpropter innoteſcat; in angulo illo ducenda erit recta occulta *AC*, quæ ſit ad $\frac{4}{3}$ *Tτ* in ſubduplicata ratione *SQ* ad *St*. Et agendo rectam *SEB*, cujus pars *EB* æquetur longitudini *Vt*, determinabitur punctum *B* quod prima vice uſurpare licet. Tum recta *AC* deleta & ſecundum præcedentem conſtructionem iterum ducta, & inventa inſuper longitudine *MP*; in *tB* capiatur punctum *b*, ea lege, ut ſi *TA*, *τC* ſe mutuo ſecuerint in *Y*, ſit diſtantia *Yb* ad diſtantiam *YB*, in ratione compoſita ex ratione *MP* ad *MN* & ratione ſubduplicata *SB* ad *Sb*. Et eadem methodo inveniendum erit punctum tertium *β* ſi modo operationem tertio repetere lubet. Sed hac methodo operationes duæ ut plurimum ſuffecerint. Nam ſi diſtantia *Bb* perexigua obvenerit; poſtquam inventa ſunt puncta *F*, *f* & *G*, *g*, actæ rectæ *Ff* & *Gg* ſecabunt *TA* & *τC* in punctis quæſitis *X* & *Z*.

Exemplum.

Proponatur cometa anni 1680. Hujus motum a *Flamſtedio* obſervatum & ex obſervationibus computatum, atque ab *Halleio* ex iiſdem obſervationibus correctum, tabula ſequens exhibet.

1680.

De Mundi Systemate.

	Tem. appar	Tem. verum.	Long. Solis.	Cometæ Longitudo.	Cometæ Lat. bor.
	h. ′	h. ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″
1680. *Dec.* 12	4 . 46	4 . 46 . 0	♑ 1 . 51 . 23	♑ 6 . 32 . 30	8 . 28 . 0
21	6 . 32½	6 . 36 . 59	11 . 6 . 44	♒ 5 . 8 . 12	21 . 42 . 13
24	6 . 12	6 . 17 . 52	14 . 9 . 26	18 . 49 . 23	25 . 23 . 5
26	5 . 14	5 . 20 . 44	16 . 9 . 22	28 . 24 . 13	27 . 0 . 52
29	7 . 55	8 . 3 . 2	19 . 19 . 43	♓ 13 . 10 . 41	28 . 9 . 58
30	8 . 2	8 . 10 . 26	20 . 21 . 9	17 . 38 . 20	28 . 11 . 53
1681. *Jan.* 5	5 . 51	6 . 1 . 38	26 . 22 . 18	♈ 8 . 48 . 53	26 . 15 . 7
9	6 . 49	7 . 0 . 53	♒ 0 . 29 . 2	18 . 44 . 4	24 . 11 . 56
10	5 . 54	6 . 6 . 10	1 . 27 . 43	20 . 40 . 50	23 . 43 . 52
13	6 . 56	7 . 8 . 55	4 . 33 . 20	25 . 59 . 48	22 . 17 . 28
25	7 . 44	7 . 58 . 42	16 . 45 . 36	♉ 9 . 35 . 0	17 . 56 . 30
30	8 . 7	8 . 21 . 53	21 . 49 . 58	13 . 19 . 51	16 . 42 . 18
Feb. 2	6 . 20	6 . 34 . 51	24 . 46 . 59	15 . 13 . 53	16 . 4 . 1
5	6 . 50	7 . 4 . 41	27 . 49 . 51	16 . 59 . 6	15 . 27 . 3

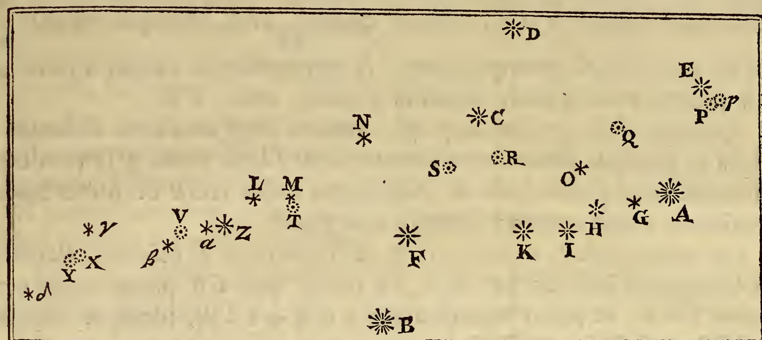
His adde observationes quasdam e nostris.

	Tem. appar.	Cometæ Longitudo.	Cometæ Lat. bor.
1681. *Feb.* 25	8h . 30′	♉ 26° . 18′ . 35″	12° . 46′ . 46″
27	8 . 15	27 . 4 . 30	12 . 36 . 12
Mar. 1	11 . 0	27 . 52 . 42	12 . 23 . 40
2	8 . 0	28 . 12 . 48	12 . 19 . 38
5	11 . 30	29 . 18 . 0	12 . 3 . 16
7	9 . 30	♊ 0 . 4 . 0	11 . 57 . 0
9	8 . 30	0 . 43 . 4	11 . 45 . 52

Hæ observationes telescopio septupedali, & micrometro filisque in foco telescopii locatis peractæ sunt: quibus instrumentis & positiones fixarum inter se & positiones cometæ ad fixas determinavimus. Designet *A* stellam quartæ magnitudinis in sinistro calcaneo Persei (*Bayero* ο) *B* stellam sequentem tertiæ magnitudinis in sinistro pede (*Bayero* ζ) & *C* stellam sextæ magnitudinis (*Bayero n*) in talo ejusdem pedis, ac *D*, *E*, *F*, *G*, *H*, *I*, *K*, *L*, *M*, *N*, *O*, *Z*, α, β, γ, δ stellas alias minores in eodem pede. Sintque *p*, *P*, *Q*, *R*, *S*, *T*, *V*, *X*, loca

loca cometæ in obſervationibus ſupra deſcriptis: & exiſtente diſtantia *AB* partium $80\frac{7}{12}$, erat *AC* partium $52\frac{1}{4}$, *BC* $58\frac{5}{6}$, *AD* $57\frac{5}{12}$, *BD* $82\frac{6}{11}$, *CD* $23\frac{2}{3}$, *AE* $29\frac{4}{7}$, *CE* $57\frac{1}{2}$, *DE* $49\frac{11}{12}$, *AI* $27\frac{7}{12}$, *BI* $52\frac{1}{6}$, *CI* $36\frac{7}{12}$, *DI* $53\frac{5}{11}$, *AK* $38\frac{2}{3}$, *BK* 43, *CK* $31\frac{5}{9}$, *FK* 29, *FB* 23, *FC* $36\frac{1}{4}$, *AH* $18\frac{6}{7}$, *DH* $50\frac{7}{8}$, *BN* $46\frac{5}{12}$, *CN* $31\frac{1}{3}$, *BL* $45\frac{5}{12}$, *NL* $31\frac{5}{7}$. *HO* erat ad *HI* ut 7 ad 6 & producta tranſibat inter ſtellas *D* & *E*, ſic ut diſtantia ſtellæ *D* ab hac recta eſſet $\frac{1}{6}$ *CD*. *LM* erat ad *LN* ut 2 ad 9, & producta tranſibat per ſtellam *H*. His determinabantur poſitiones fixarum inter ſe.

LIBER TERTIUS.



Tandem *Poundius* noſter iterum obſervavit poſitiones harum fixarum inter ſe, & earum longitudines & latitudines in tabulam ſequentem retulit.

Fixarum	Longitudines.	Lat. boreæ.
	° ′ ″	° ′ ″
A	♉ 26 . 41 . 50	12 . 8 . 36
B	28 . 40 . 23	11 . 17 . 54
C	27 . 58 . 30	12 . 40 . 25
E	26 . 27 . 17	12 . 52 . 7
F	28 . 28 . 37	11 . 52 . 22
G	26 . 56 . 8	12 . 4 . 58
H	27 . 11 . 45	12 . 2 . 1
I	27 . 25 . 2	11 . 53 . 11
K	27 . 42 . 7	11 . 53 . 26

Fixarum	Longitudines.	Lat. boreæ.
	° ′ ″	° ′ ″
L	♉ 29 . 33 . 34	12 . 7 . 48
M	29 . 18 . 54	12 . 7 . 20
N	28 . 48 . 29	12 . 31 . 9
Z	29 . 44 . 48	11 . 57 . 13
α	29 . 52 . 3	11 . 55 . 48
β	♊ 0 . 8 . 23	11 . 48 . 56
γ	0 . 40 . 10	11 . 55 . 18
δ	1 . 3 . 20	11 . 30 . 42

Poſitiones vero cometæ ad has fixas obſervabam ut ſequitur.

Die veneris *Feb.* 25. ſt. vet. hor. $8\frac{1}{2}$ p. m. cometæ in *p* exiſtentis diſtantia a ſtella *E* erat minor quam $\frac{3}{13}$ *AE*, major quam $\frac{1}{5}$ *AE*, ide-

De Mundi Systemate

oque æqualis $\frac{3}{14}$ *AE* proxime; & angulus *ApE* nonnihil obtuſus erat, ſed fere rectus. Nempe ſi demitteretur ad *pE* perpendiculum ab *A*, diſtantia cometæ a perpendiculo illo erat $\frac{1}{5}$ *pE*.

Eadem nocte hora $9\frac{1}{2}$, cometæ in *P* exiſtentis diſtantia a ſtella *E* erat major quam $\frac{1}{4\frac{1}{2}}$ *AE*, minor quam $\frac{1}{5\frac{1}{4}}$ *AE*, ideoque æqualis $\frac{1}{4\frac{7}{8}}$ *AE*, ſeu $\frac{8}{39}$ *AE* quamproxime. A perpendiculo autem a ſtella *A* ad rectam *PE* demiſſo diſtantia cometæ erat $\frac{4}{5}$ *PE*.

Die ſolis *Feb.* 27. hor. $8\frac{1}{4}$ p. m. cometæ in *Q* exiſtentis diſtantia a ſtella *O* æquabat diſtantiam ſtellarum *O* & *H*, & recta *QO* producta tranſibat inter ſtellas *K* & *B*. Poſitionem hujus rectæ ob nubes intervenientes magis accurate definire non potui.

Die martis *Mart.* 1. hor. 11. p. m. cometa in *R* exiſtens, ſtellis *K* & *C* accurate interjacebat, & rectæ *CRK* pars *CR* paulo major erat quam $\frac{1}{3}$ *CK*, & paulo minor quam $\frac{1}{3}$ *CK* + $\frac{1}{8}$ *CR*, ideoque æqualis $\frac{1}{3}$ *CK* + $\frac{1}{16}$ *CR* ſeu $\frac{16}{45}$ *CK*.

Die mercurii *Mart.* 2. hor. 8. p. m. cometæ exiſtentis in *S* diſtantia a ſtella *C* erat $\frac{4}{9}$ *FC* quamproxime. Diſtantia ſtellæ *F* a recta *CS* producta erat $\frac{1}{24}$ *FC*; & diſtantia ſtellæ *B* ab eadem recta, erat quintuplo major quam diſtantia ſtellæ *F*. Item recta *NS* producta tranſibat inter ſtellas *H* & *I*, quintuplo vel ſextuplo propior exiſtens ſtellæ *H* quam ſtellæ *I*.

Die ſaturni *Mart.* 5. hor. $11\frac{1}{2}$ p. m. cometa exiſtente in *T*, recta *MT* æqualis erat $\frac{1}{2}$ *ML*, & recta *LT* producta tranſibat inter *B* & *F*, quadruplo vel quintuplo propior *F* quam *B*, auferens a *BF* quintam vel ſextam ejus partem verſus *F*. Et *MT* producta tranſibat extra ſpatium *BF* ad partes ſtellæ *B*, quadruplo propior exiſtens ſtellæ *B* quam ſtellæ *F*. Erat *M* ſtella perexigua quæ per teleſcopium videri vix potuit, & *L* ſtella major quaſi magnitudinis octavæ.

Die lunæ *Mart.* 7 hor. $9\frac{1}{2}$ p. m. cometa exiſtente in *V*, recta *Vα* producta tranſibat inter *B* & *F*, auferens a *BF* verſus *F* $\frac{1}{10}$ *BF*, & erat ad rectam *Vβ* ut 5 ad 4. Et diſtantia cometæ a recta *αβ* erat $\frac{1}{2}$ *Vβ*.

Die mercurii *Mart.* 9. hora $8\frac{1}{2}$. p. m. cometa exiſtente in *X*, recta *γX* æqualis erat $\frac{1}{4}$ *γδ*, & perpendiculum demiſſum a ſtella *δ* ad rectam *γX* erat $\frac{2}{5}$ *γδ*.

Eadem nocte hora 12, cometa exiſtente in *Y*, recta *γY* æqualis erat

erat $\frac{1}{7}\gamma\delta$, aut paulo minor, puta $\frac{1}{8}\gamma\delta$, & perpendiculum demissum a stella δ ad rectam $\gamma\Upsilon$ æqualis erat $\frac{1}{6}\gamma\delta$ vel $\frac{1}{7}\gamma\delta$ circiter. Sed cometa ob viciniam horizontis cerni vix potuit, nec locus ejus tam distincte ac in præcedentibus definiri.

Ex hujusmodi observationibus per constructiones figurarum & computationes derivabam longitudines & latitudines cometæ, & *Poundius* noster ex correctis fixarum locis loca cometæ correxit, & loca correcta habentur supra. Micrometro parum affabre constructo usus sum, sed longitudinum tamen & latitudinum errores (quatenus ex observationibus nostris oriantur) minutum unum primum vix superant. Cometa autem (juxta observationes nostras) in fine motus sui notabiliter deflectere cœpit boream versus, a parallelo quem in fine mensis *Februarii* tenuerat.

Jam ad orbem cometæ determinandum; selegi ex observationibus hactenus descriptis tres, quas *Flamstedius* habuit *Dec.* 21, *Jan.* 5, & *Jan.* 25. Ex his inveni St partium 9842,1 & Vt partium 455, quales 10000 sunt semidiameter orbis magni. Tum ad operationem primam assumendo tB partium 5657, inveni SB 9747, BE prima vice 412, $S\mu$ 9503, $i\lambda$ 413: BE secunda vice 421, OD 10186, X 8528,4 MP 8450, MN 8475, NP 25. Unde ad operationem secundam collegi distantiam tb 5640. Et per hanc operationem inveni tandem distantias TX 4775 & τZ 11322. Ex quibus orbem definiendo, inveni nodos ejus descendentem in ♋ & ascendentem in ♑ 1 gr. 53′; inclinationem plani ejus ad planum eclipticæ 61gr. 20′$\frac{1}{3}$; verticem ejus (seu perihelium cometæ) distare a nodo 8gr. 38′, & esse in ♐ 27gr. 43′ cum latitudine australi 7gr. 34′; & ejus latus rectum esse 236,8, areamque radio ad solem ducto singulis diebus descriptam 93585, quadrato semidiametri orbis magni posito 100000000; cometam vero in hoc orbe secundum seriem signorum processisse, & *Decemb.* 8d. 0h. 4′. p. m. in vertice orbis seu perihelio fuisse. Hæc omnia per scalam partium æqualium & chordas angulorum ex tabula sinuum naturalium collectas determinavi graphice; construendo schema satis amplum, in quo videlicet semidiameter orbis magni (partium 10000) æqualis esset digitis $16\frac{1}{3}$ pedis *Anglicani*.

Tandem ut constaret an cometa in orbe sic invento vere moveretur, collegi per operationes partim arithmeticas partim graphicas loca cometæ in hoc orbe ad observationum quarundam tempora: uti in tabula sequente videre licet.

DE MUNDI SYSTEMATE

	Distant. Comet. a Sole	Long. Collect.	Lat. Collect.	Long. Obs.	Lat. Obs.	Differ. Long.	Differ. Lat.
		gr. ′	gr. ′	gr. ′	gr. ′	′	′
Dec. 12	2792	♑ 6.32	8.18½	♑ 6.31⅓	8.26	+1	— 7½
29	8403	♓ 13.13⅗	28. 0	♓ 13.11¾	28.10$\frac{1}{12}$	+2	—10$\frac{1}{12}$
Feb. 5	16669	♉ 17. 0	15.29⅗	♉ 16.59⅞	15.27⅖	+0	+ 2¼
Mar. 5	21737	29.19¾	12. 4	29.20$\frac{6}{7}$	12. 3½	—1	+ ½

Postea vero *Halleius* noster orbitam per calculum arithmeticum accuratius determinavit, quam per descriptiones linearum fieri licuit; & retinuit quidem locum nodorum in ♋ & ♑ 1gr. 53′, & inclinationem plani orbitæ ad eclipticam 61gr. 20′⅓, ut & tempus perihelii cometæ *Decemb.* 8d. 0h. 4′: distantiam vero perihelii a nodo ascendente in orbita cometæ mensuratam invenit esse 9gr. 20′, & latus rectum parabolæ esse 2430 partium, existente mediocri solis a terra distantia partium 100000. Et ex his datis, calculo itidem arithmetico accurate instituto, loca cometæ ad observationum tempora computavit, ut sequitur.

Tempus verum.	Distantia Cometæ a ☉	Long. comp.	Lat. comp.	Errores in Long.	Errores in Lat.
d. h. ′		gr. ′ ″	gr. ′ ″	′ ″	′ ″
Dec. 12. 4.46	28028	♑ 6.29.25	8.26. 0 Bor.	— 3. 5	—2. 0
21. 6.37	61076	♒ 5. 6.30	21.43.20	— 1.42	+1. 7
24. 6.18	70008	18.48.20	25.22.40	— 1. 3	—0.25
26. 5.21	75576	28.22.45	27. 1.36	— 1.28	+0.44
29. 8. 3	84021	♓ 13.12.40	28.10.10	+1.59	+0.12
30. 8.10	86661	17.40. 5	28.11.20	+1.45	—0.33
Jan. 5. 6. 1½	101440	♈ 8.49.49	26.15.15	+0.56	+0. 8
9. 7. 0	110959	18.44.36	24.12.54	+0.32	+0.58
10. 6. 6	113162	20.41. 0	23.44.10	+0.10	+0.18
13. 7. 9	120000	26. 0.21	22.17.30	+0.33	+0. 2
25. 7.59	145370	♉ 9.33.40	17.57.55	— 1 20	+1.25
30. 8.22	155303	13.17 41	16.42. 7	—2.10	—0 11
Feb. 2. 6.35	160951	15.11.11	16. 4.15	—2.42	+0.14
5. 7. 4½	166686	16.58.25	15.29.13	—0.41	+2.10
25. 8.41	202570	26.15.46	12.48. 0	—2.49	+1.14
Mar. 5.11.39	216205	29.18.35	12. 5.40	+0.35	+2.24

Apparuit etiam hic cometa mense *Novembri* præcedente & *Coburgi* in *Saxonia* a Dno. *Gottfried Kirch* observatus est diebus mensis hujus quarto, sexto & undecimo, stylo veteri; & ex positionibus

ejus

ejus ad proximas ſtellas fixas ope teleſcopii nunc bipedalis nunc decempedalis ſatis accurate obſervatis, ac differentia longitudinum *Coburgi* & *Londini* graduum undecim & locis fixarum a *Poundio* noſtro obſervatis, *Halleius* noſter loca cometæ determinavit ut ſequitur.

Novem. 3^d. 17^h. 2′, tempore apparente *Londini*, cometa erat in ♌ 29^gr. 51′ cum lat. bor. 1^gr. 17′. 45″.

Novem. 5^d. 15^h. 58′ cometa erat in ♍ 3^gr. 23′ cum lat. bor. 1^gr. 6′.

Novem. 10^d. 16^h. 31′ cometa æqualiter diſtabat a ſtellis leonis σ ac τ *Bayero*; nondum vero attigit rectam eaſdem jungentem, ſed parum abfuit ab ea. In ſtellarum catalogo *Flamſtediano* σ tunc habuit ♍ 14^gr. 15′ cum lat. bor. 1^gr. 41′ fere, τ vero ♍ 17^gr. 3½, cum lat. auſtr. 0^gr. 34′. Et medium punctum inter has ſtellas fuit ♍ 15^gr. 39′¼, cum lat. bor. 0^gr. 33½. Sit diſtantia cometæ a recta illa 10′ vel 12′ circiter, & differentia longitudinum cometæ & puncti illius medii erit 7′, & differentia latitudinum 7′½, circiter. Et inde cometa erat in ♍ 15^gr. 32′ cum lat. bor. 26′ circiter.

Obſervatio prima ex ſitu cometæ ad parvas quaſdam fixas abunde ſatis accurata fuit. Secunda etiam ſatis accurata fuit. In tertia, quæ minus accurata fuit, error minutorum ſex vel ſeptem ſubeſſe potuit, & vix major. Longitudo vero cometæ in obſervatione prima, quæ cæteris accuratior fuit, in orbe prædicto parabolico computata erat ♌ 29^gr. 30′. 22″. latitudo borealis 1^gr. 25′. 7″. & diſtantia ejus a ſole 115546.

Porro *Halleius* obſervando quod cometa inſignis intervallo annorum 575 quater apparuiſſet, ſcilicet menſe *Septembri* poſt cædem *Julii Cæſaris*, anno *Chriſti* 531 *Lampadio* & *Oreſte Coſ*. anno *Chriſti* 1106 menſe *Februario*, & ſub finem anni 1680, idque cum cauda longa & inſigni (præterquam quod ſub mortem *Cæſaris*, cauda ob incommodam telluris poſitionem minus apparuiſſet:) quæſivit orbem ellipticum cujus axis major eſſet partium 1382957, exiſtente mediocri diſtantia telluris a ſole partium 10000: in quo orbe utique cometa annis 575 revolvi poſſit. Et ponendo nodum aſcendentem in ♋ 2^gr. 2′; inclinationem plani orbis ad planum eclipticæ 61^gr. 6′. 48″; perihelium cometæ in hoc plano ♐ 22^gr. 44′. 25″; tempus æquatum perihelii *Decem.* 7^d. 23^h. 9′; diſtantiam perihelii a nodo

nodo ascendente in plano eclipticæ 9gr. 17′. 35″; & axem conjugatum 18481,2: computavit motum cometæ in hoc orbe elliptico. Loca autem ejus tam ex observationibus deducta quam in hoc orbe computata exhibentur in tabula sequente.

Tempus verum	Long. obs.	Lat. Bor. obs.	Long. comp.	Lat. comp.	Errores in Long.	Errores in Lat.
d. h. ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	′ ″	′ ″
Nov. 3.16.47	♌ 29.51. 0	1.17.45	♌ 29.51.22	1.17.32 B	+0.22	−0.13
5.15.37	♍ 3.23. 0	1. 6. 0	♍ 3.24.32	1. 6. 9	+1.32	+0. 9
10.16.18	15.32. 0	0.27. 0	15.33. 2	0.25. 7	+1. 2	−1.53
16.17. 0			♎ 8.16.45	0.53. 7 A		
18.21.34			18.52.15	1.26.54		
20.17. 0			28.10.36	1.53.35		
23.17. 5			♏ 13.22.42	2.29. 0		
Dec. 12. 4.46	♑ 6.32.30	8.28. 0	♑ 6.31.20	8.29. 6 B	−1.10	+1. 6
21. 6.37	♒ 5. 8.12	21.42.13	♒ 5. 6.14	21.44.42	−1.58	+2.29
24. 6.18	18.49.23	25.23. 5	18.47.30	25.23.35	−1.53	+0.30
26. 5.21	28.24.13	27. 0.52	28.21.42	27. 2. 1	−2.31	+1. 9
29. 8. 3	♓ 13.10.41	28. 9.58	♓ 13.11.14	28.10.38	+0.33	+0.40
30. 8.10	17.38.20	28.11.53	17.38.27	28.11.37	+0. 7	−0.16
Jan. 5. 6. 1½	♈ 8.48.53	26.15. 7	♈ 8.48.51	26.14.57	−0. 2	−0.10
9. 7. 1	18.44. 4	24.11.56	18.43.51	24.12.17	−0.13	+0.21
10. 6. 6	20.40.50	23.43.32	20.40.23	23.43.25	−0.27	−0. 7
13. 7. 9	25.59.48	22.17.28	26. 0. 8	22.16.32	+0.20	−0.56
25. 7.59	♉ 9.35. 0	17.56.30	♉ 9.34.11	17.56. 6	−0.49	−0.24
30. 8.22	13.19.51	16.42.18	13.18.28	16.40. 5	−1.23	−2.13
Feb. 2. 6.35	15.13.53	16. 4. 1	15.11.59	16. 2. 7	−1.54	−1.54
5. 7. 4½	16.59. 6	15.27. 3	16.59.17	15.27. 0	+0.11	−0. 3
25. 8.41	26.18.35	12.46.46	26.16.59	12.45.22	−1.36	−1.24
Mar. 1.11.10	27.52.42	12.23.40	27.51.47	12.22.28	−0.55	−1.12
5.11.39	29.18. 0	12. 3.16	29.20.11	12. 2.50	+2.11	−0.26
9 8.38	0.43. 4	11.45.52	♊ 0.42.43	11.45.35	−0.21	−0.17

Observationes cometæ hujus a principio ad finem non minus congruunt cum motu cometæ in orbe jam descripto, quam motus planetarum congruere solent cum eorum theoriis, & congruendo probant unum & eundem fuisse cometam, qui toto hoc tempore apparuit, ejusque orbem hic recte definitum fuisse.

In tabula præcedente omisimus observationes diebus *Novembris* 16, 18, 20 & 23 ut minus accuratas. Nam cometa his etiam temporibus observatus fuit. *Ponthæus* utique & socii, *Novem.* 17. st. vet. hora sexta matutina *Romæ*, id est, hora 5. 10′ *Londini*, filis ad fixas applicatis, cometam observarunt in ♎ 8gr. 30′ cum latitudine australi 0gr. 40′. Extant eorum observationes in tractatu, quem *Ponthæus*

thæus de hoc cometa in lucem edidit. *Cellius*, qui aderat & obſervationes ſuas in epiſtola ad *D. Caſſinum* miſit, cometam eadem hora vidit in ♎ 8gr. 30′ cum latitudine auſtrali 0gr. 30′. Eadem hora *Galletius Avenioni* (id eſt, hora matutina 5. 42 *Londini*) cometam vidit in ♎ 8gr ſine latitudine, Cometa autem per theoriam jam fuit in ♎ 8gr. 16′. 45″ cum latitudine auſtrali 0gr. 53′. 7″.

Nov. 18. hora matutina 6. 30′ *Romæ* (id eſt, hora 5, 40′ *Londini*) *Ponthæus* cometam vidit in ♎ 13gr. 30′ cum latitudine auſtrali 1gr. 20′. *Cellius* in ♎ 13gr. 30′ cum latitudine auſtrali 1gr. 00′. *Galletius* autem hora matutina 5. 30′ *Avenioni* cometam vidit in ♎ 13gr. 00′, cum latitudine auſtrali 1gr. 00′. Et *R. P. Ango* in academia *Flexienſi* apud *Gallos*, hora quinta matutina (id eſt, hora 5. 9′ *Londini*) cometam vidit in medio inter ſtellas duas parvas, quarum una media eſt trium in recta linea in virginis auſtrali manu, *Bayero* ψ, & altera eſt extrema alæ *Bayero* θ. Unde cometa tunc fuit in ♎ 12gr. 46′ cum latitudine auſtrali 50′. Eodem die *Boſtoniæ* in *Nova-Anglia* in latitudine 42½ graduum, hora quinta matutina, (id eſt *Londini* hora matutina 9. 44′) cometa viſus eſt prope ♎ 14gr, cum latitudine auſtrali 1gr. 30′, uti a cl. *Halleio* accepi.

Nov. 19. hora mat. 4½ *Cantabrigiæ*, cometa (obſervante juvene quodam) diſtabat a ſpica ♍ quaſi 2gr boreazephyrum verſus. Erat autem ſpica in ♎ 19gr. 23′. 47″ cum lat. auſtr. 2gr. 1′. 59″. Eodem die hor. 5. mat *Boſtoniæ* in *Nova-Anglia*, cometa diſtabat a ſpica ♍ gradu uno, differentia latitudinum exiſtente 40′. Eodem die in inſula *Jamaica*, cometa diſtabat a ſpica intervallo quaſi gradus unius. Eodem die D. *Arthurus Storer* ad fluvium *Patuxent*, prope *Hunting-Creek* in *Maryland*, in confinio *Virginiæ* in lat. 38½ gr, hora quinta matutina (id eſt, hora 10′ *Londini*) cometam vidit ſupra ſpicam ♍, & cum ſpica propemodum conjunctum, exiſtente diſtantia inter eoſdem quaſi ¾ gr. Et ex his obſervationibus inter ſe collatis colligo quod hora 9. 44′ *Londini* cometa erat in ♎ 18gr. 50′ cum latitudine auſtrali 1gr. 25′ circiter. Cometa autem per theoriam jam erat in ♎ 18gr. 52′. 15″ cum latitudine auſtrali 1gr. 26′. 54″.

Nov. 20. D. *Montenarus* aſtronomiæ profeſſor *Paduenſis*, hora ſexta matutina *Venetiis* (id eſt, hora 5. 10′ *Londini*) cometam vidit in ♎ 23gr. cum latitudine auſtrali 1gr. 30′. Eodem die *Boſtoniæ*, diſtabat cometa

cometa a ſpica ♍, 4gr. longitudinis in orientem, ideoque erat in ♎ 23gr. 24′ circiter.

Nov. 21. *Ponthæus* & ſocii hor. mat. 7¼ cometam obſervarunt in ♎ 27gr. 50′ cum latitudine auſtrali 1gr. 16′, *Cellius* in ♎ 28gr. *Ango* hora quinta matutina in ♎ 27gr. 45′, *Montenarus* in ♎ 27gr. 51′. Eodem die in inſula *Jamaica* cometa viſus eſt prope principium ſcorpii, eandemque circiter latitudinem habuit cum ſpica virginis, id eſt, 2gr. 2′. Eodem die ad horam quintam matutinam *Ballaſoræ* in *India Orientali*, (id eſt ad horam noctis præcedentis 11. 20′ *Londini*) capta eſt diſtantia cometæ a ſpica ♍ 7gr. 35′ in orientem. In linea recta erat inter ſpicam & lancem, ideoque verſabatur in ♎ 26gr. 58′ cum lat. auſtrali 1gr. 11′ circiter; & poſt horas 5 & 40′ (ad horam ſcilicet quintam matutinam *Londini*), erat in ♎ 28gr. 12′ cum lat. auſtr. 1gr. 16′. Per theoriam vero cometa jam erat in ♎ 28gr. 10′. 36″, cum latitudine auſtrali 1gr. 53′. 35″.

Nov. 22. Cometa viſus eſt a *Montenaro* in ♏ 2gr. 33′. *Boſtoniæ* autem in *Nova-Anglia* apparuit in ♏ 3gr circiter, eadem fere cum latitudine ac prius, id eſt, 1gr. 30′. Eodem die ad horam quintam matutinam *Ballaſoræ* cometa obſervabatur in ♏ 1gr. 50′; ideoque ad horam quintam matutinam *Londini* cometa erat in ♏ 3gr. 5′ circiter. Eodem die *Londini* hora mat. 6½ *Hookius* noſter cometam vidit in ♏ 3gr. 30′ circiter, idque in linea recta quæ tranſit per ſpicam virginis & cor leonis, non exacte quidem, ſed a linea illa paululum deflectentem ad boream. *Montenarus* itidem notavit quod linea a cometa per ſpicam ducta, hoc die & ſequentibus tranſibat per auſtrale latus cordis leonis, interpoſito perparvo intervallo inter cor leonis & hanc lineam. Linea recta per cor leonis & ſpicam virginis tranſiens, eclipticam ſecuit in ♍ 3gr. 46′; in angulo 2gr. 51′. Et ſi cometa locatus fuiſſet in hac linea in ♏ 3gr ejus latitudo fuiſſet 2gr. 26′. Sed cum cometa conſentientibus *Hookio* & *Montenaro*, nonnihil diſtaret ab hac linea boream verſus, latitudo ejus fuit paulo minor. Die 20. ex obſervatione *Montenari*, latitudo ejus propemodum æquabat latitudinem ſpicæ ♍, eratque 1gr. 30′ circiter, & conſentientibus *Hookio*, *Montenaro* & *Angone* perpetuo augebatur, ideoque jam ſenſibiliter major erat quam 1gr. 30′. Inter limites autem jam conſtitutos 2gr. 26′ & 1gr. 30′, magnitudine mediocri latitudo erit 1gr. 58′ circiter. Cauda cometæ, conſentientibus *Hookio* & *Montenaro*, dirigebatur ad ſpicam ♍, declinans aliquantulum

quantulum a ſtella iſta, juxta *Hookium* in auſtrum, juxta *Montenarum* in boream; ideoque declinatio illa vix fuit ſenſibilis, & cauda æquatori fere parallela exiſtens, aliquantulum deflectebatur ab oppoſitione ſolis boream verſus.

Nov. 23. ſt. vet. hora quinta matutina *Noriburgi* (id eſt hora $4\frac{1}{2}$ *Londini*) D. *Zimmerman* cometam vidit in ♏ 8gr. 8′, cum latitudine auſtrali 2gr. 31′, captis ſcilicet ejus diſtantiis a ſtellis fixis.

Nov. 24. Ante ortum ſolis cometa viſus eſt a *Montenaro* in ♏ 12gr. 52′, ad boreale latus rectæ quæ per cor leonis & ſpicam virginis ducebatur, ideoque latitudinem habuit paulo minorem quam 2gr. 38′. Hæc latitudo, uti diximus, ex obſervationibus *Montenari*, *Angonis* & *Hookii*, perpetuo augebatur; ideoque jam paulo major erat quam 1gr. 58′; & magnitudine mediocri, ſine notabili errore, ſtatui poteſt 2gr. 18′. Latitudinem *Ponthæus* & *Galletius* jam decreviſſe volunt, & *Cellius* & obſervator in *Nova Anglia* eandem fere magnitudinem retinuiſſe, ſcilicet gradus unius vel unius cum ſemiſſe. Craſſiores ſunt obſervationes *Ponthæi* & *Cellii*, eæ præſertim quæ per azimuthos & altitudines capiebantur, ut & eæ *Galletii*: meliores ſunt eæ quæ per poſitiones cometæ ad fixas a *Montenaro*, *Hookio*, *Angone* & obſervatore in *Nova-Anglia*, & nonnunquam a *Ponthæo* & *Cellio* ſunt factæ. Eodem die ad horam quintam matutinam *Ballaſoræ* cometa obſervabatur in ♏ 11gr. 45′; ideoque ad horam quintam matutinam *Londini* erat in ♏ 13gr circiter. Per theoriam vero cometa jam erat in ♏ 13gr. 22′. 42″.

Nov. 25. Ante ortum ſolis *Montenarus* cometam obſervavit in ♏ $17\frac{3}{4}$gr circiter. Et *Cellius* obſervavit eodem tempore quod cometa erat in linea recta inter ſtellam lucidam in dextro femore virginis & lancem auſtralem libræ, & hæc recta ſecat viam cometæ in ♏ 18gr. 36′. Per theoriam vero cometa jam erat in ♏ $18\frac{1}{3}$gr. circiter.

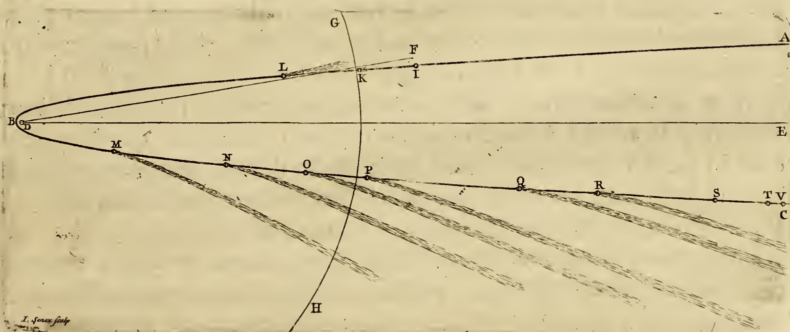
Congruunt igitur hæ obſervationes cum theoria quatenus congruunt inter ſe, & congruendo probant unum & eundem fuiſſe cometam, qui toto tempore a quarto die *Novembris* ad uſque nonum *Martii* apparuit. Trajectoria cometæ hujus bis ſecuit planum eclipticæ, & propterea non fuit rectilinea. Eclipticam ſecuit non in oppoſitis cœli partibus, ſed in fine virginis & principio capricorni, intervallo graduum 98 circiter; ideoque curſus cometæ plurimum de-

 flecte-

De Mundi Systemate

batur a circulo maximo. Nam & menſe *Novembri* curſus ejus tribus ſaltem gradibus ab ecliptica in auſtrum declinabat, & poſtea menſe *Decembri* gradibus 29 vergebat ab ecliptica in ſeptentrionem partibus duabus orbitæ, in quibus cometa tendebat in ſolem & redibat a ſole, angulo apparente graduum plus triginta ab invicem declinantibus, ut obſervavit *Montenarus*. Pergebat hic cometa per ſigna novem, a leonis ſcilicet ultimo gradu ad principium geminorum, præter ſignum leonis, per quod pergebat antequam videri cœpit; & nulla alia extat theoria, qua cometa tantam cœli partem motu regulari percurrat. Motus ejus fuit maxime inæquabilis. Nam circa diem vigeſimum *Novembris* deſcripſit gradus circiter quinque ſingulis diebus; dein motu retardato inter *Novemb.* 26 & *Decemb.* 12, ſpatio ſcilicet dierum quindecim cum ſemiſſe, deſcripſit gradus tantum 40; poſtea vero motu iterum accelerato, deſcripſit gradus fere quinque ſingulis diebus, antequam motus iterum retardari cœpit. Et theoria, quæ motui tam inæquabili per maximam cœli partem probe reſpondet, quæque eaſdem obſervat leges cum theoria planetarum, & cum accuratis obſervationibus aſtronomicis accurate congruit, non poteſt non eſſe vera.

Cæterum trajectoriam quam cometa deſcripſit, & caudam veram



quam ſingulis in locis projecit, viſum eſt annexo ſchemate in plano trajectoriæ delineatas exhibere: ubi *ABC* denotat trajectoriam cometæ, *D* ſolem, *DE* trajectoriæ axem, *DF* lineam nodorum,

GH

GH interſectionem ſphæræ orbis magni cum plano trajectoriæ, *I* locum cometæ *Nov.* 4. *Ann.* 1680, *K* locum ejuſdem *Nov.* 11, *L* locum *Nov.* 19, *M* locum *Dec.* 12, *N* locum *Dec.* 21, *O* locum *Dec.* 29, *P* locum *Jan.* 5 *ſequent.* *Q* locum *Jan.* 25, *R* locum *Feb.* 5, *S* locum *Feb.* 25, *T* locum *Mar.* 5, & *V* locum *Mar.* 9. Obſervationes vero ſequentes in cauda definienda adhibui.

Nov. 4 & 6. Cauda nondum apparuit. *Nov.* 11. Cauda jam cœpta non niſi ſemiſſem gradus unius longa tubo decempedali viſa fuit. *Nov.* 17. Cauda gradus amplius quindecim longa *Ponthæo* apparuit. *Nov.* 18. Cauda 30gr longa, ſolique directe oppoſita in *Nova-Anglia* cernebatur, & protendebatur uſque ad ſtellam ♂, quæ tunc erat in ♍ 9gr. 54′. *Nov.* 19. In *Mary-land* cauda viſa fuit gradus 15 vel 20 longa. *Dec.* 10. Cauda (obſervante *Flamſtedio*) tranſibat per medium diſtantiæ inter caudam ſerpentis Ophiuchi & ſtellam δ in aquilæ auſtrali ala, & deſinebat prope ſtellas *A*, ω, *b* in tabulis *Bayeri*. Terminus igitur erat in ♑ $19\frac{1}{2}$gr, cum latitudine boreali $34\frac{1}{4}$gr circiter. *Dec.* 11. Cauda ſurgebat ad uſque caput ſagittæ (*Bayero* α, β,) deſinens in ♑ 26gr. 43′, cum latitudine boreali 38gr. 34′. *Dec.* 12. Cauda tranſibat per medium ſagittæ, nec longe ultra protendebatur, deſinens in ♒ 4gr, cum latitudine boreali $42\frac{1}{2}$gr circiter. Intelligenda ſunt hæc de longitudine caudæ clarioris. Nam luce obſcuriore, in cœlo forſan magis ſereno, cauda *Dec.* 12, hora 5. 40′ *Romæ* (obſervante *Ponthæo*) ſupra cygni uropygium ad gradus 10 ſeſe extulit; atque ab hac ſtella ejus latus ad occaſum & boream min. 45 deſtitit. Lata autem erat cauda his diebus gradus 3, juxta terminum ſuperiorem, ideoque medium ejus diſtabat a ſtella illa 2gr. 15′ auſtrum verſus, & terminus ſuperior erat in ♓ 22gr, cum latitudine boreali 61gr. Et hinc longa erat cauda 70gr circiter. *Dec.* 21. Eadem ſurgebat fere ad cathedram *Caſſiopeiæ*, æqualiter diſtans a β & *Schedir*, & diſtantiam ab utraque diſtantiæ earum ab invicem æqualem habens, ideoque deſinens in ♈ 24gr, cum latitudine $47\frac{1}{2}$gr. *Dec.* 29. Cauda tangebat *Scheat* ſitam ad ſiniſtram, & intervallum ſtellarum duarum in pede boreali *Andromedæ* accurate complebat, & longa erat 54gr; ideoque deſinebat in ♉ 19gr, cum latitudine 35gr. *Jan.* 5. Cauda tetigit ſtellam π in pectore *Andromedæ* ad latus ejus dextrum, & ſtellam μ in ejus cingulo ad latus ſiniſtrum; & (juxta obſervationes

 noſtras)

nostras) longa erat 40gr; curva autem erat & convexo latere spectabat ad austrum. Cum circulo per solem & caput cometæ transeunte angulum confecit graduum 4 juxta caput cometæ; at juxta terminum alterum inclinabatur ad circulum illum in angulo 10 vel 11 graduum & chorda caudæ cum circulo illo continebat angulum graduum octo. *Jan.* 13. Cauda luce satis sensibili terminabatur inter *Alamech* & *Algol*, & luce tenuissima desinebat e regione stellæ κ in latere *Persei*. Distantia termini caudæ a circulo solem & cometam jungente erat 3gr. 50′, & inclinatio chordæ caudæ ad circulum illum 8½gr. *Jan.* 25 & 26. Cauda luce tenui micabat ad longitudinem graduum 6 vel 7; & nocte una & altera sequente ubi cœlum valde serenum erat, luce tenuissima & ægerrime sensibili attingebat longitudinem graduum duodecim & paulo ultra. Dirigebatur autem ejus axis ad lucidam in humero orientali aurigæ accurate, ideoque declinabat ab oppositione solis boream versus in angulo graduum decem. Denique *Feb.* 10. caudam oculis armatis aspexi gradus duos longam. Nam lux prædicta tenuior per vitra non apparuit. *Ponthæus* autem *Feb.* 7. se caudam ad longitudinem graduum 12 vidisse scribit. *Feb.* 25 & deinceps cometa sine cauda apparuit.

Orbem jam descriptum spectanti & reliqua cometæ hujus phænomena in animo revolventi, haud difficulter constabit, quod corpora cometarum sunt solida, compacta, fixa ac durabilia ad instar corporum planetarum. Nam si nihil aliud essent quam vapores vel exhalationes terræ, solis & planetarum, cometa hicce in transitu suo per viciniam solis statim dissipari debuisset. Est enim calor solis ut radiorum densitas, hoc est, reciproce ut quadratum distantiæ locorum a sole. Ideoque cum distantia cometæ a centro solis *Decemb.* 8. ubi in perihelio versabatur, esset ad distantiam terræ a centro solis ut 6 ad 1000 circiter, calor solis apud cometam eo tempore erat ad calorem solis æstivi apud nos ut 1000000 ad 36, seu 28000 ad 1. Sed calor aquæ ebullientis est quasi triplo major quam calor quem terra arida concipit ad æstivum solem, ut expertus sum: & calor ferri candentis (si recte conjector) quasi triplo vel quadruplo major quam calor aquæ ebullientis; ideoque calor, quem terra arida apud cometam in perihelio versantem ex radiis solaribus concipere posset, quasi 2000 vicibus major quam calor ferri candentis. Tanto autem calore

vapores

vapores & exhalationes, omnisque materia volatilis statim consumi ac dissipari debuissent.

Cometa igitur in perihelio suo calorem immensum ad solem concepit, & calorem illum diutissime conservare potest. Nam globus ferri candentis digitum unum latus, calorem suum omnem spatio horæ unius in aëre consistens vix amitteret. Globus autem major calorem diutius conservaret in ratione diametri, propterea quod superficies (ad cujus mensuram per contactum aëris ambientis refrigeratur) in illa ratione minor est pro quantitate materiæ suæ calidæ inclusæ. Ideoque globus ferri candentis huic terræ æqualis, id est, pedes plus minus 40000000 latus, diebus totidem, & idcirco annis 50000, vix refrigesceret. Suspicor tamen quod duratio caloris, ob causas latentes, augeatur in minore ratione quam ea diametri: & optarim rationem veram per experimenta investigari.

Porro notandum est quod cometa mense *Decembri*, ubi ad solem modo incaluerat, caudam emittebat longe majorem & splendidiorem quam antea mense *Novembri*, ubi perihelium nondum attigerat. Et universaliter caudæ omnes maximæ & fulgentissimæ e cometis oriuntur statim post transitum eorum per regionem solis. Conducit igitur calefactio cometæ ad magnitudinem caudæ. Et inde colligere videor quod cauda nihil aliud sit quam vapor longe tenuissimus, quem caput seu nucleus cometæ per calorem suum emittit.

Cæterum de cometarum caudis triplex est opinio; eas vel jubar esse solis per translucida cometarum capita propagatum, vel oriri ex refractione lucis in progressu ipsius a capite cometæ in terram, vel denique nubem esse seu vaporem a capite cometæ jugiter surgentem & abeuntem in partes a sole aversas. Opinio prima eorum est qui nondum imbuti sunt scientia rerum opticarum. Nam jubar solis in cubiculo tenebroso non cernitur, nisi quatenus lux reflectitur e pulverum & fumorum particulis per aërem semper volitantibus: ideoque in aëre fumis crassioribus infecto splendidius est, & sensum fortius ferit; in aëre clariore tenuius est & ægrius sentitur: in cœlis autem sine materia reflectente nullum esse potest. Lux non cernitur quatenus in jubare est, sed quatenus inde reflectitur ad oculos nostros. Nam visio non fit nisi per radios qui in oculos impingunt. Requiritur igitur materia aliqua reflectens in regione caudæ, ne

cœlum

De Mundi Systemate

cœlum totum luce ſolis illuſtratum uniformiter ſplendeat. Opinio ſecunda multis premitur difficultatibus. Caudæ nunquam variegantur coloribus: qui tamen refractionum ſolent eſſe comites inſeparabiles. Lux fixarum & planetarum diſtincte ad nos tranſmiſſa demonſtrat medium cœleſte nulla vi refractiva pollere. Nam quod dicitur fixas ab *Ægyptiis* cometas nonnunquam viſas fuiſſe, id, quoniam rariſſime contingit, aſcribendum eſt nubium refractioni fortuitæ. Fixarum quoque radiatio & ſcintillatio ad refractiones tum oculorum tum aëris tremuli referendæ ſunt: quippe quæ admotis oculo teleſcopiis evaneſcunt. Aëris & aſcendentium vaporum tremore fit, ut radii facile de anguſto pupillæ ſpatio per vices detorqueantur, de latiore autem vitri objectivi apertura neutiquam. Inde eſt quod ſcintillatio in priori caſu generetur, in poſteriore autem ceſſet: & ceſſatio in poſteriore caſu demonſtrat regularem tranſmiſſionem lucis per cœlos ſine omni refractione ſenſibili. Nequis contendat quod caudæ non ſoleant videri in cometis, cum eorum lux non eſt ſatis fortis, quia tunc radii ſecundarii non habent ſatis virium ad oculos movendos, & propterea caudas fixarum non cerni: ſciendum eſt quod lux fixarum plus centum vicibus augeri poteſt mediantibus teleſcopiis, nec tamen caudæ cernuntur. Planetarum quoque lux copioſior eſt, caudæ vero nullæ: cometæ autem ſæpe caudatiſſimi ſunt, ubi capitum lux tenuis eſt & valde obtuſa. Sic enim cometa anni 1680, menſe *Decembri*, quo tempore caput luce ſua vix æquabat ſtellas ſecundæ magnitudinis, caudam emittebat ſplendore notabili uſque ad gradus 40, 50, 60 vel 70 longitudinis & ultra: poſtea *Jan.* 27 & 28 caput apparebat ut ſtella ſeptimæ tantum magnitudinis, cauda vero luce quidem pertenui ſed ſatis ſenſibili longa erat 6 vel 7 gradus, & luce obſcuriſſima, quæ cerni vix poſſet, porrigebatur ad gradum uſque duodecimum vel paulo ultra: ut ſupra dictum eſt. Sed & *Feb.* 9 & 10 ubi caput nudis oculis videri deſierat, caudam gradus duos longam per teleſcopium contemplatus ſum. Porro ſi cauda oriretur ex refractione materiæ cœleſtis, & pro figura cœlorum deflecteretur de ſolis oppoſitione, deberet deflexio illa in iiſdem cœli regionibus in eandem ſemper partem fieri. Atqui cometa anni 1680 *Decemb.* 28. hora $8\frac{1}{2}$ p.m. *Londini*, verſabatur in ♓ $8^{gr}. 41'$, cum latitudine boreali $28^{gr}. 6'$, ſole exiſtente in ♑ $18^{gr}. 26'$. Et cometa

meta anni 1577, *Dec.* 29 versabatur in ♓ 8gr. 41′ cum latitudine boreali 28gr. 40′, sole etiam existente in ♑ 18gr. 26′ circiter. Utroque in casu terra versabatur in eodem loco, & cometa apparebat in eadem cœli parte: in priori tamen casu cauda cometæ (ex meis & aliorum observationibus) declinabat angulo graduum $4\frac{1}{2}$ ab oppositione solis aquilonem versus; in posteriore vero (ex observationibus *Tychonis*) declinatio erat graduum 21 in austrum. Igitur repudiata cœlorum refractione, superest ut phænomena caudarum ex materia aliqua lucem reflectente deriventur.

Caudas autem a capitibus oriri & in regiones a sole aversas ascendere confirmatur ex legibus quas observant. Ut quod in planis orbium cometarum per solem transeuntibus jacentes, deviant ab oppositione solis in eas semper partes, quas capita in orbibus illis progredientia relinquunt. Quod spectatori in his planis constituto apparent in partibus a sole directe aversis; digrediente autem spectatore de his planis, deviatio paulatim sentitur, & indies apparet major. Quod deviatio cæteris paribus minor est ubi cauda obliquior est ad orbem cometæ, ut & ubi caput cometæ ad solem propius accedit; præsertim si spectetur deviationis angulus juxta caput cometæ. Præterea quod caudæ non deviantes apparent rectæ, deviantes autem incurvantur. Quod curvatura major est ubi major est deviatio, & magis sensibilis ubi cauda cæteris paribus longior est: nam in brevioribus curvatura ægre animadvertitur. Quod deviationis angulus minor est juxta caput cometæ, major juxta caudæ extremitatem alteram, atque ideo quod cauda convexo sui latere partes respicit a quibus fit deviatio, quæque in recta sunt linea a sole per caput cometæ in infinitum ducta. Et quod caudæ quæ prolixiores sunt & latiores, & luce vegetiore micant, sint ad latera convexa paulo splendidiores & limite minus indistincto terminatæ quam ad concava. Pendent igitur phænomena caudæ a motu capitis, non autem a regione cœli in qua caput conspicitur; & propterea non fiunt per refractionem cœlorum, sed a capite suppeditante materiam oriuntur. Etenim ut in aëre nostro fumus corporis cujusvis igniti petit superiora, idque vel perpendiculariter si corpus quiescat, vel oblique si corpus moveatur in latus: ita in cœlis, ubi corpora gravitant in solem, fumi & vapores ascendere debent a sole (uti jam dictum est) &

De Mundi Systemate & ſuperiora vel recta petere, ſi corpus fumans quieſcit; vel oblique, ſi corpus progrediendo loca ſemper deſerit a quibus ſuperiores vaporis partes aſcenderant. Et obliquitas illa minor erit ubi aſcenſus vaporis velocior eſt: nimirum in vicinia ſolis & juxta corpus fumans. Ex obliquitatis autem diverſitate incurvabitur vaporis columna: & quia vapor in columnæ latere præcedente paulo recentior eſt, ideo etiam is ibidem aliquanto denſior erit, lucemque propterea copioſius reflectet, & limite minus indiſtincto terminabitur. De caudarum agitationibus ſubitaneis & incertis, deque earum figuris irregularibus, quas nonnulli quandoque deſcribunt, hic nihil adjicio; propterea quod vel a mutationibus aëris noſtri, & motibus nubium caudas aliqua ex parte obſcurantium oriantur; vel forte a partibus viæ lacteæ, quæ cum caudis prætereuntibus confundi poſſint, ac tanquam earum partes ſpectari.

Vapores autem, qui ſpatiis tam immenſis implendis ſufficiant, ex cometarum atmoſphæris oriri poſſe, intelligetur ex raritate aëris noſtri. Nam aër juxta ſuperficiem terræ ſpatium occupat quaſi 850 partibus majus quam aqua ejuſdem ponderis, ideoque aëris columna cylindrica pedes 850 alta ejuſdem eſt ponderis cum aquæ columna pedali latitudinis ejuſdem. Columna autem aëris ad ſummitatem atmoſphæræ aſſurgens æquat pondere ſuo columnam aquæ pedes 33 altam circiter; & propterea ſi columnæ totius aëreæ pars inferior pedum 850 altitudinis dematur, pars reliqua ſuperior æquabit pondere ſuo columnam aquæ altam pedes 32. Inde vero (per regulam multis experimentis confirmatam, quod compreſſio aëris ſit ut pondus atmoſphæræ incumbentis, quodque gravitas ſit reciproce ut quadratum diſtantiæ locorum a centro terræ) computationem per corol. prop. XXII. lib. II. ineundo, inveni quod aër, ſi aſcendatur a ſuperficiæ terræ ad altitudinem ſemidiametri unius terreſtris, rarior ſit quam apud nos in ratione longe majori, quam ſpatii omnis infra orbem ſaturni ad globum diametro digiti unius deſcriptum. Ideoque globus aëris noſtri digitum unum latus, ea cum raritate quam haberet in altitudine ſemidiametri unius terreſtris, impleret omnes planetarum regiones uſque ad ſphæram ſaturni & longe ultra. Proinde cum aër adhuc altior in immenſum rareſcat; & coma ſeu atmoſphæra cometæ, aſcendendo ab illius centro, quaſi decuplo altior ſit

quam

quam ſuperficies nuclei, deinde cauda adhuc altius aſcendat, debebit cauda eſſe quam rariſſima. Et quamvis ob longe craſſiorem cometarum atmoſphæram, magnamque corporum gravitationem ſolem verſus, & gravitationem particularum aëris & vaporum in ſe mutuo, fieri poſſit ut aër in ſpatiis cœleſtibus inque cometarum caudis non adeo rareſcat; perexiguam tamen quantitatem aëris & vaporum ad omnia illa caudarum phænomena abunde ſufficere, ex hac computatione perſpicuum eſt. Nam & caudarum inſignis raritas colligitur ex aſtris per eas tranſlucentibus. Atmoſphæra terreſtris luce ſolis ſplendens, craſſitudine ſua paucorum milliarium, & aſtra omnia & ipſam lunam obſcurat & extinguit penitus: per immenſam vero caudarum craſſitudinem, luce pariter ſolari illuſtratam, aſtra minima ſine claritatis detrimento tranſlucere noſcuntur. Neque major eſſe ſolet caudarum plurimarum ſplendor, quam aëris noſtri in tenebroſo cubiculo latitudine digiti unius duorumve lucem ſolis in jubare reflectentis.

Quo temporis ſpatio vapor a capite ad terminum caudæ aſcendit, cognoſci fere poteſt ducendo rectam a termino caudæ ad ſolem, & notando locum ubi recta illa trajectoriam ſecat. Nam vapor in termino caudæ, ſi recta aſcendat a ſole, aſcendere cœpit a capite, quo tempore caput erat in loco interſectionis. At vapor non recta aſcendit a ſole, ſed motum cometæ, quem ante aſcenſum ſuum habebat, retinendo, & cum motu aſcenſus ſui eundem componendo, aſcendit oblique. Unde verior erit problematis ſolutio, ut recta illa, quæ orbem ſecat, parallela ſit longitudini caudæ, vel potius (ob motum curvilineum cometæ) ut eadem a linea caudæ divergat. Hoc pacto inveni quod vapor, qui erat in termino caudæ *Jan.* 25, aſcendere cœperat a capite ante *Dec.* 11, ideoque aſcenſu ſuo toto dies plus 45 conſumpſerat. At cauda illa omnis quæ *Dec.* 10 apparuit, aſcenderat ſpatio dierum illorum duorum, qui a tempore perihelii cometæ elapſi fuerant. Vapor igitur ſub initio in vicinia ſolis celerrime aſcendebat, & poſtea cum motu per gravitatem ſuam ſemper retardato aſcendere pergebat; & aſcendendo augebat longitudinem caudæ: cauda autem, quamdiu apparuit, ex vapore fere omni conſtabat, qui a tempore perihelii aſcenderat; & vapor, qui primus aſcendit, & terminum caudæ compoſuit, non prius evanuit quam ob nimiam ſuam tam a ſole illuſtrante quam ab oculis noſtris diſtantiam videri deſiit.

De Mundi Systemate

desiit. Unde etiam caudæ cometarum aliorum, quæ breves sunt, non ascendunt motu celeri & perpetuo a capitibus & mox evanescunt, sed sunt permanentes vaporum & exhalationum columnæ, a capitibus lentissimo multorum dierum motu propagatæ, quæ, participando motum illum capitum quem habuere sub initio, per cœlos una cum capitibus moveri pergunt. Et hinc rursus colligitur spatia cœlestia vi resistendi destitui; utpote in quibus non solum solida planetarum & cometarum corpora, sed etiam rarissimi caudarum vapores motus suos velocissimos liberrime peragunt ac diutissime conservant.

Ascensum caudarum ex atmosphæris capitum & progressum in partes a sole aversas *Keplerus* ascribit actioni radiorum lucis materiam caudæ secum rapientium. Et auram longe tenuissimam in spatiis liberrimis actioni radiorum cedere, non est a ratione prorsus alienum, non obstante quod substantiæ crassæ impeditissimis in regionibus nostris a radiis solis sensibiliter propelli nequeant. Alius particulas tam leves quam graves dari posse existimat, & materiam caudarum levitare, perque levitatem suam a sole ascendere. Cum autem gravitas corporum terrestrium sit ut materia in corporibus, ideoque servata quantitate materiæ intendi & remitti nequeat, suspicor ascensum illum ex rarefactione materiæ caudarum potius oriri. Ascendit fumus in camino impulsu aëris cui innatat. Aër ille per calorem rarefactus ascendit, ob diminutam suam gravitatem specificam, & fumum implicatum rapit secum. Quidni cauda cometæ ad eundem modum ascenderit a sole? Nam radii solares non agitant media, quæ permeant, nisi in reflexione & refractione. Particulæ reflectentes ea actione calefactæ calefacient auram æthereram cui implicantur. Illa calore sibi communicato rarefiet, & ob diminutam ea raritate gravitatem suam specificam, qua prius tendebat in solem, ascendet & secum rapiet particulas reflectentes ex quibus cauda componitur: Ad ascensum vaporum conducit etiam, quod hi gyrantur circa solem & ea actione conantur a sole recedere, at solis atmosphæra & materia cœlorum vel plane quiescit, vel motu solo quem a solis rotatione acceperit, tardius gyratur. Hæ sunt causæ ascensus caudarum in vicinia solis, ubi orbes curviores sunt, & cometæ intra densiorem & ea ratione graviorem solis atmosphæram consistunt, & caudas quam longissimas mox emittunt. Nam caudæ, quæ tunc nascuntur, conservando motum suum & interea versus solem gravitando, movebuntur

vebuntur circa solem in ellipsibus pro more capitum, & per motum illum capita semper comitabuntur & iis liberrime adhærebunt. Gravitas enim vaporum in solem non magis efficiet ut caudæ postea decidant a capitibus solem versus, quam gravitas capitum efficere possit, ut hæc decidant a caudis. Communi gravitate vel simul in solem cadent, vel simul in ascensu suo retardabuntur; ideoque gravitas illa non impedit, quo minus caudæ & capita positionem quamcunque ad invicem a causis jam descriptis, aut aliis quibuscunque facillime accipiant & postea liberrime servent.

Caudæ igitur, quæ in cometarum periheliis nascuntur, in regiones longinquas cum eorum capitibus abibunt, & vel inde post longam annorum seriem cum iisdem ad nos redibunt, vel potius ibi rarefactæ paulatim evanescent. Nam postea in descensu capitum ad solem caudæ novæ breviusculæ lento motu a capitibus propagari debebunt, & subinde in periheliis cometarum illorum, qui ad usque atmosphæram solis descendunt, in immensum augeri. Vapor enim in spatiis illis liberrimis perpetuo rarescit ac dilatatur. Qua ratione fit ut cauda omnis ad extremitatem superiorem latior sit quam juxta caput cometæ. Ea autem rarefactione vaporem perpetuo dilatatum diffundi tandem & spargi per cœlos universos, deinde paulatim in planetas per gravitatem suam attrahi, & cum eorum atmosphæris misceri rationi consentaneum videtur. Nam quemadmodum maria ad constitutionem terræ hujus omnino requiruntur, idque ut ex iis per calorem solis vapores copiose satis excitentur, qui vel in nubes coacti decidant in pluviis, & terram omnem ad procreationem vegetabilium irrigent & nutriant; vel in frigidis montium verticibus condensati (ut aliqui cum ratione philosophantur) decurrant in fontes & flumina: sic ad conservationem marium & humorum in planetis requiri videntur cometæ, ex quorum exhalationibus & vaporibus condensatis, quicquid liquoris per vegetationem & putrefactionem consumitur & in terram aridam convertitur, continuo suppleri & refici possit. Nam vegetabilia omnia ex liquoribus omnino crescunt, dein magna ex parte in terram aridam per putrefactionem abeunt, & limus ex liquoribus putrefactis perpetuo decidit. Hinc moles terræ aridæ indies augetur, & liquores, nisi aliunde augmentum sumerent, perpetuo decrescere deberent, ac tandem deficere. Porro suspicor spiritum illum, qui aëris nostri pars minima est sed subtilissima &

De Mundi Systemate

optima, & ad rerum omnium vitam requiritur, ex cometis præcipue venire.

Atmosphæræ cometarum in descensu eorum in solem excurrendo in caudas, diminuuntur, & (ea certe in parte quæ solem respicit) angustiores redduntur: & vicissim in recessu eorum a sole, ubi jam minus excurrunt in caudas, ampliantur; si modo phænomena eorum *Hevelius* recte notavit. Minimæ autem apparent, ubi capita jam modo ad solem calefacta in caudas maximas & fulgentissimas abiere, & nuclei fumo forsan crassiore & nigriore in atmosphærarum partibus infimis circundantur. Nam fumus omnis ingenti calore excitatus crassior & nigrior esse solet. Sic caput cometæ, de quo egimus, in æqualibus a sole ac terra distantiis obscurius apparuit post perihelium suum quam antea. Mense enim *Decembri* cum stellis tertiæ magnitudinis conferri solebat, at mense *Novembri* cum stellis primæ & secundæ. Et qui utrumque viderant, majorem describunt cometam priorem. Nam juveni cuidam *Cantabrigiensi, Novem.* 19, cometa hicce luce sua quantumvis plumbea & obtusa, æquabat spicam virginis, & clarius micabat quam postea. Et *Montenaro Nov.* 20. st. vet. cometa apparebat major stellis primæ magnitudinis, existente cauda duorum graduum longitudinis. Et *D. Storer* literis, quæ in manus nostras incidere, scripsit caput ejus mense *Decembri*, ubi caudam maximam & fulgentissimam emittebat, parvum esse & magnitudine visibili longe cedere cometæ, qui mense *Novembri* ante solis ortum apparuerat. Cujus rei rationem esse conjectabatur, quod materia capitis sub initio copiosior esset, & paulatim consumeretur.

Eodem spectare videtur, quod capita cometarum aliorum, qui caudas maximas & fulgentissimas emiserunt, apparuerint subobscura & exigua. Nam anno 1668 *Mart.* 5. st. nov. hora septima vespertina *R. P. Valentinus Estancius*, *Brasiliæ* agens, cometam vidit horizonti proximum ad occasum solis brumalem, capite minimo & vix conspicuo, cauda vero supra modum fulgente, ut stantes in littore speciem ejus e mari reflexam facile cernerent. Speciem utique habebat trabis splendentis longitudine 23 graduum, ab occidente in austrum vergens, & horizonti fere parallela. Tantus autem splendor tres solum dies durabat, subinde notabiliter decrescens; & interea decrescente splendore aucta est magnitudine cauda. Unde etiam in

Lusi-

Lusitania quartam fere cœli partem (id est, gradus 45) occupasse dicitur ab occidente in orientem splendore cum insigni protensa; nec tamen tota apparuit, capite semper in his regionibus infra horizontem delitescente. Ex incremento caudæ & decremento splendoris manifestum est, quod caput a sole recessit, eique proximum fuit sub initio, pro more cometæ anni 1680. Et in chronico *Saxonico* similis legitur cometa anni 1106, *cujus stella erat parva & obscura* (ut ille anni 1680) *sed splendor qui ex ea exivit valde clarus & quasi ingens trabs ad orientem & aquilonem tendebat*, ut habet etiam *Hevelius* ex *Simeone Dunelmensi* Monacho. Apparuit initio mensis *Februarii*, ac deinceps circa vesperam, ad occasum solis brumalem. Inde vero & ex situ caudæ colligitur caput fuisse soli vicinum. *A sole*, inquit *Matthæus Parisiensis*, *distabat quasi cubito uno, ab hora tertia* [rectius sexta] *usque ad horam nonam radium ex se longum emittens.* Talis etiam erat ardentissimus ille cometa ab *Aristotele* descriptus lib. 1. Meteor. 6. *cujus caput primo die non conspectum est, eo quod ante solem vel saltem sub radiis solaribus occidisset, sequente vero die quantum potuit visum est. Nam quam minima fieri potest distantia solem reliquit, & mox occubuit. Ob nimium ardorem* [caudæ scilicet] *nondum apparebat capitis sparsus ignis, sed procedente tempore* (ait Aristoteles) *cum* [cauda] *jam minus flagraret, reddita est* [capiti] *cometæ sua facies. Et splendorem suum ad tertiam usque cœli partem* [id est, ad 60^{gr}] *extendit. Apparuit autem tempore hyberno* [an. 4. olymp. 101.] *& ascendens usque ad cingulum orionis ibi evanuit.* Cometa ille anni 1618, qui e radiis solaribus caudatissimus emersit, stellas primæ magnitudinis æquare vel paulo superare videbatur, sed majores apparuere cometæ non pauci, qui caudas breviores habuere. Horum aliqui jovem, alii venerem vel etiam lunam æquasse traduntur.

Diximus cometas esse genus planetarum in orbibus valde eccentricis circa solem revolventium. Et quemadmodum e planetis non caudatis minores esse solent, qui in orbibus minoribus & soli propioribus gyrantur, sic etiam cometas, qui in periheliis suis ad solem propius accedunt, ut plurimum minores esse, ne solem attractione sua nimis agitent, rationi consentaneum videtur. Orbium vero transversas diametros & revolutionum tempora periodica, ex collatione cometarum in iisdem orbibus post longa temporum intervalla redeuntium,

untium, determinanda relinquo. Interea huic negotio propositio sequens lumen accendere potest.

PROPOSITIO XLII. PROBLEMA XXII.

Inventam cometæ trajectoriam corrigere.

Operatio 1. Assumatur positio plani trajectoriæ, per propositionem superiorem inventa; & seligantur tria loca cometæ observationibus accuratissimis definita, & ab invicem quam maxime distantia; sitque A tempus inter primam & secundam, ac B tempus inter secundam ac tertiam. Cometam autem in eorum aliquo in perigæo versari convenit, vel saltem non longe a perigæo abesse. Ex his locis apparentibus inveniantur, per operationes trigonometricas, loca tria vera cometæ in assumpto illo plano trajectoriæ. Deinde per loca illa inventa, circa centrum solis ceu umbilicum, per operationes arithmeticas, ope prop. xxi. lib. i. institutas, describatur sectio conica: & ejus areæ, radiis a sole ad loca inventa ductis terminatæ, sunto D & E; nempe D area inter observationem primam & secundam, & E area inter secundam ac tertiam. Sitque T tempus totum, quo area tota D + E velocitate cometæ per prop. xvi. lib. i. inventa describi debet.

Oper. 2. Augeatur longitudo nodorum plani trajectoriæ, additis ad longitudinem illam 20′ vel 30′, quæ dicantur P; & servetur plani illius inclinatio ad planum eclipticæ. Deinde ex prædictis tribus cometæ locis observatis, inveniantur in hoc novo plano loca tria vera, ut supra: deinde etiam orbis per loca illa transiens, & ejusdem areæ duæ inter observationes descriptæ, quæ sint d & e, nec non tempus totum t, quo area tota $d+e$ describi debeat.

Oper. 3. Servetur longitudo nodorum in operatione prima, & augeatur inclinatio plani trajectoriæ ad planum eclipticæ, additis ad inclinationem illam 20′ vel 30′, quæ dicantur Q. Deinde ex observatis prædictis tribus cometæ locis apparentibus inveniantur in hoc novo plano loca tria vera, orbisque per loca illa transiens, ut & ejusdem areæ duæ inter observationes descriptæ, quæ sint δ & ε, & tempus totum τ, quo area tota $\delta+\varepsilon$ describi debeat.

Jam

Jam ſit C ad 1 ut A ad B, & G ad 1 ut D ad E, & g ad 1 ut d ad e, & γ ad 1 ut δ ad ε; ſitque S tempus verum inter obſervationem primam ac tertiam; & ſignis + & — probe obſervatis quærantur numeri m & n, ea lege, ut ſit $2G - 2C = mG - mg + nG - n\gamma$, & $2T - 2S$ æquale $mT - mt + nT - n\tau$. Et ſi in operatione prima I deſignet inclinationem plani trajectoriæ ad planum eclipticæ, & K longitudinem nodi alterutrius, erit $I + nQ$ vera inclinatio plani trajectoriæ ad planum eclipticæ, & $K + mP$ vera longitudo nodi. Ac denique ſi in operatione prima, ſecunda ac tertia, quantitates R, r & ϱ deſignent latera recta trajectoriæ, & quantitates $\frac{1}{L}$, $\frac{1}{l}$, $\frac{1}{\lambda}$ ejuſdem latera tranſverſa reſpective: erit $R + mr - mR + n\varrho - nR$ verum latus rectum, & $\frac{1}{L + ml - mL + n\lambda - nL}$ verum latus tranſverſum trajectoriæ quam cometa deſcribit. Dato autem latere tranſverſo datur etiam tempus periodicum cometæ. *Q. E. I.*

Cæterum cometarum revolventium tempora periodica, & orbium latera tranſverſa, haud ſatis accurate determinabuntur, niſi per collationem cometarum inter ſe, qui diverſis temporibus apparent. Si plures cometæ, poſt æqualia temporum intervalla, eundem orbem deſcripſiſſe reperiantur, concludendum erit hos omnes eſſe unum & eundem cometam, in eodem orbe revolventem. Et tum demum ex revolutionum temporibus dabuntur orbium latera tranſverſa, & ex his lateribus determinabuntur orbes elliptici.

In hunc finem computandæ ſunt igitur cometarum plurium trajectoriæ, ex hypotheſi quod ſint parabolicæ. Nam hujuſmodi trajectoriæ cum phænomenis ſemper congruent quamproxime. Id liquet, non tantum ex trajectoria parabolica cometæ anni 1680, quam cum obſervationibus ſupra contuli, ſed etiam ex ea cometæ illius inſignis, qui annis 1664 & 1665 apparuit, & ab *Hevelio* obſervatus fuit. Is ex obſervationibus ſuis longitudines & latitudines hujus cometæ computavit, ſed minus accurate. Ex iiſdem obſervationibus *Halleius* noſter loca cometæ hujus denuo computavit, & tum demum ex locis ſic inventis trajectoriam cometæ determinavit. Invenit autem ejus nodum aſcendentem in ♊ $21^{gr}.\ 13'.\ 55''$, inclinationem orbitæ ad planum eclipticæ $21^{gr}.\ 18'.\ 40''$, diſtantiam perihe-

lii a nodo in orbita 49gr. 27′. 30″. Perihelium in ♌ 8gr. 40′. 30″ cum latitudine auſtrina heliocentrica 16gr. 1′. 45″. Cometam in perihelio *Novem.* 24d. 11h. 52′. p. m. tempore æquato *Londini*, vel 13h. 8′ *Gedani*, ſtylo veteri, & latus rectum parabolæ 410286, exiſtente mediocri terræ a ſole diſtantia 100000. Quam probe loca cometæ in hoc orbe computata congruunt cum obſervationibus, patebit ex tabula ſequente ab *Halleio* ſupputata.

Temp. Appar. *Gedani*, ſt. vet.	Obſervatæ Cometæ diſtantiæ.	gr. ′ ″	Loca obſervata. gr. ′ ″	Loca computata in Orbe. gr. ′ ″
Decemb. 3d. 18h. 29′½	a Corde Leonis a Spica Virginis	46 . 24 . 20 22 . 52 . 10	Long. ♎ 7 . 1 . 0 Lat. auſt. 21 . 39 . 0	♎ 7 . 1 . 29 21 . 38 . 50
4 . 18 . 1½	a Corde Leonis a Spica Virginis	46 . 2 . 45 23 . 52 . 40	Long. ♎ 16 . 15 . 0 Lat. auſt. 22 . 24 . 0	♎ 6 . 16 . 5 22 . 24 . 0
7 . 17 . 48	a Corde Leonis a Spica Virginis	44 . 48 . 0 27 . 56 . 40	Long. ♎ 3 . 6 . 0 Lat. auſt 25 . 22 . 0	♎ 3 . 7 . 33 25 . 21 . 40
17 . 14 . 43	a Corde Leonis ab Hum. Orionis dext.	53 . 15 . 15 45 . 43 . 30	Long. ♌ 2 . 56 . 0 Lat. auſt. 49 . 25 . 0	♌ 2 . 56 . 0 49 . 25 . 0
19 . 9 . 25	a Procyone a Lucid. Mandib. Ceti	35 . 13 . 50 52 . 56 . 0	Long. ♊ 28 . 40 . 30 Lat. auſt. 45 . 48 . 0	♊ 28 . 43 . 0 45 . 46 . 0
20 . 9 . 53½	a Procyone a Lucid. Mandib. Ceti	40 . 49 . 0 40 . 4 . 0	Long. ♊ 13 . 3 . 0 Lat. auſt. 39 . 54 . 0	♊ 13 . 5 . 0 39 . 53 . 0
21 . 9 . 9½	ab Hum. dext. Orionis a Lucid. Mandib. Ceti	26 . 21 . 25 29 . 28 . 0	Long. ♊ 2 . 16 . 0 Lat. auſt. 33 . 41 . 0	♊ 2 . 18 . 30 33 . 39 . 40
22 . 9 . 0	ab Hum. dext. Orionis a Lucid. Mandib. Ceti	29 . 47 . 0 20 . 29 . 30	Long. ♉ 24 . 24 . 0 Lat. auſt. 27 . 45 . 0	♉ 24 . 27 . 0 27 . 46 . 0
26 . 7 . 58	a Lucida Arietis ab Aldebaran	23 . 20 . 0 26 . 44 . 0	Long. ♉ 9 . 0 . 0 Lat. auſt. 12 . 36 . 0	♉ 9 . 2 . 28 12 . 34 . 13
27 . 6 . 45	a Lucida Arietis ab Aldebaran	20 . 45 . 0 28 . 10 . 0	Long. ♉ 7 . 5 . 40 Lat. auſt. 10 . 23 . 0	♉ 7 . 8 . 45 10 23 . 13
28 . 7 . 39	a Lucida Arietis a Palilicio	18 . 29 . 0 29 . 37 . 0	Long. ♉ 5 . 24 . 45 Lat. auſt. 8 . 22 . 50	♉ 5 . 27 . 52 8 . 23 . 37
31 . 6 . 45	a Cing. Androm. a Palilicio	30 . 48 . 10 32 . 53 . 30	Long. ♉ 2 . 7 . 40 Lat. auſt. 4 . 13 . 0	♉ 2 . 8 . 20 4 . 16 . 25
Jan. 1665. 7 . 7 . 37½	a Cing. Androm. a Palilicio	25 . 11 . 0 37 . 12 . 25	Long. ♈ 28 . 24 . 47 Lat. bor. 0 . 54 . 0	♈ 28 . 24 . 0 0 . 53 . 0
13 . 7 . 0	a capite Androm. a Palilicio	28 . 7 . 10 38 . 55 . 20	Long. ♈ 27 . 6 . 54 Lat. bor. 3 . 6 . 50	♈ 27 . 6 . 39 3 . 7 . 40
24 . 7 . 29	a Cing. Androm. a Palilicio	20 . 32 . 15 40 . 5 . 0	Long. ♈ 26 . 29 . 15 Lat. bor. 5 . 25 . 50	♈ 26 . 28 . 50 5 . 26 . 0
Feb. 7 8 . 37			Long. ♈ 27 . 4 . 46 Lat. bor. 7 . 3 . 20	♈ 27 . 24 . 55 7 . 3 . 15
22 . 8 . 46			Long. ♈ 28 . 29 . 46 Lat. bor. 8 . 12 . 36	♈ 28 . 29 . 58 8 . 10 . 25
Mar. 1 . 8 . 16			Long. ♈ 29 . 18 . 15 Lat. bor. 8 . 36 . 26	♈ 29 . 18 . 20 8 . 36 . 12
7 . 8 . 37			Long. ♈ 0 . 2 . 48 Lat. bor. 8 . 56 . 30	♉ 0 . 2 . 42 8 . 56 . 56

Menſe *Februario* anni ineuntis 1665, ſtella prima arietis, quam in ſequentibus vocabo γ, erat in ♈ 28gr. 30′. 15″ cum latitudine boreali 7gr. 8′. 58″. Secunda arietis erat in ♈ 29gr. 17′. 18″ cum latitudine boreali 8gr. 28′. 16″. Et ſtella quædam alia ſeptimæ magnitudinis, quam vocabo *A*, erat in ♈ 28gr. 24′. 45″ cum latitudine boreali 8gr. 28′. 33″. Cometa vero *Feb.* 7d. 7′. 30″ *Pariſiis* (id eſt *Feb.* 7d. 8′. 37″ *Gedani*) ſt. vet. triangulum conſtituebat cum ſtellis illis γ & *A* rectangulum ad γ. Et diſtantia cometæ a ſtella γ æqualis erat diſtantiæ ſtellarum γ & *A*, id eſt 1gr. 19′. 46″ in circulo magno, atque ideo ea erat 1gr. 20′. 26″ in parallelo latitudinis ſtellæ γ. Quare ſi de longitudine ſtellæ γ detrahatur longitudo 1gr. 20′. 26″, manebit longitudo cometæ ♈ 27gr. 9′. 49″. *Auzoutius* ex hac ſua obſervatione cometam poſuit in ♈ 27gr. 0′ circiter. Et ex ſchemate, quo *Hookius* motum ejus delineavit, is jam erat in ♈ 26gr. 59′. 24″. Ratione mediocri poſui eundem in ♈ 27gr. 4′. 46″. Ex eadem obſervatione *Auzoutius* latitudinem cometæ jam poſuit 7gr & 4′ vel 5′ boream verſus. Eandem rectius poſuiſſet 7gr. 3′. 29″, exiſtente ſcilicet differentia latitudinum cometæ & ſtellæ γ æquali differentiæ longitudinum ſtellarum γ & *A*.

Feb. 22d. 7h. 30′ *Londini*, id eſt *Feb.* 22d. 8h. 46′ *Gedani*, diſtantia cometæ a ſtella *A*, juxta obſervationem *Hookii* a ſeipſo in ſchemate delineatam, ut & juxta obſervationes *Auzoutii* a *Petito* in ſchemate delineatas, erat pars quinta diſtantiæ inter ſtellam *A* & primam arietis, ſeu 15′. 57″. Et diſtantia cometæ a linea jungente ſtellam *A* & primam arietis erat pars quarta ejuſdem partis quintæ, id eſt 4′. Ideoque cometa erat in ♈ 28gr. 29′. 46″, cum lat. bor. 8gr. 12′. 36″.

Mart. 1d. 7h. 0′ *Londini*, id eſt *Mart.* 1d. 8h. 16′ *Gedani*, cometa obſervatus fuit prope ſecundam arietis, exiſtente diſtantia inter eoſdem ad diſtantiam inter primam & ſecundam arietis, hoc eſt ad 1gr. 33′, ut 4 ad 45 ſecundum *Hookium*, vel ut 2 ad 23 ſecundum *Gottignies*. Unde diſtantia cometæ a ſecunda arietis erat 8′. 16″ ſecundum *Hookium*, vel 8′. 5″ ſecundum *Gottignies*, vel ratione mediocri 8′. 10″. Cometa vero ſecundum *Gottignies* jam modo prætergreſſus fuerat ſecundam arietis quaſi ſpatio quartæ vel quintæ partis itineris uno die confecti, id eſt 1′. 35″ circiter (quocum ſatis conſentit *Auzoutius*) vel paulo minorem ſecundum *Hookium*, puta 1′. Quare ſi ad longitudinem primæ arietis addatur 1′, & ad

Xxx lati-

latitudinem ejus 8′. 10″, habebitur longitudo cometæ ♈ 29gr. 18′, & latitudo borealis 8gr. 36′. 26″.

Mart. 7d. 7h. 30′ *Parisiis* (id est *Mart.* 7d. 8h. 37′ *Gedani*) ex observationibus *Auzoutii* distantia cometæ a secunda arietis æqualis erat distantiæ secundæ arietis a stella *A*, id est 52′. 29″. Et differentia longitudinum cometæ & secundæ arietis erat 45′ vel 46′, vel ratione mediocri 45′. 30″. Ideoque cometa erat in ♉ 0gr. 2′. 48″. Ex schemate observationum *Auzoutii*, quod *Petitus* construxit, *Hevelius* deduxit latitudinem cometæ 8gr. 54′. Sed sculptor viam cometæ sub finem motus ejus irregulariter incurvavit, & *Hevelius* in schemate observationum *Auzoutii* a se constructo incurvationem irregularem correxit, & sic latitudinem cometæ fecit esse 8gr. 55′. 30″. Et irregularitatem paulo magis corrigendo, latitudo evadere potest 8gr. 56′, vel 8gr. 57′.

Visus etiam fuit hic cometa *Martii* die 9, & tunc locari debuit in ♉ 0gr. 18′, cum lat. bor. 9gr. 3′½ circiter.

Apparuit hic cometa menses tres, signaque fere sex descripsit, & uno die gradus fere viginti confecit. Cursus ejus a circulo maximo plurimum deflexit, in boream incurvatus; & motus ejus sub finem ex retrogrado factus est directus. Et non obstante cursu tam insolito, theoria a principio ad finem cum observationibus non minus accurate congruit, quam theoriæ planetarum cum eorum observationibus congruere solent, ut inspicienti tabulam patebit. Subducenda tamen sunt minuta duo prima circiter, ubi cometa velocissimus fuit; id quod fiet auferendo duodecim minuta secunda ab angulo inter nodum ascendentem & perihelium, seu constituendo angulum illum 49gr. 27′. 18″. Cometæ utriusque (& hujus & superioris) parallaxis annua insignis fuit, & inde demonstratur motus annuus terræ in orbe magno.

Confirmatur etiam theoria per motum cometæ, qui apparuit anno 1683. Hic fuit retrogradus in orbe, cujus planum cum plano eclipticæ angulum fere rectum continebat. Hujus nodus ascendens (computante *Halleio*) erat in ♍ 23gr. 23′; inclinatio orbitæ ad eclipticam 83gr. 11′; perihelium in ♊ 25gr. 29′. 30″; distantia perihelia a sole 56020, existente radio orbis magni 100000, & tempore perihelii *Julii* 2d. 3h. 50′. Loca autem cometæ in hoc orbe ab *Halleio* computata, & cum locis a *Flamstedio* observatis collata, exhibentur in tabula sequente.

Temp.

1683 Temp. Æqu.t.	Locus Solis	Cometæ Long. Comp.	Lat. Bor. Comp.	Cometæ Long. Obf.	Lat. Bor. Obferv.	Differ. Long.	Differ. Lat.
d. h. ′	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	′ ″	′ ″
Jul. 13.12.55	♌ 1. 2.30	♋ 13. 5.42	29.28.13	♋ 13. 6.42	29.28.20	+ 1. 0	+ 0. 7
15.11.15	2.5 .12	11.37.48	29.34. 0	11.39 43	29.34.50	+ 1.55	+ 0.50
17.10.20	4.45.45	10. 7. 6	29.33.30	10. 8.40	29.34. 0	+ 1.34	+ 0.30
23.13.40	10.38 21	5.10.27	28.51.42	5.11.30	28.50.28	+ 1. 3	− 1.14
25.14. 5	12.35.28	3.27.53	24.24.47	3.27. 0	28.23.40	− 0.53	− 1. 7
31. 9.42	18. 9.22	♊ 27.55. 3	26.22.52	♊ 27.54.24	26.22.25	− 0.39	− 0.27
31.14.55	18.21.53	27.41. 7	26.16.57	27.41. 8	26.14.50	+ 0. 1	− 2. 7
Aug. 2.14.56	20.17.16	25.29.32	25.16.19	25.28.46	25.17.28	− 0.46	+ 1. 9
4.10.49	22, 2.50	23.18.20	24.10.49	23.16.55	24.12.19	− 1.25	+ 1.30
6.10. 9	23.56.45	20.42.23	22.47. 5	20.40.32	22.49. 5	− 1.51	+ 2. 0
9.10.26	26.50.52	16. 7.57	20. 6.37	16. 5.55	20. 6.10	− 2. 2	− 0.27
15.14. 1	♍ 2.47.13	3.30.48	11.37.33	3.26.18	11.32. 1	− 4.30	− 5.32
16.15.10	3.48. 2	0.43. 7	9.34.16	0.41.55	9.34.13	− 1.12	− 0. 3
18.15.44	5.45.33	♉ 24.52.53	5.11.15	♉ 24.49. 5	5. 9.11	− 3.48	− 2. 4
			Auftr.		Auftr.		
22.14.44	9.35.49	11. 7.14	5.16.58	11. 7.12	5.16.58	− 0. 2	− 0. 3
23.15.52	10.36.48	7. 2.18	8.17. 9	7. 1.17	8.16.41	− 1. 1	− 0.28
26.16. 2	13.31.10	♈ 24.45.31	16.38. 0	♈ 24.44. 0	16.38.20	− 1.31	+ 0.20

Confirmatur etiam theoria per motum cometæ retrogradi, qui apparuit anno 1682. Hujus nodus afcendens (computante *Halleio*) erat in ♉ 21gr. 16′. 30″. Inclinatio orbitæ ad planum eclipticæ 17gr. 56′. 0″. Perihelium in ♒ 2gr. 52′. 50″. Diftantia perihelia a fole 58328, exiftente radio orbis magni 100000. Et tempus æquatum perihelii *Sept.* 4d. 7h. 39′. Loca vero ex obfervationibus *Flamftedii* computata, & cum locis per theoriam computatis collata, exhibentur in tabula fequente.

1682 Temp. Appar.	Locus Solis	Cometæ Long. Comp.	Lat. Bor. Comp.	Cometæ Long. Obf.	Lat. Bor. Obferv.	Differ. Long.	Differ. Lat.
d. h. ′	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	′ ″	′ ″
Aug. 19.16.38	♍ 7. 0. 7	♌ 18.14.28	25.50. 7	♌ 18.14.40	25.49.55	− 0.12	+ 0.12
20.15.38	7.55.52	24.46.23	26.14.42	24.46.22	25.12.52	+ 0. 1	+ 1.50
21. 8.21	8.36.14	29.37.15	26.20. 3	29.38. 2	26.17.37	− 0.47	+ 2.26
22. 8. 8	9.33.55	♍ 6.29.53	26. 8.42	♍ 6.30. 3	26. 7.12	− 0.10	+ 1.30
29. 8.20	16.22.40	♎ 12.37.54	18.37.47	♎ 12.37.49	18.34. 5	+ 0. 5	+ 3.42
30. 7.45	17.19.41	15.36. 1	17.26.43	15.35.18	17.27.17	+ 0.43	− 0.34
Sept. 1. 7.33	19.16. 9	20.30.53	15.13. 0	20.27. 4	15. 9.49	+ 3.49	+ 3.11
4. 7.22	22.11.28	25.42. 0	12.23.48	25.40.58	12.22. 0	+ 1. 2	+ 1.48
5. 7.32	23.10.29	27. 0.46	11.33. 8	26.59.24	11.33.51	+ 1.22	− 0.43
8. 7.16	26. 5.58	29.58.44	9.26.46	29.58.45	9.26.43	− 0. 1	+ 0. 3
9. 7.26	27. 5. 9	♏ 0.44.10	8.49.10	♏ 0.44. 4	8.48.25	+ 0. 6	+ 0.45

Confirmatur etiam theoria per motum retrogradum cometæ, qui apparuit anno 1723. Hujus nodus afcendens (computante D. *Bradleo*, aftronomiæ apud *Oxonienfes* profeffore *Saviliano*) erat in

♈ 14gr. 16′. Inclinatio orbitæ ad planum eclipticæ 49gr. 59′. Perihelium in ♉ 12gr. 15′. 20″. Diſtantia perihelia a ſole 998651, exiſtente radio orbis magni 1000000, & tempore æquato perihelii *Septem.* 16d. 16h. 10′. Loca vero cometæ in hoc orbe a *Bradleo* computata, & cum locis a ſeipſo & patruo ſuo D. *Poundio*, & a D. *Halleio* obſervatis collata exhibentur in tabula ſequente.

1723 Temp. Æquat.	Comet. Long. Obſervat.	Lat. Bor. Obſervat.	Comet. Long. Comput.	Lat. Bor. Comput.	Differ. Long.	Differ. Latit.
d. h. ′	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	″	″
Octob. 9 . 8 . 5	♒ 7 . 22 . 15	5 . 2 . 0	♒ 7 . 21 . 26	5 . 2 . 47	+ 49	− 47
10 . 6 . 21	6 . 41 . 12	7 . 44 . 13	6 . 41 . 42	7 . 43 . 18	− 50	+ 55
12 . 7 . 22	5 . 39 . 58	11 . 55 . 0	5 . 40 . 19	11 . 54 . 55	− 21	+ 5
14 . 8 . 57	4 . 59 . 49	14 . 43 . 50	5 . 0 . 37	14 . 44 . 1	− 48	− 11
15 . 6 . 35	4 . 47 . 41	15 . 40 . 51	4 . 47 . 45	15 . 40 . 55	− 4	− 4
21 . 6 . 22	4 . 2 . 32	19 . 41 . 49	4 . 2 . 21	19 . 42 . 3	+ 11	− 14
22 . 6 . 24	3 . 59 . 2	20 . 8 . 12	3 . 59 . 10	20 . 8 . 17	− 8	− 5
24 . 8 . 2	3 . 55 . 29	20 . 55 . 18	3 . 55 . 11	20 . 55 . 9	+ 18	+ 9
29 . 8 . 56	3 . 56 . 17	22 . 20 . 27	3 . 56 . 42	22 . 20 . 10	− 25	+ 17
30 . 6 . 20	3 . 58 . 9	22 . 32 . 28	3 . 58 . 17	22 . 32 . 12	− 8	+ 16
Nov. 5 . 5 . 53	4 . 16 . 30	23 . 38 . 33	4 . 16 . 23	23 . 38 . 7	+ 7	+ 26
8 . 7 . 6	4 . 29 . 36	24 . 4 . 30	4 . 29 . 54	24 . 4 . 40	− 18	− 10
14 . 6 . 20	5 . 2 . 16	24 . 48 . 46	5 . 2 . 51	24 . 48 . 16	− 35	+ 30
20 . 7 . 45	5 . 42 . 20	25 . 24 . 45	5 . 43 . 13	25 . 25 . 17	− 53	− 32
Dec. 7 . 6 . 45	8 . 4 . 13	26 . 54 . 18	8 . 3 . 55	26 . 53 . 42	+ 18	+ 36

His exemplis abunde ſatis manifeſtum eſt, quod motus cometarum per theoriam a nobis expoſitam non minus accurate exhibentur, quam ſolent motus planetarum per eorum theorias. Et propterea orbes cometarum per hanc theoriam enumerari poſſunt, & tempus periodicum cometæ in quolibet orbe revolventis tandem ſciri, & tum demum orbium ellipticorum latera tranſverſa & apheliorum altitudines innoteſcent.

Cometa retrogradus, qui apparuit anno 1607, deſcripſit orbem, cujus nodus aſcendens (computante *Halleio*) erat in ♉ 20gr. 21′; inclinatio plani orbis ad planum eclipticæ erat 17gr. 2′; perihelium erat in ♒ 2gr. 16′; & diſtantia perihelia a ſole erat 58680, exiſtente radio orbis magni 100000. Et cometa erat in perihelio *Octob.* 16d. 3h. 50′. Congruit hic orbis quamproxime cum orbe cometæ, qui apparuit anno 1682. Si cometæ hi duo fuerint unus & idem, revolvetur hic cometa ſpatio annorum 75, & axis major orbis ejus erit ad axem majorem orbis magni, ut $\sqrt{c}: 75 \times 75$ ad 1, ſeu 1778 ad 100 circiter. Et diſtantia aphelia cometæ hujus a ſole, erit ad diſtantiam

tiam mediocrem terræ a ſole, ut 35 ad 1 circiter. Quibus cognitis, haud difficile fuerit orbem ellipticum cometæ hujus determinare. Atque hæc ita ſe habebunt ſi cometa, ſpatio annorum ſeptuaginta quinque, in hoc orbe poſthac redierit. Cometæ reliqui majori tempore revolvi videntur & altius aſcendere.

Cæterum cometæ, ob magnum eorum numerum, & magnam apheliorum a ſole diſtantiam, & longam moram in apheliis, per gravitates in ſe mutuo nonnihil turbari debent, & eorum eccentricitates & revolutionum tempora nunc augeri aliquantulum, nunc diminui. Proinde non eſt expectandum ut cometa idem in eodem orbe, & iiſdem temporibus periodicis accurate redeat. Sufficit ſi mutationes non majores obvenerint, quam quæ a cauſis prædictis oriantur.

Et hinc ratio redditur, cur cometæ non comprehendantur zodiaco more planetarum, ſed inde migrent & motibus variis in omnes cœlorum regiones ferantur. Scilicet eo fine, ut in apheliis ſuis, ubi tardiſſime moventur, quam longiſſime diſtent ab invicem, & ſe mutuo quam minime trahant. Qua de cauſa cometæ, qui altius deſcendunt, ideoque tardiſſime moventur in apheliis, debent altius aſcendere.

Cometa, qui anno 1680 apparuit, minus diſtabat a ſole in perihelio ſuo quam parte ſexta diametri ſolis; & propter ſummam velocitatem in vicinia illa, & denſitatem aliquam atmoſphæræ ſolis, reſiſtentiam nonnullam ſentire debuit, & aliquantulum retardari, & propius ad ſolem accedere: & ſingulis revolutionibus accedendo ad ſolem, incidet is tandem in corpus ſolis. Sed & in aphelio ubi tardiſſime movetur, aliquando per attractionem aliorum cometarum retardari poteſt, & ſubinde in ſolem incidere. Sic etiam ſtellæ fixæ, quæ paulatim expirant in lucem & vapores, cometis in ipſas incidentibus refici poſſunt, & novo alimento accenſæ pro ſtellis novis haberi. Hujus generis ſunt ſtellæ fixæ, quæ ſubito apparent, & ſub initio quam maxime ſplendent, & ſubinde paulatim evaneſcunt. Talis fuit ſtella in cathedra Caſſiopeiæ quam *Cornelius Gemma* octavo *Novembris* 1572, luſtrando illam cœli partem nocte ſerena minime vidit; at nocte proxima (*Novem.* 9.) vidit fixis omnibus ſplendidiorem, & luce ſua vix cedentem veneri. Hanc *Tycho Brahæus* vidit undecimo ejuſdem menſis ubi maxime ſplenduit; & ex eo tempore

paulatim

paulatim decreſcentem & ſpatio menſium ſexdecim evaneſcentem obſervavit. Menſe *Novembri*, ubi primum apparuit, venerem luce ſua æquabat. Menſe *Decembri* nonnihil diminuta jovem æquare videbatur. Anno 1573, menſe *Januario* minor erat jove & major Sirio, cui in fine *Februarii* & *Martii* initio evaſit æqualis. Menſe *Aprili* & *Maio* ſtellis ſecundæ magnitudinis, *Junio*, *Julio* & *Auguſto* ſtellis tertiæ magnitudinis, *Septembri*, *Octobri* & *Novembri* ſtellis quartæ, *Decembri* & anni 1574, menſe *Januario* ſtellis quintæ, & menſe *Februario* ſtellis ſextæ magnitudinis æqualis videbatur, & menſe *Martio* ex oculis evanuit. Color illi ab initio clarus, albicans ac ſplendidus, poſtea flavus, & anni 1573 menſe *Martio* rutilans inſtar martis aut ſtellæ aldebaran; *Maio* autem albitudinem ſublividam induxit, qualem in ſaturno cernimus, quem colorem uſque in finem ſervavit, ſemper tamen obſcurior facta. Talis etiam fuit ſtella in dextro pede ſerpentarii, quam *Kepleri* diſcipuli anno 1604, die 30 *Septembris* ſt. vet. apparere cœpiſſe obſervarunt, & luce ſua ſtellam jovis ſuperaſſe, cum nocte præcedente minime apparuiſſet. Ab eo vero tempore paulatim decrevit, & ſpatio menſium quindecim vel ſexdecim ex oculis evanuit. Tali etiam ſtella nova ſupra modum ſplendente *Hipparchus* ad fixas obſervandas & in catalogum referendas excitatus fuiſſe dicitur. Sed fixæ, quæ per vices apparent & evaneſcunt, quæque paulatim creſcunt, & luce ſua fixas tertiæ magnitudinis vix unquam ſuperant, videntur eſſe generis alterius, & revolvendo partem lucidam & partem obſcuram per vices oſtendere. Vapores autem, qui ex ſole & ſtellis fixis & caudis cometarum oriuntur, incidere poſſunt per gravitatem ſuam in atmoſphæras planetarum & ibi condenſari & converti in aquam & ſpiritus humidos, & ſubinde per lentum calorem in ſales, & ſulphura, & tincturas, & limum, & lutum, & argillam, & arenam, & lapides, & coralla, & ſubſtantias alias terreſtres paulatim migrare.

SCHOLIUM GENERALE.

Hypotheſis vorticum multis premitur difficultatibus. Ut planeta unuſquiſque radio ad ſolem ducto areas deſcribat tempori proportionales, tempora periodica partium vorticis deberent eſſe in duplicata ratione diſtantiarum a ſole. Ut periodica planetarum tempora ſint in proportione ſeſquiplicata diſtantiarum a ſole, tempora peri-

periodica partium vorticis deberent esse in sesquiplicata distantiarum proportione. Ut vortices minores circum saturnum, jovem & alios planetas gyrati conserventur & tranquille natent in vortice solis, tempora periodica partium vorticis solaris deberent esse æqualia. Revolutiones solis & planetarum circum axes suos, quæ cum motibus vorticum congruere deberent, ab omnibus hisce proportionibus discrepant. Motus cometarum sunt summe regulares, & easdem leges cum planetarum motibus observant, & per vortices explicari nequeunt. Feruntur cometæ motibus valde eccentricis in omnes cœlorum partes, quod fieri non potest, nisi vortices tollantur.

Projectilia, in aëre nostro, solam aëris resistentiam sentiunt. Sublato aëre, ut fit in vacuo *Boyliano*, resistentia cessat, siquidem pluma tenuis & aurum solidum æquali cum velocitate in hoc vacuo cadunt. Et par est ratio spatiorum cœlestium, quæ sunt supra atmosphæram terræ. Corpora omnia in istis spatiis liberrime moveri debent; & propterea planetæ & cometæ in orbibus specie & positione datis secundum leges supra expositas perpetuo revolvi. Perseverabunt quidem in orbibus suis per leges gravitatis, sed regularem orbium situm primitus acquirere per leges hasce minime potuerunt.

Planetæ sex principales revolvuntur circum solem in circulis soli concentricis, eadem motus directione, in eodem plano quamproxime. Lunæ decem revolvuntur circum terram, jovem & saturnum in circulis concentricis, eadem motus directione, in planis orbium planetarum quamproxime. Et hi omnes motus regulares originem non habent ex causis mechanicis; siquidem cometæ in orbibus valde eccentricis, & in omnes cœlorum partes libere feruntur. Quo motus genere cometæ per orbes planetarum celerrime & facillime transeunt, & in apheliis suis ubi tardiores sunt & diutius morantur, quam longissime distant ab invicem, ut se mutuo quam minime trahant. Elegantissima hæcce solis, planetarum & cometarum compages non nisi consilio & dominio entis intelligentis & potentis oriri potuit. Et si stellæ fixæ sint centra similium systematum, hæc omnia simili consilio constructa suberunt *Unius* dominio: præsertim cum lux fixarum sit ejusdem naturæ ac lux solis, & systemata omnia lucem in omnia invicem immittant. Et ne fixarum systemata per gravitatem suam in se mutuo cadant, hic eadem immensam ab invicem distantiam posuerit.

Hic

De Mundi Systemate

Hic omnia regit non ut anima mundi, ſed ut univerſorum dominus. Et propter dominium ſuum, dominus deus [a] Παντοκράτωρ dici ſolet. Nam deus eſt vox relativa & ad ſervos refertur: & deitas eſt dominatio dei, non in corpus proprium, uti ſentiunt quibus deus eſt anima mundi, ſed in ſervos. Deus ſummus eſt ens æternum, infinitum, abſolute perfectum: ſed ens utcunque perfectum ſine dominio non eſt dominus deus. Dicimus enim deus meus, deus veſter, deus *Iſraelis*, deus deorum, & dominus dominorum: ſed non dicimus æternus meus, æternus veſter, æternus *Iſraelis*, æternus deorum; non dicimus infinitus meus, vel perfectus meus. Hæ appellationes relationem non habent ad ſervos. Vox deus paſſim [b] ſignificat dominum: ſed omnis dominus non eſt deus. Dominatio entis ſpiritualis deum conſtituit, vera verum, ſumma ſummum, ficta fictum. Et ex dominatione vera ſequitur deum verum eſſe vivum, intelligentem & potentem; ex reliquis perfectionibus ſummum eſſe, vel ſumme perfectum. Æternus eſt & infinitus, omnipotens & omniſciens, id eſt, durat ab æterno in æternum, & adeſt ab infinito in infinitum: omnia regit; & omnia cognoſcit, quæ fiunt aut fieri poſſunt. Non eſt æternitas & infinitas, ſed æternus & infinitus; non eſt duratio & ſpatium, ſed durat & adeſt. Durat ſemper, & adeſt ubique, & exiſtendo ſemper & ubique, durationem & ſpatium conſtituit. Cum unaquæque ſpatii particula ſit *ſemper*, & unumquodque durationis indiviſibile momentum *ubique*, certe rerum omnium fabricator ac dominus non erit *nunquam*, *nuſquam*. Omnis anima ſentiens diverſis temporibus, & in diverſis ſenſuum, & motuum organis eadem eſt perſona indiviſibilis. Partes dantur ſucceſſivæ in duratione, coexiſtentes in ſpatio, neutræ in perſona hominis ſeu principio ejus cogitante; & multo minus in ſubſtantia cogitante dei. Omnis homo, quatenus res ſentiens, eſt unus & idem homo durante vita ſua in omnibus & ſingulis ſenſuum organis. Deus eſt unus & idem deus ſemper & ubique. Omnipræſens eſt non per *virtutem* ſolam, ſed etiam per *ſubſtantiam*: nam virtus ſine ſubſtantia ſubſiſtere non poteſt.

[a] Id eſt Imperator univerſalis.

[b] *Pocockus* noſter vocem *dei* deducit a voce *Arabica* *du*, (& in caſu obliquo *di*,) quæ dominum ſignificat. Et hoc ſenſu principes vocantur dii, *Pſalm.* lxxxiv. 6. & *Joan.* x. 45. Et *Moſes* dicitur *deus* fratris *Aaron*, & *deus* regis *Pharaoh* (*Exod.* iv. 16. & vii 1.) Et eodem ſenſu animæ principum mortuorum olim a gentibus vocabantur dii, ſed falſo propter defectum dominii.

teſt. In ipſo [c] continentur & moventur univerſa, ſed ſine mutua paſſione. Deus nihil patitur ex corporum motibus: illa nullam ſentiunt reſiſtentiam ex omnipræſentia dei. Deum ſummum neceſſario exiſtere in confeſſo eſt: Et eadem neceſſitate *ſemper* eſt & *ubique*. Unde etiam totus eſt ſui ſimilis, totus oculus, totus auris, totus cerebrum, totus brachium, totus vis ſentiendi, intelligendi, & agendi, ſed more minime humano, more minime corporeo, more nobis prorſus incognito. Ut cæcus non habet ideam colorum, ſic nos ideam non habemus modorum, quibus deus ſapientiſſimus ſentit & intelligit omnia. Corpore omni & figura corporea prorſus deſtituitur, ideoque videri non poteſt, nec audiri, nec tangi, nec ſub ſpecie rei alicujus corporei coli debet. Ideas habemus attributorum ejus, ſed quid ſit rei alicujus ſubſtantia minime cognoſcimus. Videmus tantum corporum figuras & colores, audimus tantum ſonos, tangimus tantum ſuperficies externas, olfacimus odores ſolos, & guſtamus ſapores: intimas ſubſtantias nullo ſenſu, nulla actione reflexa cognoſcimus; & multo minus ideam habemus ſubſtantiæ dei. Hunc cognoſcimus ſolummodo per proprietates ejus & attributa, & per ſapientiſſimas & optimas rerum ſtructuras & cauſas finales, & admiramur ob perfectiones; veneramur autem & colimus ob dominium. Colimus enim ut ſervi, & deus ſine dominio, providentia, & cauſis finalibus nihil aliud eſt quam fatum & natura. A cæca neceſſitate metaphyſica, quæ utique eadem eſt ſemper & ubique, nulla oritur rerum variatio. Tota rerum conditarum pro locis ac temporibus diverſitas, ab ideis & voluntate entis neceſſario exiſtentis ſolummodo oriri potuit. Dicitur autem deus per allegoriam videre, audire, loqui, ridere, amare, odio habere, cupere, dare, accipere, gaudere, iraſci, pugnare, fabricare, condere, conſtruere. Nam ſermo omnis de deo a rebus humanis per ſimilitudinem aliquam deſumitur, non perfectam quidem, ſed aliqualem tamen. Et hæc de deo, de quo utique ex phænomenis diſſerere, ad philoſophiam naturalem pertinet.

[c] Ita ſentiebant veteres, ut *Pythagoras* apud *Ciceronem*, de Natura deorum, *lib.* I. *Thales*, *Anaxagoras*, *Virgilius* Georgic. *lib.* iv. *v.* 220, & Æneid. *lib.* 6. *v.* 721. *Philo* Allegor. *lib.* 1. ſub initio. *Aratus* in Phænom. ſub initio. Ita etiam ſcriptores ſacri ut *Paulus* in Act. xvii. 27, 28. *Johannes* in Evang. xiv. 2. *Moſes* in Deut. iv. 39. & x. 14. *David* Pſal. cxxxix. 7, 8, 9. *Solomon* 1 Reg. viii. 27. *Job* xxii. 12, 13, 14. *Jeremias* xxiii. 23, 24. Fingebant autem idololatræ ſolem, lunam, & aſtra, animas hominum & alias mundi partes eſſe partes dei ſummi & ideo colendas ſed falſo.

De Mundi Systemate

Hactenus phænomena cælorum & maris nostri per vim gravitatis exposui, sed causam gravitatis nondum assignavi. Oritur utique hæc vis a causa aliqua, quæ penetrat ad usque centra solis & planetarum, sine virtutis diminutione; quæque agit non pro quantitate *superficierum* particularum, in quas agit (ut solent causæ mechanicæ) sed pro quantitate materiæ *solidæ*; & cujus actio in immensas distantias undique extenditur, decrescendo semper in duplicata ratione distantiarum. Gravitas in solem componitur ex gravitatibus in singulas solis particulas, & recedendo a sole decrescit accurate in duplicata ratione distantiarum ad usque orbem saturni, ut ex quiete apheliorum planetarum manifestum est, & ad usque ultima cometarum aphelia, si modo aphelia illa quiescant. Rationem vero harum gravitatis proprietatum ex phænomenis nondum potui deducere, & hypotheses non fingo. Quicquid enim ex phænomenis non deducitur, *hypothesis* vocanda est; & hypotheses seu metaphysicæ, seu physicæ, seu qualitatum occultarum, seu mechanicæ, in *philosophia experimentali* locum non habent. In hac philosophia propositiones deducuntur ex phænomenis, & redduntur generales per inductionem. Sic impenetrabilitas, mobilitas, & impetus corporum & leges motuum & gravitatis innotuerunt. Et satis est quod gravitas revera existat, & agat secundum leges a nobis expositas, & ad corporum cælestium & maris nostri motus omnes sufficiat.

Adjicere jam liceret nonnulla de spiritu quodam subtilissimo corpora crassa pervadente, & in iisdem latente; cujus vi & actionibus particulæ corporum ad minimas distantias se mutuo attrahunt, & contiguæ factæ cohærent; & corpora electrica agunt ad distantias majores, tam repellendo quam attrahendo corpuscula vicina; & lux emittitur, reflectitur, refringitur, inflectitur, & corpora calefacit; & sensatio omnis excitatur, & membra animalium ad voluntatem moventur, vibrationibus scilicet hujus spiritus per solida nervorum capillamenta ab externis sensuum organis ad cerebrum & a cerebro in musculos propagatis. Sed hæc paucis exponi non possunt; neque adest sufficiens copia experimentorum, quibus leges actionum hujus spiritus accurate determinari & monstrari debent.

FINIS.

INDEX RERUM ALPHABETICUS.

N. B. *Citationes factæ sunt ad normam sequentis exempli.* III, 10: 484, 16: 514, 6 *designant libri tertii propositionem decimam: paginæ* 484^{tæ} *lineam* 16^{am}: *paginæ* 514^{æ} *lineam* 6^{am}.

L.

M.

aphelii

F I N I S.

CATALOGUS Librorum proſtantium apud GUIL. & JOH. INNYS.

1. OPTICKS, or a Treatiſe of the Reflections, Refractions, Inflections and Colours of Light The third Edition corrected. By Sir *Iſaac Newton*, Kt. 8vo. 1721.

2. Optice, ſive de Reflectionibus, Refractionibus, Inflectionibus & Coloribus Lucis. Libri tres. Authore Iſaaco Newton, Equite Aurato. Latinè reddidit Samuel Clarke, S. T. P. Editio ſecunda, auctior. 8vo. 1719.

3. Analyſis per Quantitatum Series, Fluxiones, ac Differentias cum Enumeratione Linearum tertii Ordinis. 4°. 1711.

4. Arithmetica Univerſalis, ſive de Compoſitione & Reſolutione Arithmetica Liber. Edit. ſecunda. 8vo. 1722.

5. The ſame in Engliſh by Mr. *Raphſon*. 8vo.

6. The Philoſophical Works of the Honourable *Robert Boyle*, Eſq; abridg'd, methodiz'd, and diſpos'd under the general Heads of Phyſics, Statics, Pneumatics, Natural Hiſtory, Chymiſtry and Medicine. The whole illuſtrated with Notes, containing the Improvements made in the ſeveral Parts of natural and experimental Knowledge ſince his Time. In three Volumes. By *Peter Shaw*, M. D. 4°,

7. Geometria Organica, ſive Deſcriptio Linearum curvarum univerſalis. Auctore Colino Mac-Laurin Matheſeos in Collegio novo Abredonenſi Profeſſore, & Reg. Soc. Socio. 4°. 1720.

8. Philoſophical Tranſactions, giving ſome Account of the preſent Undertakings, Studies and Labours of the Ingenious in many conſiderable Parts of the World, from 1665 to 1725. In 32 Volumes. Continued and publiſhed by Dr. *James Jurin*, Secretary to the Royal Society. *N. B.* There are 389 Numbers, moſt of which may be had ſeparate.

9. The ſame abridged by Mr. *Lowthorp*, and Mr. *Mott*. In 5 Vol. 4°.

10. Epiſtola ad amicum de Cotesii Inventis Curvarum ratione, quæ cum Circulo & Hyperbola comparationem admittunt, cui additur appendix. 4°. 1722.

11. An Analytick Treatiſe of Conic Sections, and their Uſe, for reſolving of Equations in determinate and indeterminate Problems, being the Poſthumous Work of the Marquiſs *de l' Hoſpital*, Honorary Fellow of the Academy Royal of Sciences. 4°.

12. Hiſtoria Cœleſtis Britannica, tribus Voluminibus contenta, obſervante Johanne Flamſtedio, A. R. in Obſervatorio Regio Grenovicenſi, 1725.

13. Mathematical Elements of Natural Philoſophy, confirm'd by Experiments, or an Introduction to Sir *Iſaac Newton*'s Philoſophy. Written in Latin by *William James s'Graveſand*, Doctor of Laws and Philoſophy, Profeſſor of Mathematicks and Aſtronomy at *Leyden*, and F. R. S. of *London*. Tranſlated into Engliſh by *J. T. Deſaguliers*, L. L. D. F. R. S. and Chaplain to his Grace the Duke of *Chandos*. In 2 Vol. 8°. 1726.

14. An Eſſay on Perſpective, written by *William James s' Graveſand*, Doctor of Laws, *&c.* 8vo. 1724.

15. Phyſico-Theology, or a Demonſtration of the Being and Attributes of God, from his Works of the Creation, with large Notes and many curious Obſervations. By *William Derham*, Rector of *Upminſter* in *Eſſex*, Canon of *Windſor*, F. R. S. The Sixth Edition. 8vo. 1723.

16. Aſtro-Theology, or a Demonſtration of the Being and Attributes of God, from a Survey of the Heavens. Illuſtrated with Copper Plates. The Fifth Edition. By the ſame Author. 8vo. 1726.

17. Methodus Incrementorum directa & inverſa. Auctore Brook Taylor, L. L. D. & Regiæ Societatis Secretario. 4°. 1717.

18. The

18. The Religious Philosopher, or the right Use of contemplating the Works of the Creator I. in the wonderful Structure of animal Bodies, and in particular, Man. II. In the no less wonderful and wise Formation of the Elements, and their various Effects upon animal and vegetable Bodies. And III. in the most amazing Structure of the Heavens, with all their Furniture. *Designed for the Conviction of Atheists and Infidels.* In Two Volumes. 4o. Throughout which all the late Discoveries in Anatomy, Philosophy, and Astronomy, together with the various Experiments made use of to illustrate the same, are most copiously handled by that Learned Mathematician Dr. *Nieuwentyt*. Translated from the *Low Dutch*. To which is prefix'd a Letter to the Translator, by the Rev. *J. T. Desaguliers*, L. L. D. F. R. S. The third Edition, adorned with Cuts. 1724.

19. Philosophical Experiments and Observations of the late eminent Dr. *Robert Hooke*, F.R.S. and Geom. Prof. Gresh. and other eminent Virtuoso's in his Time. With Copper Plates. Published by *William Derham*, F. R. S. 8vo. 1726.

20. The Posthumous Works of Dr. *Robert Hooke*; in which 1. the present Deficiency in Natural Philosophy is discours'd of, with the Methods of rendring it more easy and beneficial. 2. Of the Nature, Motions, and Effects of Light, particularly that of the Sun and Comets. 3. An Hypothetical Explication of Memory; how the Organs made use of by the Mind in its Operation may be mechanically understood. 4. An Hypothesis and Explication of the Cause of Gravity or Gravitation, Magnetism, &c. 5. Discourses of Earthquakes, their Causes and Effects, and Histories of several: To which are annexed Physical Explications of several of the Fables in *Ovid's Metamorphosis*, very different from other Mythologick Interpreters. 6. Lectures for improving Navigation and Astronomy, with the Descriptions of several new and useful Instruments, illustrated with Sculptures. To these Discourses is prefix'd the Author's Life. By *Richard Waller*, R. S. Secr. Folio.

21. A Treatise of Architecture, with Remarks and Observations by that excellent Master thereof *Sebastian le Clerc*, Knight of the Empire, Designer and Engraver to the Cabinet of the late *French* King, and Member of the Academy of Arts and Sciences; necessary for young People who would apply to that noble Art. Engraven in 181 Copper Plates by *John Sturt*. Translated by Mr. *Chambers*. In 2 Vol. 8o. 1725.

22. Philosophical Letters between the late Learned Mr. *Ray*, and several of his ingenious Correspondents, Natives aud Foreigners. To which are added those of *Francis Willoughby*, Esq; the whole consisting of many curious Discoveries and Improvements in the History of Quadrupeds, Birds, Fishes, Insects, Plants, Fossils, Fountains, &c. Published by *W. Derham*, M. A. and F. R. S. 1718.

23. The Wisdom of God manifested in the Works of the Creation. In two Parts. To which are added Answers to some Objections. By *John Ray*, late Fellow of the Royal Society. The Eighth Edition. 8o. 1722.

24. Three Physico-Theological Discourses, concerning I. The primitive Chaos, and Creation of the World. II. The general Deluge, its Causes and Effects. III. The Dissolution of the World, and future Conflagration; wherein are largely discussed the Production and Use of Mountains; the Original of Fountains, of formed Stones, and Sea Fishes, Bones and Shells found in the Earth; the Effects of particular Floods and Inundations of the Sea; the Eruptions of Vulcano's; the Nature and Causes of Earthquakes; also an Historical Account of the two late remarkable ones in *Jamaica* and *England*: With practical Inferences, illustrated with Copper Plates. By *John Ray*, late Fellow of the Royal Society. The Fourth Edition. 8o. 1721.

25. New Memoirs of Literature, containing an Account of new Books printed both at home and abroad; with Dissertations upon several Subjects, Miscellaneous Observations, &c. For *February*, 1726. being the Fourteenth Number. To be continued Monthly. 8o.

26. A Treatise of Five Orders of Columns in Architecture, *viz. Tuscan, Doric, Ionic, Corinthian* and *Composite*, wherein the Proportions and Characters of the Members of their several Pedestals, Columns and Entablatures, are distinctly consider'd, with Respect to the Practice of the Antients and Moderns. Also a most natural, easy and practical Method laid down for determining the most minute Part in all the Orders without a Fraction. To which is annexed a Discourse concerning Pilasters, and of several Abuses introduced into Architecture. Engraven on Six Folio Plates of the several Orders, adorned with twenty four Borders, as many initial Letters, and a like Number of Tail-Pieces, by *John Sturt*. Written in French by *Claude Perrault*, of the Royal Academy of *Paris*, Author of the celebrated *Comment on* Vitruvius. Made English by *John James* of *Greenwich*. 1722.

27. Rules and Examples of Perspective, proper for Painters and Architects, with 150 Plates. By *Andrea Pozzo*. Englished by *John James* of *Greenwich*, Fol.

